04

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια εταιρεία ζυμαρικών σχεδιάζει την προώθηση ενός νέου τύπου ρυζιού ολικής αλέσεως στην αγορά. Για την παραγωγή αυτού του τύπου ρυζιού χρειάζονται δημητριακά δύο ειδών, Α και Β, τα οποία είναι πλούσια σε φυτικές ίνες, πρωτεΐνες και υδατάνθρακές. Η σύσταση των δημητριακών φαίνεται αναλυτικά στον πίνακα που ακολουθεί:

	Συστατικά Δημητριακών		
Δημητριακά	Φυτικές ίνες	Πρωτεΐνες	Υδατάνθρακες
Α	2	2	3
Β	4	6	10

Το κόστος ενός κιλού δημητριακών τύπου Α και Β είναι 6 και 7,5 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Για την παραγωγή ενός κιλού ρυζιού απαιτούνται τουλάχιστον 5,1 γραμμάρια φυτικών ινών, το πολύ 8,4 γραμμάρια πρωτεϊνών και το πολύ 10,8 γραμμάρια υδατανθράκων. Με βάση τα στοιχεία αυτά:

ΑΣΚΗΣΗ 1

1. Να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει τη βέλτιστη ποσότητα δημητριακών τύπου Α και Β (σε κιλά) που πρέπει να προμηθευτεί η εταιρεία ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος παραγωγής του ρυζιού. Να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του

2. Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η βέλτιστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος

3. Να χαρακτηριστούν οι περιορισμοί του προβλήματος σε δεσμευτικούς και μη. Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντηση σας

4. Να υπολογισθεί αν θα αλλάξει η βέλτιστη λύση του προβλήματος, αν για την παραγωγή ενός κιλού ρυζιού απαιτούνται 12 γραμμάρια υδατανθράκων

01

02

03

04

01 → Είναι πρόβλημα **Ελαχιστοποίησης**

02 → Έστω οι **Μεταβλητές**:

x_1 η ποσότητα δημητριακών τύπου Α (σε κιλά)

x_2 η ποσότητα δημητριακών τύπου Β (σε κιλά)

03 → Η επιχείρηση ξοδεύει συνολικά για την αγορά των δημητριακών Α ΣΥΝ των δημητριακών Β.
Για τα δημητριακά Α ξοδεύει 6 μονάδες ΕΠΙ την ποσότητα x_1, δλδ $6x_1$. Για τα δημητριακά Β ξοδεύει 7,5 μονάδες ΕΠΙ την ποσότητα x_2, δλδ $7{,}5x_2$. Άρα, το συνολικό κόστος υπολογίζεται από τη συνάρτηση $\boxed{z = 6x_1 + 7{,}5x_2}$

04 → Από τις **φυτικές ίνες** τα δημητριακά Α περιέχουν 2 μονάδες ανά κιλό και τα δημητριακά Β 4 μονάδες αντίστοιχα. Για την παραγωγή απαιτούνται τουλάχιστον (δλδ το λιγότερο) 5,1 γραμ. φυτικών ινών → Άρα χρησιμοποιεί $2x_1 + 4x_2 \geq 5{,}1$ (1)

04

04 → Από τις **πρωτεΐνες** τα δημητριακά Α περιέχουν 2 μονάδες ανά κιλό και τα δημητριακά Β 6 μονάδες αντίστοιχα. Για την παραγωγή απαιτούνται το πολύ 8,4 γραμ. πρωτεϊνών → Άρα χρησιμοποιεί $2x_1 + 6x_2 \leq 8,4$ (2)

Από τους **υδατάνθρακες** τα δημητριακά Α περιέχουν 3 μονάδες ανά κιλό και τα δημητριακά Β 10 μονάδες αντίστοιχα. Για την παραγωγή απαιτούνται το πολύ 10,8 γραμ. υδατανθράκων →

Άρα χρησιμοποιεί $3x_1 + 10x_2 \leq 10,8$ (3)

Συνοψίζοντας το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού έχουμε:

Αντικειμενική Συνάρτηση: **MIN** $z = 6x_1 + 7,5x_2$

Περιορισμοί:

$2x_1 + 4x_2 \geq 5,1$ (1)

$2x_1 + 6x_2 \leq 8,4$ (2)

$3x_1 + 10x_2 \leq 10,8$ (3)

Και φυσικά οι ποσότητες από τα δημητριακά Α και Β δεν είναι δυνατόν να είναι αρνητικές → Άρα $x_1, x_2 \geq 0$ → Επιλύουμε γραφικά στο 1ο τετ/ριο

Από περιορισμό (1) $\boxed{2x_1+4x_2 = 5{,}1}$

Για x_1=0 → 0 + 4x_2 = 5,1 ⇒ x_2 = 1,275 → άρα A(x_1, x_2), δλδ **A(0, 1,275)**

Για x_2=0 → 2x_1 + 0 = 5,1 ⇒ x_1 = 2,55 → άρα **B(2,55, 0)**

Από περιορισμό (2) $\boxed{2x_1+6x_2 = 8{,}4}$

Για x_1=0 → 0 + 6x_2 = 8,4 ⇒ x_2 = 6 → άρα **Γ(0, 1,4)**

Για x_2=0 → 2x_1 + 0 = 8,4 ⇒ x_1 = 4,2 → άρα **Δ(4,2, 0)**

Από περιορισμό (3) $\boxed{3x_1+10x_2 = 10{,}8}$

Για x_1=0 → 0 + 10x_2 = 10,8 ⇒ x_2 = 1,08 → άρα **E(0, 1,08)**

Για x_2=0 → 3x_1 + 0 = 10,8 ⇒ x_1 = 3,6 → άρα **Z(3,6, 0)**

Περιορισμός (4)

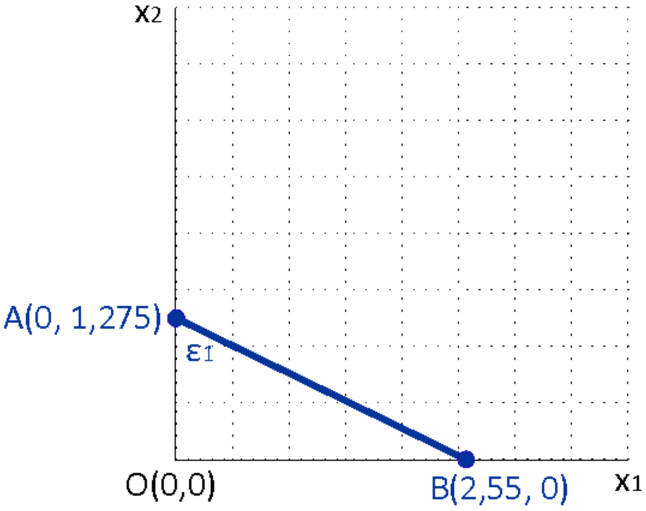
$\boxed{x_1 , x_2 \geq 0}$

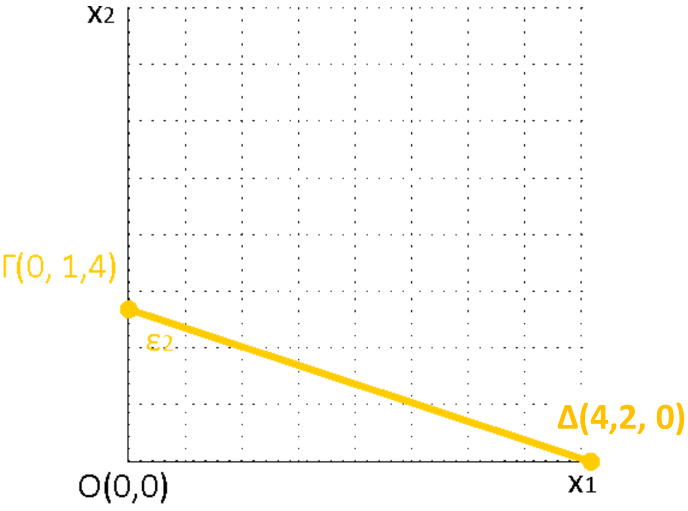
06

07

Από τα σημεία **A(0, 1,275), B(2,55, 0)** έχουμε την ευθεία **ε_1: $2x_1+4x_2=5,1$**

Από τα σημεία **Γ(0, 1,4)** και **Δ(4,2, 0)** έχουμε την ευθεία **ε_2: $2x_1+6x_2=8,4$**

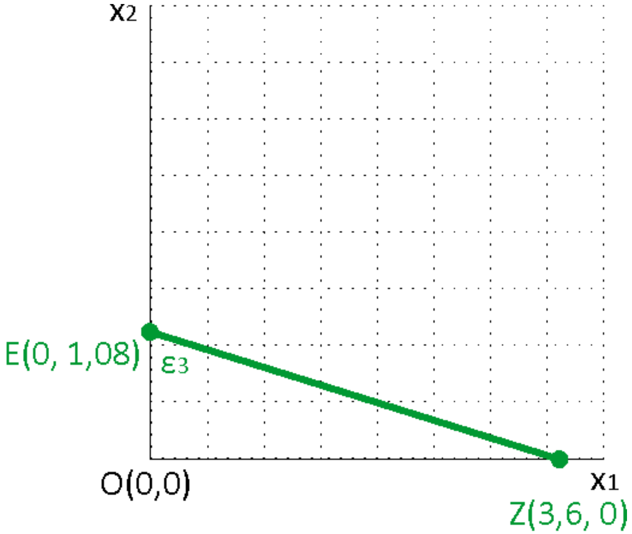


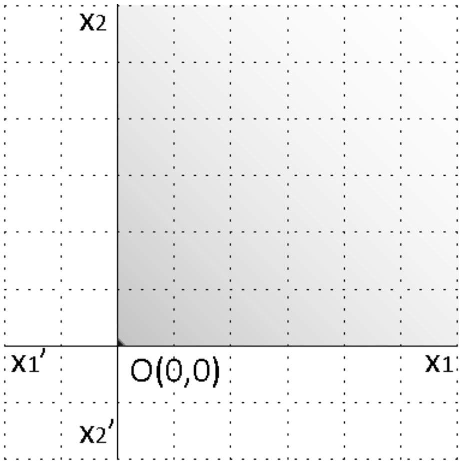


Από τα σημεία **E(0, 1,08)** και **Z(3,6, 0)** έχουμε την ευθεία

ε_2: $3x_1+10x_2=10,8$

Από τον περιορισμό (4) **$x_1, x_2 \geq 0$** έχουμε το εξής:





08

09

Περιορισμός (1) : $2x_1+4x_2 \geq 5,1$ Για $x_1, x_2 = 0 \rightarrow 0 + 0 \geq 5,1$ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

Άρα η εφικτή περιοχή ΔΕΝ είναι το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο Ο(0,0).

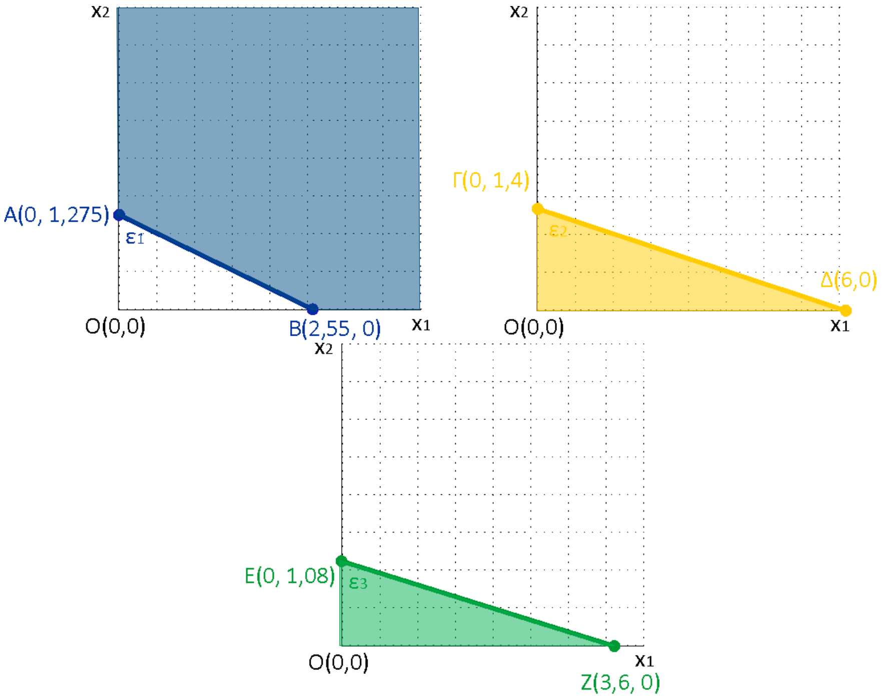
Περιορισμός (2) : $2x_1+6x_2 \leq 8,4$ Για $x_1, x_2 = 0 \rightarrow 0 + 0 \leq 8,4$ ΙΣΧΥΕΙ

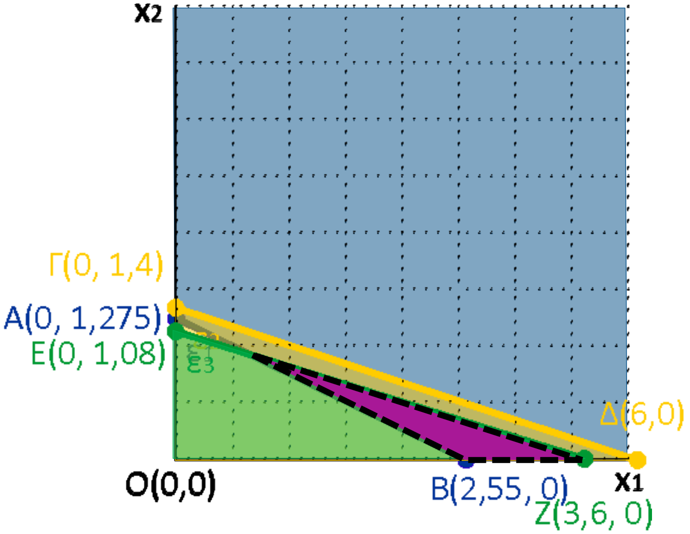
Άρα η εφικτή περιοχή είναι το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο Ο(0,0).

Περιορισμός (3) : $3x_1 + 10x_2 \leq 10,8$ Για $x_1, x_2 = 0 \rightarrow 0 + 0 \leq 10,8$ ΙΣΧΥΕΙ

Άρα η εφικτή περιοχή είναι το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο Ο(0,0).

Συναλήθευση Περιορισμών





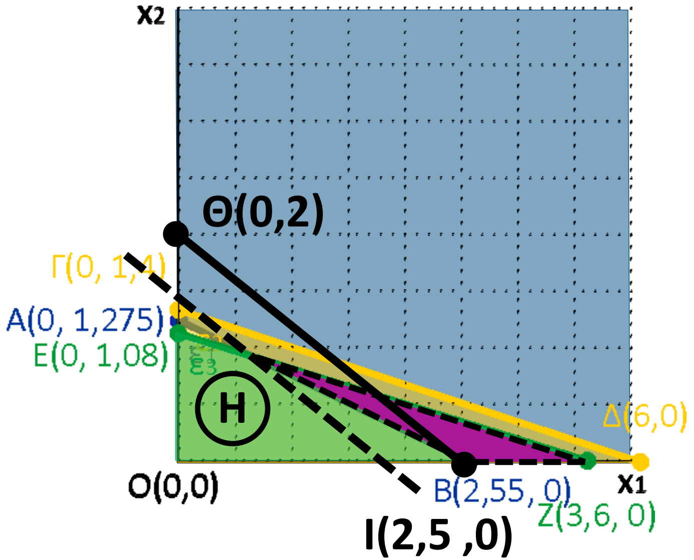
Βέλτιστη Λύση

Η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε μία από τις κορυφές του τριγώνου HZB, δλδ είναι ένα από τα σημεία H, Z, B

<u>Επίλυση με ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ</u>

Έστω z=15 → $6x_1 + 7,5x_2 = 15$

Για $x_1=0$ → $0 + 7,5x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = 2$ →
Άρα **Θ(0, 2)**
Για $x_2=0$ → $6x_1 + 0 = 15 \Rightarrow x_1 = 2,5$ →
Άρα **I(2,5, 0)**



Ελαχιστοποίηση Κόστους

MIN z = MIN $(6x_1+7{,}5x_2)$

Η βέλτιστη λύση βρίσκεται στην **κορυφή Η**, η οποία ορίζεται από τις ε_1 και ε_3

$$\mathbf{2x_1 + 4x_2 = 5{,}1 \text{ και } 3x_1 + 10x_2 = 10{,}8}$$

$2x_1+4x_2 = 5{,}1 \Rightarrow x_1+2x_2 = 2{,}55 \Rightarrow \underline{x_1 = 2{,}55 - 2x_2}$

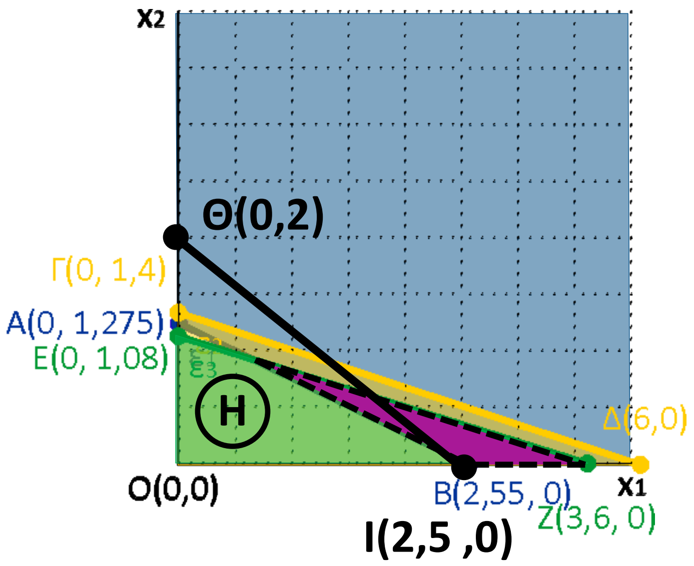
$3x_1+10x_2 = 10{,}8 \Rightarrow 3(2{,}55-2x_2)+10x_2 = 10{,}8 \Rightarrow$

$7{,}65 - 6x_2 + 10x_2 = 10{,}8 \Rightarrow 4x_2 = 3{,}15 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 0{,}79}$

και $\mathbf{x_1} = 2{,}55-2\cdot 0{,}79 = 2{,}55 - 1{,}58 = \mathbf{0{,}97}$

Για $x_1 = 0{,}97$ και $x_2 = 0{,}79$ (σημείο Η(0,97, 0,79))

MIN $z = 6\cdot 0{,}97 + 7{,}5\cdot 0{,}79 = 5{,}82 + 5{,}93 = 11{,}75$



Έλεγχος Διάθεσης Πόρων (ερώτημα 3)

Το ελάχιστο κόστος ορίζεται στην κορυφή Η(0,97, 0,79) και είναι MIN z = 11,75

Για x_1=0,97 και x_2=0,79 έχουμε:
Από τον περιορισμό (1) → $2x_1+4x_2$ =2·0,97+4·0,79 =1,94+3,16 =5,1 =ελάχιστη ποσότητα φυτικών ινών → ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
Από τον περιορισμό (2) → $2x_1+6x_2$ = 2·0,97+6·0,79 =1,94+4,74 =6,68 < μέγιστη ποσότητα πρωτεϊνών → Περισσεύουν 8,4-6,68 = 1,72 γραμ → ΜΗ ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΟΣ
Από τον περιορισμό (3) → $3x_1+10x_2$ = 3·0,97+10·0,79 =2,91+7,9 =10,8 =μέγιστη ποσότητα υδατανθράκων → ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ

Μεταβολή Περιορισμών (ερώτημα 4)

Το σημείο Η(0,97, 0,79), όπου συμβαίνει η ελαχιστοποίηση του κόστους προκύπτει από την τομή 2 ευθειών: των περιορισμών (1) και (3)

Οποιαδήποτε αλλαγή στους περιορισμούς (1) και (3) μεταβάλλει το σημείο τομής, δλδ τη θέση της κορυφής Η και άρα μεταβάλλει και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δλδ το ελάχιστο κόστος. Οι περιορισμοί (1) και (3) αποτελούν δεσμευτικούς περιορισμούς.
Συνεπώς, οποιαδήποτε αλλαγή (αύξηση ή μείωση) στην ελάχιστη ποσότητα των φυτικών ινών ή/και στη μέγιστη ποσότητα των υδατανθράκων (που αντιστοιχούν στους περιορισμούς 1 και 3) επηρεάζει και το ελάχιστο κόστος της επιχείρησης.