ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ – MBA"

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Επιλεγμένες Ασκήσεις με ενδεικτική λύση στα Διαστήματα Εμπιστοσύνης και τους Ελέγχους Υποθέσεων

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ο καθηγητής Στατιστικής ενός Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων, θέλει να συγκρίνει τη διασπορά των βαθμολογιών των φοιτητών του Τμήματος στα μαθήματα Λογιστική και Κοινωνιολογία. Μελετώντας το θέμα, διαπίστωσε ότι σε ένα τυχαίο δείγμα 16 φοιτητών που είχαν εξεταστεί στην Λογιστική, η μέση βαθμολογία (σε κλίμακα 0– 100) ήταν 75 μονάδες και η τυπική απόκλιση 15 μονάδες. Αντίστοιχα, σ' ένα τυχαίο δείγμα 13 φοιτητών που είχαν εξεταστεί στην Κοινωνιολογία η μέση βαθμολογία ήταν 70 μονάδες και η διακύμανση 100 μονάδες. Με βάση τα στοιχεία αυτά και με δεδομένο ότι οι βαθμολογίες και στα δυο μαθήματα ακολουθούν κανονική κατανομή να κατασκευασθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο των διακυμάνσεων των βαθμολογιών στα δύο μαθήματα.

ΛΥΣΗ

Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τη βαθμολογία των φοιτητών στα μαθήματα Λογιστική και Κοινωνιολογία αντίστοιχα. Οι μεταβλητές αυτές ακολουθούν κανονική κατανομή και επιπλέον δίνεται ότι:

Για τη Λογιστική: $n=16,\ S_x=15,\ \overline{X}=75$ και

Για την Κοινωνιολογία: $m=13$, $S_Y^2=100$, $\overline{Y}=70.$

Με βάση τα δεδομένα αυτά, θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο διακυμάνσεων των βαθμολογιών.

Γενικός τύπος : $\left[F^{-1}_{1-\frac{a}{2},n-1,m-1}*\frac{S_X^2}{S_y^2},\quad F^{-1}_{\frac{a}{2},n-1,m-1}*\frac{S_X^2}{S_y^2}\right]$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχω: $\alpha=0.05 \ \rightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0.025 \rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975$

$n=16 \rightarrow n-1=15$, $m=13 \rightarrow m-1=12$, $S_x = 15x \rightarrow S_X^2 = 225$, $S_y^2 = 100$, $\frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{225}{100}$

$\rightarrow \frac{S_X^2}{S_Y^2} = 2{,}25$

Άρα ο γενικός τύπος γίνεται:

$$\left[F^{-1}_{0.975,15,12} * 2.25, \quad F^{-1}_{0.025,15,12} * 2.25\right] = \left[F^{-1}_{0.975,15,12} * 2.25, \quad \frac{1}{F^{-1}_{0.975,12,15}} * 2.25\right] =$$

$$\left[\frac{1}{F_{0.975,15,12}} * 2.25, \quad F_{0.975,12,15} * 2.25\right] = \left[\frac{1}{3.18} * 2.25, \quad 2.96 * 2.25\right] = [0.71, \quad 6.66]$$

Άρα το 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης των διακυμάνσεων της βαθμολογίας των φοιτητών στα δύο μαθήματα είναι: $[0.71, \quad 6.66]$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δύο φαρμακοβιομηχανίες έχουν παράγει, ανεξάρτητα, δύο διαφορετικά φάρμακα Α και Β για την ανακούφιση ασθενών που πάσχουν από αρθριτικά. Πριν τα θέσουν σε κυκλοφορία θέλησαν να δοκιμάσουν την αποτελεσματικότητα τους. Το φάρμακο Α, δοκιμάστηκε σε 100 ασθενείς και έδωσε μέσο χρόνο ανακούφισης 8,9 ώρες με τυπική απόκλιση 2,1 ώρες. Το φάρμακο Β, δοκιμάστηκε σε 81 ασθενείς και έδωσε μέσο χρόνο ανακούφισης 7,9 ώρες με τυπική απόκλιση 1,8 ώρες.

i. Να διερευνηθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 αν ο χρόνος ανακούφισης του φαρμάκου Α είναι σημαντικά μεγαλύτερος από αυτόν του Β.
ii. Σε περίπτωση που αποδειχθεί ότι ο χρόνος ανακούφισης του Α είναι πράγματι μεγαλύτερος από αυτόν του Β να εξετασθεί ποιος θα έπρεπε να ήταν ο μέσος χρόνος ανακούφισης του δείγματος στο οποίο χορηγήθηκε το φάρμακο Β ώστε να μην υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο φαρμάκων.

ΛΥΣΗ

i. Έστω X_A και X_B οι τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν το μέσο χρόνο ανακούφισης που δίνουν τα φάρμακα Α και Β αντίστοιχα. Δίνεται ότι:

Για το φάρμακο Α:

$n_A = 100, \bar{X}_A = 8{,}9 \quad S_A = 2{,}1$

Για το φάρμακο Β:

$n_B = 81, \ \bar{X}_B = 7.9, \ S_B = 1{,}8$

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

$H_0 = \mu_A - \mu_B = 0 (\mu_A = \mu_B)$

έναντι της εναλλακτικής:

$H_1 : \mu_A - \mu_B > 0 \ \ (\mu_A > \mu_B)$

σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05

Για τον έλεγχο αυτό εργαζόμαστε ως εξής:

<u>Βήμα 1</u>: Προσδιορισμός Συνάρτησης και Κριτηρίου Ελέγχου

Από το σχετικό διάγραμμα έχουμε:

$\sigma_{\mathrm{A}}, \sigma_{\mathrm{B}}$ = γνωστές;	ΟΧΙ
$\sigma_{\mathrm{A}} = \sigma_{\mathrm{B}}$	ΟΧΙ
$n_A \geq 30$	ΝΑΙ
$n_B \geq 30$	ΝΑΙ
$x_A, x_B \sim N$	ΝΑΙ

Άρα η Συνάρτηση Ελέγχου είναι:

$$Z_0 = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{S^2_{\overline{X}_A} + S^2_{\overline{X}_B}}} = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{S^2_A}{n_A} + \frac{S^2_B}{n_B}}}$$

Το αντίστοιχο Κριτήριο Ελέγχου είναι:

Αποδοχή της H_0 αν $Z_0 < Z_{1-a}$, διαφορετικά Απόρριψη της H_0

<u>Βήμα 2</u>: Υπολογισμός των Z, Z_{1-a}

$$S_{\overline{X}_A} = \frac{S_A}{\sqrt{n_A}} = \frac{2.1}{\sqrt{100}} = \frac{2.1}{10} \rightarrow S_{\overline{X}_A} = 0.21$$

$$S_{\overline{X}_B} = \frac{S_B}{\sqrt{n_B}} = \frac{1.8}{81} = \frac{1.8}{9} \rightarrow S_{\overline{X}_B} = 0.20$$

$$Z_o = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{S^2_{\overline{X}_A} + S^2_{\overline{X}_A}}} = \frac{8.9 - 7.9}{\sqrt{(0.21)^2 + (0.20)^2}} = \frac{1.0}{\sqrt{0.0841}} = \frac{1.0}{0.29} \rightarrow Z_o = 3.45$$

Άρα $a = 0.05 \rightarrow 1 - a = 0.95 \rightarrow Z_{1-a} = Z_{0.95} = 1.64$

<u>Βήμα 3:</u> Έλεγχος / Συμπέρασμα

$Z_0 = 3.45 > 1.64 = Z_{1-a}$

Άρα απορρίπτουμε την H_0 και αποδεχόμαστε την H_1. Με άλλα λόγια αποδεχόμαστε ότι ο χρόνος ανακούφισης του φαρμάκου Α είναι σημαντικά μεγαλύτερος από αυτόν του Β.

ii. Για να μην υπήρχε διαφορά μεταξύ των χρόνων ανακούφισης των δυο φαρμάκων θα έπρεπε $Z_0 < 1.64$

$$Z_0 < 1.64 \rightarrow \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{0,29} < 1,64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{X}_A - \overline{X}_B < 1,64 * 0,29 \Rightarrow -\overline{X}_B < 1,64 * 0,29 - \overline{X}_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{X}_B > \overline{X}_A - 1,64 * 0,29 \Rightarrow \overline{X}_B > 8,9 - 1,64 * 0,29 = 8,9 - 0,4756 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{X}_B > 8,4244 \Rightarrow \overline{X}_B > 8,43$$

Άρα θα έπρεπε ο μέσος χρόνος ανακούφισης του φαρμάκου Β να είναι μεγαλύτερος από 8,43.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Η εταιρεία Χ παρασκευάζει και συσκευάζει στιγμιαίο καφέ σε βάζα των οποίων η ετικέτα γράφει «καθαρό βάρος 500 γραμμάρια». Για τη συσκευασία, η οποία γίνεται αυτόματα, χρησιμοποιείται η μηχανή Κ η οποία σύμφωνα με τις προδιαγραφές του κατασκευαστή της σε κάθε βάζο καφέ τοποθετεί κατά μέσο όρο 500 γραμμάρια. Πρόσφατα η εταιρεία δέχτηκε καταγγελίες πολλών καταναλωτών ότι το περιεχόμενο βάζων καφέ που αγόρασαν ήταν μικρότερο από το αναγραφόμενο. Προκειμένου να διερευνήσει τις καταγγελίες αυτές, η εταιρεία χρησιμοποίησε δείγμα 25 βάζων και διαπίστωσε ότι το μέσο βάρος τους ήταν 480 γραμμάρια και η δειγματική απόκλιση 30 γραμμάρια.

i. Με βάση τα στοιχεία αυτά και αν υποτεθεί ότι το περιεχόμενο των βάζων που συσκευάζει η μηχανή ακολουθεί κανονική κατανομή να εξετασθεί αν ευσταθούν οι καταγγελίες των καταναλωτών σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.
ii. Σε περίπτωση που διαπιστωθεί ότι οι καταγγελίες των καταναλωτών ευσταθούν, η εταιρεία έχει αποφασίσει να αλλάξει τις ετικέτες ώστε να συμφωνούν με το πραγματικό περιεχόμενο των βάζων. Πόσο είναι το νέο περιεχόμενο που θα πρέπει να αναγράφεται;

ΛΥΣΗ

i.

Έστω Χ το περιεχόμενο που τοποθετεί η μηχανή στα βάζα του καφέ.
Σύμφωνα με τις προδιαγραφές της Χ ~ Ν (μ = 500, σ = ;)

Παίρνουμε δείγμα n = 25και βρίσκουμε ότι $\bar{x} = 480$, $s = 30$.

Με βάση τα δεδομένα αυτά θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

$\mathrm{H}_0 : \mu = 500$

έναντι της εναλλακτικής:

$H_1 : \mu < 500$

Σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$

Βήμα 1: Προσδιορισμός Συνάρτησης και Κριτηρίου Ελέγχου

Από το σχετικό διάγραμμα έχουμε:

σ = γνωστή; ΟΧΙ

$n \geq 30$; ΟΧΙ Άρα: Συνάρτηση Ελέγχου $\mathrm{T} = \dfrac{\overline{\chi} - \mu}{S_{\bar{x}}}$, $v = n - 1$

$X \sim N$; ΝΑΙ

Το αντίστοιχο Κριτήριο Ελέγχου είναι:

Αποδοχή της H_0 αν $\mathrm{T} \rangle - t_{v,1-a}$, διαφορετικά Απόρριψη της H_0.

Βήμα 2: Υπολογισμός των T_o, $t_{v,\,1-a}$

$$S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{30}{\sqrt{25}} = \frac{30}{5} \Rightarrow S_{\bar{x}} = 6, \quad \mathrm{T}_o = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\bar{x}}} = \frac{480 - 500}{6} \Rightarrow T = -3.33$$

$a = 0.05 \rightarrow 1 - a = 0.95$. Άρα: $t_{v,1-a} = t_{24,0.95} = 1.711$

Βήμα 3: Έλεγχος / Συμπέρασμα

$T = -3.33 < -1.711 = -t_{v,1-\alpha}$. Άρα απορρίπτουμε την H_0 και δεχόμαστε την H_1, δηλαδή ευσταθούν οι καταγγελίες των καταναλωτών.

ii.

Έστω Π το περιεχόμενο που θα πρέπει να αναγράφει η ετικέτα.

Η τιμή του Π πρέπει να είναι τέτοια ώστε $T \leq -1.711$

Άρα:

$$\frac{\overline{X} - \Pi}{S_{\bar{x}}} \leq -1.711 \rightarrow \quad \overline{X} - \Pi \leq (-1.711) S_{\bar{x}} \rightarrow \quad -\Pi \leq -\overline{X} - 1.711 * S_{\bar{x}} \rightarrow$$

$$\Pi \geq \overline{X} + 1.711 * S_{\bar{x}} \rightarrow \quad \Pi \geq 480 + 1.711 * 6 \rightarrow \quad \Pi \geq 480 + 10.27 \rightarrow \quad \Pi \geq 490.27$$

Άρα η ετικέτα θα πρέπει να αναγράφει "<u>Καθαρό Περιεχόμενο 490 γραμμάρια".</u>

ΑΣΚΗΣΗ 4

Μια φαρμακευτική εταιρεία ισχυρίζεται ότι το φάρμακο Α όταν χορηγείται προληπτικά για ορισμένο χρόνο διάστημα, μπορεί να προλάβει τις ασθματικές κρίσεις τουλάχιστον στο 90% των παιδιών που πάσχουν από την ασθένεια. Να ελεγχθεί η υπόθεση αυτή σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05 αν σε τυχαίο δείγμα n=95 παιδιών, εμφάνισαν κρίση τα 16 παρόλο που έπαιρναν προληπτικά το φάρμακο.

ΛΥΣΗ

Έλεγχος Ποσοστού

Έχουμε δείγμα n = 95 παιδιών που παίρνουν το φάρμακο και βρίσκουμε ότι 16 από αυτά εμφανίζουν κρίση. Άρα Χ = 95 – 16 = 79 παιδιά δεν εμφανίζουν κρίση. Με βάση τα δεδομένα αυτά:

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση:

$H_0 : P = 0.9$

Έναντι της εναλλακτικής:

$H_0 : P \langle 0.9$

Σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$

Για τον έλεγχο αυτό εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα1: Προσδιορισμός Συνάρτησης και Κριτηρίου Ελέγχου

Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου $Z = \dfrac{\dfrac{X}{n} - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$

Κριτήριο Ελέγχου:

Απορρίπτουμε την H_0 αν $Z_0 < -Z_{1-a}$, διαφορετικά αποδεχόμαστε την H_0

<u>*Βήμα 2:*</u> *Υπολογισμός των* Z_o, Z_{1-a}

$$Z_0 = \frac{\frac{79}{95} - 0.9}{\sqrt{\frac{(0.9)(0.1)}{95}}} = \frac{0.832 - 0.9}{\sqrt{\frac{0.09}{95}}} = \frac{-0.008}{0.0308} \to Z_0 = -2.21$$

Δίνεται ότι: $a = 0,05 \to 1 - a = 0.095 \to Z_{1-a} = Z_{0,95} = 1,64$

<u>*Βήμα 3:*</u> *Έλεγχος / Συμπέρασμα*

Αφού $Z_0 < -Z_{1-a}$ απορρίπτω την H_0 και δέχομαι τη H_1. Δηλαδή ο ισχυρισμός της φαρμακευτικής εταιρείας ότι το φάρμακο Α μπορεί να προλάβει τις ασθματικές κρίσεις στο 90% των παιδιών που πάσχουν από την ασθένεια δεν ευσταθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μια πρόσφατη έρευνα στο θέμα των αμοιβών των νέων πτυχιούχων Τμημάτων Διοίκησης Επιχειρήσεων ΑΕΙ και ΤΕΙ, υποστηρίζει ότι σε ευρωπαϊκό επίπεδο οι ετήσιες αμοιβές των αποφοίτων ΑΕΙ έχουν μεγαλύτερη διασπορά από αντίστοιχες αμοιβές των αποφοίτων ΤΕΙ. Προκειμένου να διερευνηθεί ο ισχυρισμός αυτός και για την Ελλάδα, οι αρμόδιες υπηρεσίες του Υπουργείου Εργασίας επιλέγουν τυχαία ένα δείγμα 21 αποφοίτων ΑΕΙ και ένα δείγμα 25 αποφοίτων ΤΕΙ και υπολογίζουν ότι οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις των ετήσιων αμοιβών είναι 170 χιλ. δρχ. και 75 χιλ. δρχ. αντίστοιχα. Με βάση τα στοιχεία αυτά οι υπηρεσίες του Υπουργείου συμπεραίνουν ότι σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01 πράγματι οι ετήσιες αμοιβές των αποφοίτων ΑΕΙ έχουν μεγαλύτερη διασπορά από τις αντίστοιχες των αποφοίτων ΤΕΙ.

i. Αιτιολογήστε το συμπέρασμα τους.
ii. Με δεδομένο ότι η δειγματική τυπική απόκλιση των αμοιβών των αποφοίτων ΑΕΙ είναι 170 χιλ. δρχ., ποια θα έπρεπε να είναι η αντίστοιχη τυπική απόκλιση των αμοιβών των αποφοίτων ΤΕΙ, ώστε σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01 να ανατραπεί το προηγούμενο συμπέρασμα.

ΛΥΣΗ

Έστω X_1, X_2 οι τιμές που εκφράζουν τις αμοιβές φοιτητών ΑΕΙ και ΤΕΙ αντίστοιχα. Δίνεται ότι:

Για τους απόφοιτους ΑΕΙ: $n_1 = 21,\ S_1 = 170$

Για τους απόφοιτους ΤΕΙ: $n_2 = 25,\ S_2 = 75$

Με βάση τα δεδομένα αυτά και σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0,01$:

i. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad (\sigma_1^2 / \sigma_2^2) = 1$$

Έναντι της εναλλακτικής:

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad (\sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1)$$

Για τον έλεγχο αυτό εργαζόμαστε ως εξής:

<u>Βήμα 1:</u> Προσδιορισμός Συνάρτησης και Κριτηρίου Ελέγχου

Συνάρτηση Ελέγχου: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

Κριτήριο Ελέγχου :

Αποδοχή της H_0 αν $F < F_{n_1-1, n_2-1, 1-a}$ διαφορετικά απόρριψη της H_0.

<u>Βήμα 2.</u> Υπολογισμός F_0 και $F_{n_1-1, n_2-1, 1-a}$

$$F_o = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(170)^2}{(75)^2} = \frac{28900}{5625} \approx 5.138 \to F \cong 5.14$$

$$F_{n_1-1, n_2-1, 1-a} = F_{20,\,24,\,0.99} = 2.74$$

<u>Βήμα 3:</u> Έλεγχος / Συμπέρασμα

Επειδή $F_o = 5.14 > 2.74 = F_{20,\,24,\,0.99}$ απορρίπτουμε την H_0 και δεχόμαστε την H_1 που σημαίνει ότι η διασπορά στις αμοιβές των αποφοίτων ΑΕΙ είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διασπορά των αμοιβών των αποφοίτων ΤΕΙ (συμφωνία με το συμπέρασμα της έρευνας).

ii. Για να ανατραπεί το προηγούμενο συμπέρασμα θα πρέπει να δεχτούμε την H_0 δηλαδή θα πρέπει το F_0 να είναι τουλάχιστον ίσο (ή μικρότερο) από το $F_{20,\,24,\,0.99} = 2.74$

$$F_o \le 2.74, \;\; \frac{S_1^2}{S_2^2} \le 2.74 \to \frac{(170)^2}{S_2^2} = 2.74 \to S_2^2 \ge 102.7 \ge 103 \text{ χ.μ.}$$

Άρα για να ανατραπεί το προηγούμενο συμπέρασμα δηλαδή για να ισχυριστούμε ότι δεν υπάρχει σημαντική διαφορά στη διασπορά των ετησίων αποδοχών των αποφοίτων ΑΕΙ και ΤΕΙ θα πρέπει η δειγματική απόκλιση των αποφοίτων να είναι τουλάχιστον 103 δρχ.