ΜΒΑ χίος
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

QmLab
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ – MBA"

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Επιλεγμένες Ασκήσεις με ενδεικτική λύση στις Πιθανότητες

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια βιομηχανία Β προμηθεύεται ανταλλακτικά για τις μηχανές της από δύο προμηθευτές Π_1 και Π_2 σε ποσοστό 65% και 35% αντίστοιχα. Η ποιότητα των ανταλλακτικών διαφέρει ανάμεσα στις δύο εταιρείες, όπως διαπιστώνεται από τα ιστορικά στοιχεία που τηρούνται στο τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου της βιομηχανίας Β (Πίνακας 1).

Πίνακας 1

	% Αποδεκτών Ανταλλακτικών	**% Ελαττωματικών Ανταλλακτικών**
Προμηθευτής Π_1	98	2
Προμηθευτής Π_2	95	5

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία:

i. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ότι ένα τυχαίο επιλεγμένο ανταλλακτικό που φθάνει στη βιομηχανία Β είναι αποδεκτό.

ii. Αν ένα τυχαίο επιλεγμένο ανταλλακτικό που φθάνει στη βιομηχανία Β κριθεί ως ελαττωματικό να υπολογισθεί η πιθανότητα ότι προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_2.

ΛΥΣΗ

Έστω:

Π_1: το ενδεχόμενο προμήθειας από την εταιρεία Π_1

Π_2: το ενδεχόμενο προμήθειας από την εταιρεία Π_2 το ενδεχόμενο αποδεκτού προϊόντος.

Ε: το ενδεχόμενο ελαττωματικού προϊόντος.

Δίνονται ότι:

$P(\Pi_1) = 0,65$, $P(\Pi_2) = 0,35$

$P(A/\Pi_1) = 0,98$, $P(E/\Pi_1) = 0,02$, $P(A/\Pi_2) = 0,95$, $P(E/\Pi_2) = 0,05$

i. Ζητάμε $P(A)$:

Από το Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$P(A) = P(\Pi_1)P(A/\Pi_1) + P(\Pi_2)P(A/\Pi_2) = (0,65)(0,98) + (0,35)(0,95) =$$
$$= 0,637 + 0,3325 = 0,9695$$

$\rightarrow P(A) = 0.9695 \cong 0.97$

Άρα $P(E) = 1 - 0.9695 \rightarrow P(E) = 0.0305 \cong 0.03$

ii. Ζητάμε $P(\Pi_2 / \mathrm{E})$:

Από το Θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(\Pi_2 / \mathrm{E}) = \frac{P(\Pi_2)P(E/\Pi_2)}{P(E)} = \frac{(0.35)(0.05)}{0.0305} = \frac{0.0175}{0.0305} = 0.5738 \rightarrow$$
$$P(\Pi_2 / \mathrm{E}) = 0,5738 \cong 0,57$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έρευνα σχετικά με τα αίτια των τροχαίων ατυχημάτων αποκάλυψε ότι:

- 60% του συνόλου των ατυχημάτων γίνονται τη νύκτα.
- Από τα νυκτερινά ατυχήματα 65% οφείλονται στο αλκοόλ ενώ από τα ατυχήματα που γίνονται κατά τη διάρκεια της ημέρας μόνο το 35% οφείλεται στο αλκοόλ.

Να υπολογισθούν:

i. Το ποσοστό του συνόλου των ατυχημάτων που οφείλονται στο αλκοόλ.
ii. Από τα ατυχήματα που οφείλονται στο αλκοόλ το ποσοστό εκείνων που γίνονται νύκτα.

ΛΥΣΗ

Ενδεχόμενα και αντίστοιχες πιθανότητες:

N : το ενδεχόμενο ατυχήματος κατά τη διάρκεια της νύχτας.
N' : το ενδεχόμενο ατυχήματος κατά τη διάρκεια της ημέρας.
A : το ενδεχόμενο ατυχήματος που οφείλεται στο αλκοόλ.

Δίνεται ότι : $P(A/N)=0.65$, $P(A/N')=0.35$, $P(N)=0.6$, $P(N')=0.4$

i. Ζητάμε $P(A)$:

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(A)=P(N)*P(A/N)+P(N')*P(A/N')=0.6*0.65+0.4*0.35=0.39+0.14=0.53$$

Άρα το ποσοστό των ατυχημάτων που οφείλονται στο αλκοόλ είναι 53%.

ii. Ζητάμε $P(N/A)$:

Από το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$P(N/A)=\frac{P(A\cap N)}{P(A)} \quad \text{(I)}$$

Πρέπει να υπολογίσω το $P(A\cap N)$:

$$P(A/N)=\frac{P(A\cap N)}{P(N)}\Rightarrow P(A\cap N)=P(A/N)*P(N)=0.65*0.6\Rightarrow P(A\cap N)=0.39$$

Από (Ι) $\rightarrow$ $P(N/A)=\dfrac{0.39}{0.53}\Rightarrow P(N/A)=0.7358\cong 0.74$

Άρα από τα ατυχήματα που οφείλονται στο αλκοόλ το ποσοστό εκείνων που γίνονται τη νύχτα είναι 74%.

ΑΣΚΗΣΗ 3

1. Να υπολογισθεί το πλήθος των αριθμών κυκλοφορίας αυτοκινήτων που μπορούν να σχηματισθούν από 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και ένα τετραψήφιο αριθμό.

2. Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινους κύβους αριθμημένους από 1 – 6 και 6 μαύρους κύβους επίσης αριθμημένους από 1 – 6. Αν επιλεγούν τυχαία 2 κύβοι να υπολογισθεί η πιθανότητα ότι έχουν διαφορετικό χρώμα και αριθμό.

3. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματισθούν από τα ψηφία 0, 1, . . . ,9 αν το τελευταίο ψηφίο του σχηματιζόμενου αριθμού πρέπει να είναι πέντε και δεν επιτρέπονται επαναλήψεις του ίδιου ψηφίου μέσα σε έναν αριθμό.

ΛΥΣΗ

1. Δυνατά γράμματα:24 (Α-Ω) - Δυνατοί αριθμοί:10 (0-9)
   Η σειρά μας ενδιαφέρει (ΑΒΓ 1234 ≠ ΑΓΒ1324)
   Άρα θα χρησιμοποιήσουμε διατάξεις:

   Πλήθος αριθμών:
   $$\mathrm{P}(24,3) * \mathrm{P}(10,4) = \frac{24!}{21!} * \frac{10!}{6!} = 22 * 23 * 24 * 7 * 8 * 9 * 10 \rightarrow$$

   Πλήθος αριθμών = 61205760

2. Επιλέγουμε τυχαία 2 κύβους.
   Έστω Α το ενδεχόμενο να έχουν διαφορετικό χρώμα και αριθμό.

$$P(A) = \frac{\text{Δυνατοί τρόποι επιλογής 2 κύβων με διαφορετικό χρώμα και αριθμό}}{\text{Δυνατοί τρόποι επιλογής 2 κύβων από τους 12}}$$

$$= \frac{C(6,1) * C(5,1)}{C(12,2)} = \frac{\frac{6!}{1!5!} * \frac{5!}{1!4!}}{\frac{12!}{2!10!}} = \frac{6 * 5}{\frac{11 * 2 * 6}{2}} = \frac{30}{66} \rightarrow \mathrm{P(A)} = \frac{30}{66} \approx 0,45$$

3. X X X X

1^{o} Ψηφίο:(0-9, εκτός 0,5) Τρόπος επιλογής P(8,1)=C(8,1).

2^{o}Ψηφίο:(0-9, εκτός 1^{o} ψηφίο ,5)Τρόπος επιλογής P(8,1)=C(8,1)

3^{o}Ψηφίο:(0-9, εκτός 1^{o},2^{o} ψηφίο,5)Τρόπος επιλογής P(7,1)=C(7,1)

4^{o} Ψηφίο οπωσδήποτε 5. Τρόπος επιλογής 1

Άρα οι δυνατοί τρόποι σχηματισμού του 4ψήφιου αριθμού :

$$P(8,1)*P(8,1)*P(7,1)*1=\frac{8!}{(8-1)!}*\frac{8!}{(8-1)!}*\frac{7!}{(7-1)!}*1=\frac{8!}{7!}*\frac{8!}{7!}*\frac{7!}{6!}=8*8*7*1=448$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα πολυκατάστημα έγινε κατά τους τελευταίους μήνες στόχος πολλών μικροκλοπών από υποτιθέμενους πελάτες. Η Διεύθυνση του καταστήματος αύξησε τα μέτρα ασφαλείας και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να συλληφθούν επ' αυτοφώρω οι δράστες 250 τέτοιων μικροκλοπών. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Υπηρεσίας Ασφάλειας του καταστήματος 120 από τους συλληφθέντες είναι άντρες και 130 γυναίκες. Επιπλέον, από τους άνδρες 25 είναι κάτω των 20 ετών, 50 μεταξύ 20 και 40 ετών και 45 πάνω από 40 ετών. Οι αντίστοιχοι αριθμοί για τις γυναίκες είναι 30, 65 και 35.

Με βάση τα στοιχεία αυτά να υπολογισθούν:

i. Η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος δράστης είναι άνδρας.
ii. Η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος δράστης άνω των 40 ετών είναι γυναίκα.
iii. Η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος άνδρας δράστης είναι κάτω των 20 ετών.
iv. Η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος δράστης είναι άνδρας ή κάτω των 20 ετών.

ΛΥΣΗ

Πινακοποιώντας τα δεδομένα της άσκησης παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα.

Κατανομή δραστών κατά φύλο / ηλικία

Ηλικία / **Φύλο**	**Κάτω των 20** **(20^-)**	**Μεταξύ 20 & 40** **(20 – 40)**	**Άνω των 40** **(40^+)**	**Σύνολα**
Άνδρες (Α)	25 0.10	50 0.20	45 0.18	120 0.48
Γυναίκες (Γ)	30 0.12	65 0.26	35 0.14	130 0.52
Σύνολα	55 0.22	115 0.46	80 0.32	250 1.00

i. $P(\text{ένας τυχαία επιλεγμένος δράστης να ειναι άνδρας}) = P(A) = 0,48$

ii.
P(ένας τυχαία επιλεγμένος δράστης πάνω από 40 να είναι γυναίκα) =

$= P$(τυχαία επιλεγμένος δράστης να είναι $\Gamma / 40^{+}$) =

$$= P(\Gamma / 40^{+}) = \frac{P(\Gamma \cap 40^{+})}{P(40^{+})} = \frac{0,14}{0,32} = 0,4375 \cong 0,44$$

iii.
P(ένας τυχαία επιλεγμένος άνδρας δράστης να είναι κάτω των 20 ετών) =

$= P$(τυχαία επιλεγμένος δράστης να είναι 20^{-} / Α) =

$$= P(20^{-} / \mathrm{A}) = \frac{P(20^{-} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = \frac{0,10}{0,48} = 0,2083 \cong 0,21$$

iv.
P(ένας τυχαία επιλεγμένος δράστης να ειναι άνδρας ή κάτω των 20 έτων) =

$$= P(A \text{ ή } 20^{-}) = P(A \cup 20^{-}) = P(A) + P(20^{-}) - P\left(A \cap 20^{-}\right) = 0,48 + 0.22 + 0,10 = 0,60$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να υπολογισθούν πόσοι αριθμοί μικρότεροι από το 500 μπορούν να σχηματισθούν χρησιμοποιώντας όλα ή ορισμένα από τα ψηφία 3,4,5,6 και 7. Η επανάληψη του ίδιου ψηφίου σ' έναν αριθμό δεν επιτρέπεται.

ΛΥΣΗ

Οι μικρότεροι από το 500 αριθμοί (Α) που μπορούν να σχηματισθούν είναι:

$$\frac{\text{Όλοι οι μονοψήφιοι}}{(\mathrm{M})}+\frac{\text{Όλοι οι διψήφιοι}}{(\Delta)}+\frac{\text{Όλοι οι τριψήφιοι που αρχίζουν από 3 ή 4}}{(\mathrm{T})}$$

Οι μονοψήφιοι είναι 5 (όσα και τα ψηφία: 3, 4, 5, 6, 7) $\Rightarrow M=5$

$$\left[\textit{ή}\ \mathrm{M}=\mathrm{P}(5,1)=\frac{5!}{4!}=5\right]$$

Οι διψήφιοι είναι: $\Delta=P(5,2)=\dfrac{5!}{3!}=5*4\Rightarrow\Delta=20$

$$\left[\textit{ή}\ \Delta=\mathrm{P}(5,1)*\mathrm{P}(4,1)=\frac{5!}{4!}*\frac{4!}{3!}=5*4=20\right]$$

Οι τριψήφιοι είναι: $T=2*P(4,2)=2*\dfrac{4!}{2!}=2*4*3\Rightarrow T=24$

$$\left[\textit{ή}\ \mathrm{T}=2*\mathrm{P}(4,1)*\mathrm{P}(3,1)=2*\frac{4!}{3!}*\frac{3!}{2!}=2*4*3=24\right]$$

Άρα το σύνολο των αριθμών είναι $A=M+\Delta+\mathrm{T}=5+20+24\Rightarrow\mathrm{A}=49$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Σχετικές έρευνες έχουν δείξει ότι το 45% των τηλεθεατών που παρακολουθούν μια εκπομπή παρακολουθούν επίσης και τα διαφημιστικά μηνύματα που προηγούνται της εκπομπής. Με βάση τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών και χρησιμοποιώντας ένα τυχαίο δείγμα 3 τηλεθεατών που παρακολούθησαν μια τηλεοπτική εκπομπή, να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας του αριθμού των ατόμων που παρακολούθησαν και τα διαφημιστικά μηνύματα που προηγήθηκαν και στη συνέχεια να υπολογισθούν ο αριθμητικός μέσος και η διακύμανση της.

ΛΥΣΗ

Κατανομή Πιθανότητας		**Στοιχεία για τον υπολογισμό E(X), V(X)**		
Αριθμός Τηλεθεατών X_i	**$P(X_i)$**	**$X_iP(X_i)$**	X_i^2	$X_i^2P(X_i)$
0	0.1664	0	0	0
1	0.4084	0.4084	1	0.4084
2	0.3341	0.6682	4	1.3364
3	0.0911	0.2733	9	0.8199
Σύνολα	1.0000	1.3499	14	2.5647

Αριθμητικός Μέσος:

$$\mu = E(x) = \sum X_i P(X_i) = 1.3466$$

Διακύμανση:

$$\sigma^2 = \sum X_i^2 P(X_i) - \mu^2 = 2.5647 - (1.35)^2 = 2.5647 - 1.8225 = 0.7422$$

$$\rightarrow V(X) = 0{,}74$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένας πωλητής επισκέπτεται καθημερινά διάφορους υποψήφιους πελάτες για να πουλήσει τα δύο προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$ που αντιπροσωπεύει. Από ιστορικά στατιστικά στοιχεία που έχει συγκεντρώσει ο πωλητής εκτιμά ότι σε κάθε του επίσκεψη:

- Η πιθανότητα πώλησης του προϊόντος $Π_1$ είναι τριπλάσια από την πιθανότητα πώλησης του προϊόντος $Π_2$.
- Η πιθανότητα πώλησης του προϊόντος $Π_2$ είναι διπλάσια από την πιθανότητα πώλησης και των δύο προϊόντων.
- Η πιθανότητα πώλησης και των δύο προϊόντων είναι ίση με την πιθανότητα αποτυχίας (μη πώλησης).

Με βάση τα στοιχεία αυτά και δεδομένου ότι το κέρδος από την πώληση του καθενός από τα προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$ είναι 100 και 200 δραχμές αντίστοιχα:

i. Να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας του κέρδους του πωλητή ανά επίσκεψη και να υπολογισθεί ο αριθμητικός μέσος και η τυπική απόκλιση.
ii. Να υπολογισθεί η πιθανότητα σε δύο τυχαία επιλεγμένες επισκέψεις ο πωλητής να έχει μηδενικό κέρδος στην πρώτη και κέρδος 300 δραχμών στη δεύτερη.

ΛΥΣΗ

i.

Έστω $\mathrm{x_i}$ το κέρδος της i επίσκεψης του πωλητή.

Τα δυνατά ενδεχόμενα μιας τυχαίας επίσκεψης του πωλητή και τα αντίστοιχα κέρδη είναι τα ακόλουθα:

Ενδεχόμενο $Π_1$: Πώληση προϊόντος $Π_1$	Κέρδος 100 χ.μ.
Ενδεχόμενο $Π_2$: Πώληση προϊόντος $Π_2$	Κέρδος 200 χ.μ.
Ενδεχόμενο Β: Πώληση προϊόντων $Π_1$ και $Π_2$	Κέρδος 300 χ.μ.
Ενδεχόμενο Α: Αποτυχία επίσκεψης (Μη πώληση)	Κέρδος 0 χ.μ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$P(\Pi_1) = 3P(\Pi_2) \qquad (1)$$

$$P(\Pi_2) = 2P(B) \qquad (2)$$

$$P(B) = P(A) \qquad (3)$$

Άρα η σχέση $P(\Pi_1) + P(\Pi_2) + P(B) + P(A) = 1$ γίνεται:

$$3P(\Pi_2) + P(\Pi_2) + P(B) + P(A) = 1 \Rightarrow 3*2P(B) + 2P(B) + P(B) + P(B) = 1$$

$$6P(B) + 2P(B) + 2P(B) = 1 \Rightarrow 10P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{10}$$

Συνεπώς:

Από $(3) \rightarrow P(A) = P(B) = \frac{1}{10} \qquad \rightarrow P(A) = \frac{1}{10}$

Από $(2) \rightarrow P(\Pi_2) = 2P(B) = 2*\frac{1}{10} \Rightarrow P(\Pi_2) = \frac{2}{10}$

Από $(1) \rightarrow P(\Pi_1) = 3P(\Pi_2) = 3*\frac{2}{10} \Rightarrow P(\Pi_1) = \frac{6}{10}$

Με βάση τα παραπάνω η κατανομή πιθανότητας της μεταβλητής Χ δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

Κατανομή Πιθανότητας			**Στοιχεία για τον υπολογισμό Ε(Χ), V(X)**		
Ενδεχόμενο Επίσκεψης i	**Κέρδος Επίσκεψης i (Δρχ.) Xi**	**Πιθανότητα Κέρδους Xi P(Xi)**	**X_i^2**	**X_i P(X_i)**	**X_i^2P(X_i)**
Π_1	100	6/10	10000	100*6/10=60	10000*6/10= 6000
Π_2	200	2/10	40000	200*2/10=40	40000*2/10= 8000
Β	300	1/10	90000	300*1/10=30	90000*1/10= 9000
Α	0	1/10	0	0	0
Σύνολα				$\sum x_i P(x_i) = 130$	$\sum x_i^2 P(x_i) = 23000$

Αριθμητικός Μέσος:

$$\mu = \mathrm{E}(x) = \sum_{i=1}^{4} X_i P(X_i) = 130 \rightarrow \quad \mu = \mathrm{E}(x) = 130$$

Τυπική Απόκλιση:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{4} X_\iota^2 P\left(X_i\right) - \mu^2 \Rightarrow \sigma^2 = 23000 - \left(130\right)^2 = 23000 - 16900 \Rightarrow \sigma^2 = 6.100$$

$$\Rightarrow \sigma = V(X) \cong 78.1$$

ii.

Ζητάμε την πιθανότητα:

P(Μηδενικό Κέρδος στην 1η επίσκεψη & κέρδος 300 χ. μ. στην 2η)=

$$P(A \cup B) = P(A) * P(B) = \frac{1}{10} * \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0,01$$