ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΙΕΡΗΣΕΩΝ

Εργαστήριο
Ποσοτικών Μεθόδων

Σημειώσεις
Επιχειρησιακής Έρευνας

Β.Α. Αγγελής

Χίος, 2008

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το δυϊκό πρόβλημα

Σκοπός

Μία από τις πιο σημαντικές διαπιστώσεις που προέκυψαν από τα πρώτα στάδια ανάπτυξης και εξέλιξης του γραμμικού προγραμματισμού είναι η θεωρία του δυϊσμού. Σύμφωνα με αυτή, για κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο ονομάζεται «αρχικό» ή «πρωτεύον» πρόβλημα, μπορεί να διατυπωθεί ένα αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα, το οποίο σχετίζεται με το «αρχικό» ως προς τη δομή του και παρέχει πληροφορίες για τη βέλτιστη λύση του. Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η μελέτη του δυϊκού προβλήματος και συγκεκριμένα η δημιουργία του δυϊκού προβλήματος από το πρωτεύον, οι σχέσεις πρωτεύοντος-δυϊκού, η οικονομική ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος και η πρακτική χρησιμότητά του.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού, θα είστε σε θέση να:

- δημιουργείτε το δυϊκό πρόβλημα από το πρωτεύον, όταν αυτό είναι διατυπωμένο είτε στην κανονική είτε στη γενική του μορφή·
- εντοπίζετε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος από την αντίστοιχη λύση του πρωτεύοντος·
- κατανοείτε την οικονομική ερμηνεία αλλά και την πρακτική χρησιμότητα του δυϊκού προβλήματος.

Έννοιες-Κλειδιά

- Αντικειμενική συνάρτηση
- Αντικειμενικός συντελεστής
- Αρχικό/πρωτεύον πρόβλημα
- Ασθενής δυϊσμός
- Γενική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού
- Δυϊκή μεταβλητή
- Δυϊκή τιμή
- Δυϊκό θεώρημα
- Δυϊκό πρόβλημα

- Δυϊκότητα
- Θεώρημα ασθενούς δυϊσμού
- Θεώρημα ισχυρού δυϊσμού
- Θεωρία δυϊσμού
- Ισχυρός δυϊσμός
- Κανονική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού
- Μεταβλητή απόφασης
- Περιορισμός
- Σκιώδης τιμή
- Σταθερά δεξιού μέλους
- Τυπική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Όπως ήδη αναφέρθηκε, σύμφωνα με τη θεωρία του δυϊσμού, για κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί το αντίστοιχο δυϊκό του. Η μελέτη του δυϊκού προβλήματος αποτελεί το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου.

Η **πρώτη ενότητα** αναφέρεται στη βασική ιδέα και στις γενικές έννοιες του δυϊκού προβλήματος.

Στις επόμενες **δύο ενότητες**, το ενδιαφέρον εστιάζεται στον τρόπο δημιουργίας του δυϊκού προβλήματος από το πρωτεύον, όταν αυτό είναι διατυπωμένο, αφενός, στην κανονική και, αφετέρου, στην τυπική του μορφή. Σε κάθε περίπτωση, αρχικά περιγράφονται τα βασικά βήματα της δημιουργίας του δυϊκού προβλήματος και στη συνέχεια εφαρμόζονται σε συγκεκριμένα προβλήματα.

Η **τέταρτη ενότητα** αναφέρεται στις πληροφορίες που μπορεί κανείς να αντλήσει από το δυϊκό πρόβλημα. Προς το σκοπό αυτόν, επιλέγονται δύο από τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες ενότητες, δημιουργούνται τα δυϊκά τους προβλήματα και εξετάζονται οι πληροφορίες οικονομικού ενδιαφέροντος που μπορεί κανείς να αντλήσει από αυτά.

Η **πέμπτη ενότητα** εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ ενός πρωτεύοντος προβλήματος και του δυϊκού του και ειδικότερα τον τρόπο με τον οποίο από τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος μπορεί κανείς να προσδιορίσει την αντίστοιχη λύση του δυϊκού. Και στην περίπτωση αυτή, αρχικά περιγράφεται η θεωρητική προσέγγιση και στη συνέχεια εφαρμόζεται σε επιλεγμένα παραδείγματα.

Τέλος, η **έκτη ενότητα** αναφέρεται στην πρακτική χρησιμότητα του δυϊκού προβλήματος.

Ενότητα 4.1

Εισαγωγή

Μία από τις πιο σημαντικές διαπιστώσεις που προέκυψαν από τα πρώτα στάδια ανάπτυξης και εξέλιξης του γραμμικού προγραμματισμού είναι η **θεωρία του δυϊσμού** (*duality theory*). Η θεωρία αυτή στο γραμμικό προγραμματισμό ξεκινά από το **κλασικό θεώρημα minimax** του J. Von Neumann (1928), αλλά η πρώτη συστηματική της ανάλυση οφείλεται στους D. Gale, H. Kuhn και A. Tucker (1951). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, για κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο ονομάζεται **αρχικό** ή **πρωτεύον πρόβλημα** (*primal problem*), μπορεί να διατυπωθεί ένα αντίστοιχο **δυϊκό πρόβλημα** (*dual problem*), το οποίο σχετίζεται με το «αρχικό» ως προς τη δομή του και το οποίο παρέχει σημαντικές πληροφορίες οικονομικού χαρακτήρα σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος. Το δυϊκό πρόβλημα αποτελεί μια εναλλακτική θεώρηση του «αρχικού» προβλήματος και η ταυτόχρονη προσέγγιση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και με τις δύο αυτές μορφές του βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας και των αλγορίθμων του γραμμικού προγραμματισμού.

Ενότητα 4.2

Δημιουργία του δυϊκού από το πρωτεύον όταν αυτό είναι στην κανονική μορφή

Το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να δημιουργηθεί από οποιοδήποτε πρωτεύον, ακολουθώντας κάποιους συγκεκριμένους κανόνες μετατροπής. Η απλούστερη περίπτωση μετατροπής είναι όταν το μοντέλο του πρωτεύοντος προβλήματος (μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης) βρίσκεται στην κανονική του μορφή, δηλαδή όταν όλοι οι περιορισμοί του είναι της μορφής $\leq$ ή $\geq$ αντίστοιχα και όλες οι μεταβλητές απόφασης ικανοποιούν τη συνθήκη της μη αρνητικότητας. Στην περίπτωση αυτή, οι βασικοί κανόνες μετατροπής του πρωτεύοντος προβλήματος στο δυϊκό του είναι οι ακόλουθοι:

- Όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης (/ελαχιστοποίησης), τότε το δυϊκό του είναι αντίθετα πρόβλημα ελαχιστοποίησης (/μεγιστοποίησης).
- Οι περιορισμοί του προβλήματος αλλάζουν φορά στο δυϊκό.

- Το δυϊκό πρόβλημα έχει τόσες μεταβλητές απόφασης όσοι είναι και οι περιορισμοί του πρωτεύοντος (m). Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται **δυϊκές μεταβλητές** (*dual variables*) και συμβολίζονται με $y_i, i = 1,...,m$.
- Το δυϊκό πρόβλημα έχει τόσους περιορισμούς όσες είναι και οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος (n).
- Οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυϊκού προβλήματος είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος $(b_i, i = 1,...,m)$.
- Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δυϊκού προβλήματος είναι οι αντικειμενικοί συντελεστές του πρωτεύοντος $(c_j, j = 1,...,n)$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τους παραπάνω κανόνες, μετατρέπουμε αρχικά ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης και κατόπιν ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης στο αντίστοιχο δυϊκό τους.

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοποίησης, εκφρασμένο στην κανονική του μορφή, σύμφωνα με τα όσα έχουν μέχρι τώρα αναφερθεί:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (4.1)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n &\le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n &\le b_2 \\ &... \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n &\le b_m \end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ....,\ x_n \ge 0$$

Σύμφωνα με τους προαναφερθέντες κανόνες μετατροπής το αντίστοιχο δυϊκό του διατυπώνεται ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (4.2)

$$W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m &\ge c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m &\ge c_2 \\ &... \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m &\ge c_n \end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν το πρωτεύον είναι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης 4.2, τότε το αντίστοιχο δυϊκό του θα είναι το πρόβλημα μεγιστοποίησης 4.1.

Τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για την δημιουργία του δυϊκού από το πρωτεύον, όταν αυτό είναι στην κανονική μορφή, εφαρμόζονται σε ένα τυπικό παράδειγμα πρωτεύοντος προβλήματος μεγιστοποίησης.

<u>Παράδειγμα 4.1</u>

Έστω το ακόλουθο πρωτεύον πρόβλημα:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (4.3)

$$Z = 10x_1 + 11x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$x_1 + 2x_2 \leq 150$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$
$$6x_1 + x_2 \leq 175$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Να κατασκευαστεί το δυϊκό του πρόβλημα.

………...

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή. Κατά συνέπεια, το δυϊκό του πρόβλημα, το οποίο προκύπτει άμεσα από το πρωτεύον με την εφαρμογή των σχετικών κανόνων και διατυπώνεται παρακάτω, είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή.

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (4.4)

$$W = 150y_1 + 100y_2 + 175y_3$$

με περιορισμούς δομής:

$$y_1 + 3y_2 + 6y_3 \geq 10$$
$$2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 11$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

Όπως παρατηρούμε, το δυϊκό πρόβλημα έχει τρεις μεταβλητές απόφασης, όσοι δηλαδή είναι και οι περιορισμοί δομής του πρωτεύοντος προβλήματος και δύο περιορισμούς, όσες δηλαδή είναι και οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος προβλήματος. Επιπλέον, οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυϊκού προβλήματος είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών δομής του πρωτεύοντος (150, 100, 175), ενώ τα δεξιά μέλη των περιορισμών του (10, 11) είναι οι αντικειμενικοί συντελεστές του πρωτεύοντος προβλήματος.

Ενότητα 4.3

Κατασκευή του δυϊκού από το πρωτεύον όταν αυτό είναι στη γενική μορφή

Μέχρι το σημείο αυτό, έχουμε αναφερθεί στη μετατροπή ενός πρωτεύοντος προβλήματος, μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης, στο αντίστοιχο δυϊκό του, όταν το πρωτεύον είναι διατυπωμένο στην κανονική του μορφή. Πολλές φορές, όμως, το πρωτεύον πρόβλημα δεν είναι διατυπωμένο στην κανονική, αλλά **στη γενική του μορφή**. Στις περιπτώσεις αυτές, θα μπορούσαμε προφανώς να επαναδιατυπώσουμε το πρωτεύον πρόβλημα στην κανονική του μορφή και στη συνέχεια να το μετατρέψουμε, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, στο δυϊκό του. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εργαστούμε απευθείας στο δοθέν πρωτεύον πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης και, μετασχηματίζοντάς το, να καταλήξουμε στο δυϊκό του. Στην τελευταία αυτή περίπτωση, εκτός από τους βασικούς κανόνες που αναφέρθηκαν παραπάνω, θα πρέπει να εφαρμόζονται και οι κανόνες που αναφέρονται στα επόμενα. Οι κανόνες αυτοί αναφέρονται αρχικά στην περίπτωση όπου το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, αλλά με τις εντός παρενθέσεων προσθήκες καλύπτουν και την περίπτωση πρωτεύοντος προβλήματος ελαχιστοποίησης.

- Αν ένας περιορισμός i (j) του πρωτεύοντος είναι της μορφής $\geq$, τότε η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή y_i (x_j) είναι μη θετική (μη αρνητική), δηλαδή $y_i \leq 0$ $(x_j \geq 0)$.
- Αν ένας περιορισμός i (j) του πρωτεύοντος είναι της μορφής $\leq$, τότε η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή y_i (x_j) είναι μη αρνητική (μη θετική), δηλαδή $y_i \geq 0$ $(x_j \leq 0)$.

- Αν ένας περιορισμός i (j) του πρωτεύοντος είναι ισότητα, τότε η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή y_i (x_j) δεν περιορίζεται ως προς τις τιμές της, δηλαδή $y_i \in R$ ($x_j \in R$).
- Αν μια μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος είναι μη αρνητική, δηλαδή $x_j \geq 0$ ($y_i \geq 0$), τότε ο αντίστοιχος περιορισμός j (i) του δυϊκού είναι της μορφής $\geq (\leq)$.
- Αν μια μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος είναι μη θετική, δηλαδή $x_j \leq 0$ ($y_i \leq 0$), τότε ο αντίστοιχος περιορισμός j (i) του δυϊκού είναι της μορφής $\leq (\geq)$.
- Αν μια μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος δεν περιορίζεται ως προς το πρόσημο, δηλαδή $x_j \in R$ $(y_i \in R)$, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός j (i) του δυϊκού είναι ισότητα.

Οι παραπάνω κανόνες συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1 που ακολουθεί:

Πίνακας 4.1
Κατασκευή του δυϊκού από το πρωτεύον

Πρωτεύον (Δυϊκό) Max Z	**Δυϊκό** (Πρωτεύον) $\mathrm{Min}\,W$
Περιορισμός i τύπου $\geq$	Μεταβλητή $y_i \leq 0$
Περιορισμός i τύπου $\leq$	Μεταβλητή $y_i \geq 0$
Περιορισμός i τύπου =	Μεταβλητή $y_i \in R$
Μεταβλητή $x_j \geq 0$	Περιορισμός j τύπου $\geq$
Μεταβλητή $x_j \leq 0$	Περιορισμός j τύπου $\leq$
Μεταβλητή $x_j \in R$	Περιορισμός j τύπου =
Αντικειμενικοί συντελεστές	Δεξιά μέλη περιορισμών
Δεξιά μέλη περιορισμών	Αντικειμενικοί συντελεστές

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τη δημιουργία δυϊκού προβλήματος από πρωτεύον, όταν το τελευταίο είναι διατυπωμένο στη γενική του μορφή, εφαρμόζονται σε ένα τυπικό παράδειγμα πρωτεύοντος προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Παράδειγμα 4.2

Έστω το ακόλουθο πρωτεύον πρόβλημα:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (4.5)

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30$$
$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 \geq 5$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Να κατασκευαστεί το δυϊκό του πρόβλημα.

………..

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης στη γενική του μορφή. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, το δυϊκό του πρόβλημα μπορεί να κατασκευαστεί με δύο τρόπους:

α΄. Μετατροπή του πρωτεύοντος προβλήματος στην κανονική του μορφή, σύμφωνα με τους κανόνες της ενότητας 3.2 και στη συνέχεια κατασκευή του δυϊκού από το πρωτεύον εκφρασμένο στην κανονική του μορφή, σύμφωνα με τους κανόνες της ενότητας 4.2.

β΄. Απευθείας κατασκευή του δυϊκού προβλήματος από το πρωτεύον, εκφρασμένο στη γενική του μορφή, σύμφωνα με τους κανόνες που αναφέρθηκαν παραπάνω (στην παρούσα ενότητα 4.3).

Οι δύο αυτοί τρόποι θα παρουσιαστούν αναλυτικά στη συνέχεια:

α΄ τρόπος. Ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, όπως το υπό μελέτη, είναι εκφρασμένο στην κανονική του μορφή όταν όλοι οι περιορισμοί δομής του είναι της μορφής $\geq$ και όλες οι μεταβλητές απόφασής του είναι μη αρνητικές ($x_j \geq 0$). Στην προκειμένη περίπτωση, και οι δύο μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$), αλλά από τους τέσσερις περιορισμούς δομής μόνο οι δύο τελευταίοι είναι της μορφής $\geq$. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να μετατραπούν και οι υπόλοιποι περιορισμοί στη μορφή αυτή.

Ο πρώτος περιορισμός είναι της μορφής $\leq$ ($2x_1 + 3x_2 \leq 30$) και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί (-1) για να λάβει τη μορφή $\geq$.

Ο δεύτερος περιορισμός είναι ισότητα ($x_1 + 2x_2 = 10$). Σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί (ενότητα 3.2), αρχικά θα αντικατασταθεί από δύο περιορισμούς-ανισότητες και στη συνέχεια ο δεύτερος από αυτούς θα πολλαπλασιαστεί επί (-1) για να λάβει τη μορφή $\geq$.

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω απεικονίζονται μαθηματικά στη συνέχεια:

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{με περιορισμούς:} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ \mathrm{x}_1 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{με περιορισμούς:} \\ -2x_1 - 3x_2 \geq -30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ \mathrm{x}_1 - x_2 \geq 0 \\ \mathrm{x}_1 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{με περιορισμούς:} \\ -2x_1 - 3x_2 \geq -30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ -x_1 - 2x_2 \geq -10 \\ \mathrm{x}_1 - x_2 \geq 0 \\ \mathrm{x}_1 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Σημειώνεται ότι η ύπαρξη αρνητικών δεξιών μελών στο δυϊκό μοντέλο δεν αποτελεί πρόβλημα. Η μορφή αυτή δεν θα χρησιμοποιηθεί για τη λύση με τη μέθοδο Simplex, αλλά μόνο για τον εντοπισμό του δυϊκού προβλήματος, όπου τα αρνητικά δεξιά μέλη θα γίνουν αντικειμενικοί συντελεστές.

Έχοντας μετατρέψει το πρωτεύον πρόβλημα στην κανονική του μορφή, μπορούμε να κατασκευάσουμε το δυϊκό του πρόβλημα με βάση τους κανόνες της ενότητας 4.2:

$$\begin{array}{l} \text{Max} W = -30y_1 + 10y_2 - 10y_3 + 5y_5 \\ \text{με περιορισμούς} \\ \qquad -2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 \leq 2 \\ \qquad -3y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 \leq 3 \\ \qquad y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{array}$$

Όπως παρατηρούμε, το δυϊκό πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή.

β΄ τρόπος. Εναλλακτικά, το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να κατασκευαστεί απευθείας από το πρωτεύον, εκφρασμένο στη γενική του μορφή, σύμφωνα με τους κανόνες της παρούσας ενότητας.

Στην προκειμένη περίπτωση, και οι δύο μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος είναι μη αρνητικές και, κατά συνέπεια, οι δύο περιορισμοί του δυϊκού θα είναι της μορφής $\leq$.

Επιπλέον:

- Ο πρώτος περιορισμός του πρωτεύοντος ($2x_1 + 3x_2 \le 30$) είναι της μορφής $\le$ και, κατά συνέπεια, η πρώτη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού θα είναι μη θετική ($y_1 \le 0$).
- Ο δεύτερος περιορισμός του πρωτεύοντος ($x_1 + 2x_2 = 10$) είναι ισότητα και, επομένως, η δεύτερη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού δεν θα περιορίζεται ως προς το πρόσημό της: $y_2 \in R$.
- Τέλος, οι δύο τελευταίοι περιορισμοί του πρωτεύοντος είναι της μορφής $\ge$ και, επομένως, οι αντίστοιχες μεταβλητές απόφασης του δυϊκού θα είναι μη αρνητικές ($y_3, y_4 \ge 0$).

Κατά συνέπεια, το δυϊκό πρόβλημα, που κατασκευάζεται σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι το ακόλουθο:

$$\text{Max}W = 30y_1 + 10y_2 + 5y_4$$

με περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\le 2 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 &\le 3 \\ y_1 \le 0, y_2 \in R, y_3, y_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Το ερώτημα που φυσιολογικά τίθεται ύστερα από τα παραπάνω είναι αν τα δύο δυϊκά προβλήματα που κατασκευάστηκαν με τις δύο εναλλακτικές μεθόδους είναι ισοδύναμα. Η απάντηση είναι καταφατική και αποδεικνύεται αν φέρουμε και τα δύο δυϊκά προβλήματα στην κανονική τους μορφή.

Το πρώτο είναι διατυπωμένο στην κανονική του μορφή και, κατά συνέπεια, δεν χρειάζεται καμία περαιτέρω παρέμβαση.

Αντίθετα, το δεύτερο είναι διατυπωμένο στην κανονική του μορφή όσον αφορά τους περιορισμούς, αλλά χρειάζεται κάποιες μετατροπές στις μεταβλητές του ώστε να είναι όλες μη αρνητικές.

Η y_1 είναι μη θετική και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να αντικατασταθεί από τη μεταβλητή $y_1' = -y_1 \ge 0$.

Η $y_2 \in R$ και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να εκφραστεί ως διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών y_2' και y_2''. Άρα: $y_2 = y_2' - y_2'' \ge 0$.

Τέλος, οι υπόλοιπες δύο μεταβλητές (y_3, y_4) είναι ήδη μη αρνητικές (≥ 0).

Άρα, το δυϊκό πρόβλημα της δεύτερης περίπτωσης στην κανονική του μορφή είναι το ακόλουθο:

$$\text{Max}W = -30y_1 + 10y'_2 - 10y_2'' + 5y_4$$

με περιορισμούς

$$-2y_1 + y_2' - y_2'' + y_3 + y_4 \leq 2$$
$$-3y_1 + 2y_2' - 2y_2'' - y_3 \leq 3$$
$$y_1, y_2', y_2'', y_3, y_4 \geq 0$$

Παρατηρώντας τα δύο δυϊκά προβλήματα στην κανονική τους μορφή, διαπιστώνουμε ότι είναι ισοδύναμα και η μόνη διαφορά τους αφορά τα σύμβολα των μεταβλητών τους.

4.4. Οικονομική ερμηνεία του δυϊκού

Στην προηγούμενη ενότητα, αναφερθήκαμε στη διαδικασία μετατροπής ενός πρωτεύοντος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στο αντίστοιχο δυϊκό του. Στην ενότητα αυτή, θα αναφερθούμε στις πληροφορίες οικονομικού ενδιαφέροντος που μπορεί κανείς να αντλήσει από το δυϊκό πρόβλημα. Προς το σκοπό αυτό, στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν, θα επιλέξουμε δύο από τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, θα δημιουργήσουμε τα δυϊκά τους προβλήματα και θα εξετάσουμε τις πληροφορίες οικονομικού ενδιαφέροντος που μπορεί κανείς να αντλήσει από αυτά.

Παράδειγμα 4.3

Το πρώτο πρόβλημα είναι το πρόβλημα μεγιστοποίησης που διατυπώθηκε στην υποενότητα 1.4.1. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να προσεγγιστεί και από μια διαφορετική οπτική γωνία και συγκεκριμένα από την οπτική γωνία των πόρων που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των προϊόντων. Ως γνωστόν, είναι πολύ σημαντικό για τη διοίκηση μιας επιχείρησης να γνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο οι διαθέσιμοι πόροι συνεισφέρουν στη δημιουργία κέρδους. Το δυϊκό πρόβλημα αποτελεί ουσιαστικά μια θεώρηση του προηγούμενου προβλήματος από την πλευρά της συνεισφοράς των πόρων και μπορεί να συμβάλλει στη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων σχετικά με την πολιτική προμηθειών των πόρων αυτών και συγκεκριμένα την αγορά, ή μη, πρόσθετων ποσοτήτων. Από αυτήν την οπτική γωνία, θα διερευνήσουμε στη συνέχεια αναλυτικότερα την οικονομική ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος.

Ας υποθέσουμε ότι μια άλλη επιχείρηση Β προτείνει στην επιχείρηση Α να αγοράσει το διαθέσιμο χρόνο εργασίας και τις συνολικές ποσότητες των πόρων Y_1 και Y_2 που αυτή κατέχει, έναντι ενός ποσού W. Αυτό φυσικά θα έχει ως συνέπεια η επιχείρηση Α να σταματήσει την παραγωγή της και τα έσοδα της θα περιοριστούν στο ποσό που θα λάβει από την επιχείρηση Β. Σε μια τέτοια συναλλαγή η επιχείρηση Β έχει ως στόχο να ελαχιστοποιήσει το πόσο που θα καταβάλει στην επιχείρηση Α για την απόκτηση των πόρων της. Αντίθετα η επιχείρηση Α έχει ως στόχο να εισπράξει τη μεγαλύτερη δυνατή αμοιβή από την πώληση των πόρων της και οπωσδήποτε όχι μικρότερη από το κέρδος που θα είχε αν παρήγαγε τα προϊόντα Π_1 και Π_2 και τα πουλούσε.

Ας συμβολίσουμε με y_1, y_2, y_3 τα ποσά που θα καταβάλλει η επιχείρηση Β, για τη μονάδα χρόνου εργασίας και τις μοναδιαίες ποσότητες πόρων Y_1 και Y_2 αντίστοιχα που θα αγοράσει από την Α. Τότε το μελετώμενο πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (4.6)

$$W = 1600y_1 + 1800y_2 + 350y_3$$

με περιορισμούς δομής

$$2y_1 + 6y_2 \geq 3$$

$$4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 8$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

Όπως παρατηρούμε, το πρόβλημα αυτό είναι το δυϊκό του αρχικού προβλήματος.

Η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος εκφράζει το συνολικό τίμημα που προσφέρει η επιχείρηση Β στην επιχείρηση Α για την απόκτηση των πόρων που διαθέτει (ποσότητες των διαθέσιμων πόρων επί την αντίστοιχη μοναδιαία τιμή τους που προσφέρεται από την επιχείρηση Β).

Οι περιορισμοί δομής εκφράζουν τις απαιτήσεις της επιχείρησης Α για το τίμημα της απόκτησης των πόρων της από την επιχείρηση Β. Συγκεκριμένα, το αριστερό μέλος κάθε περιορισμού εκφράζει τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης Α από την πώληση όλων των πόρων που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας ενός προϊόντος j, $j = 1...n$, ενώ το δεξιό μέλος κάθε περιορισμού το κέρδος που θα είχε η επιχείρηση Α αν παρήγαγε και πωλούσε μια μονάδα του προϊόντος αυτού. Προφανώς, η επιχείρηση Α επιδιώκει οι τιμές των αριστερών μελών των περιορισμών να είναι ίσες με, ή μεγαλύτερες από, τις αντίστοιχες τιμές των δεξιών μελών των περιορισμών.

Οι περιορισμοί μη αρνητικότητας εκφράζουν το γεγονός ότι η τιμή που θα προσφέρει η επιχείρηση Β στην επιχείρηση Α για την απόκτηση μιας μονάδας οποιουδήποτε πόρου δεν μπορεί να είναι αρνητική.

<u>Παράδειγμα 4.4</u>

Το δεύτερο πρόβλημα που θα εξεταστεί είναι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που διατυπώθηκε στην υποενότητα 1.4.2. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να προσεγγιστεί και από μια διαφορετική οπτική γωνία και συγκεκριμένα από την οπτική γωνία των πόρων που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των προϊόντων. Ως γνωστόν, είναι πολύ σημαντικό για τη διοίκηση μιας επιχείρησης να γνωρίζει τους πιθανούς τρόπους μείωσης του κόστους λειτουργίας της. Το δυϊκό πρόβλημα αποτελεί ουσιαστικά μια θεώρηση του προηγούμενου προβλήματος από την πλευρά του κόστους διαχείρισης των πόρων και μπορεί να συμβάλλει στη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων σχετικά με την πολιτική αποθήκευσης των πόρων αυτών και συγκεκριμένα για την άμεση κατανάλωση, ή μη, πρόσθετων ποσοτήτων. Από την οπτική αυτή γωνία, θα διερευνήσουμε στη συνέχεια αναλυτικότερα την οικονομική ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος.

Ας υποθέσουμε ότι μια άλλη επιχείρηση Β προσφέρει στην επιχείρηση Α τη δυνατότητα αποθήκευσης των ποσοτήτων των υλικών $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2$ και Y_3 που επιθυμεί για ένα μήνα έναντι ενός ποσού W. Αυτό, φυσικά, θα έχει ως συνέπεια η επιχείρηση Α να εξετάσει το ενδεχόμενο της μη άμεσης παραγωγής των προϊόντων Π_1 και Π_2 και την αποθήκευση των πρώτων υλών για ένα μήνα. Σε μια τέτοια συναλλαγή, η επιχείρηση Β έχει ως στόχο να μεγιστοποιήσει τα έσοδά της από την αποθήκευση των υλικών. Αντίθετα, η επιχείρηση Α έχει ως στόχο να καταβάλει στην επιχείρηση Β τη μικρότερη δυνατή αμοιβή για τη φύλαξη των υλικών και οπωσδήποτε όχι μεγαλύτερη από το κόστος που θα είχε αν παρήγαγε άμεσα τα προϊόντα Π_1 και Π_2 και τα αποθήκευε για ένα μήνα.

Αν συμβολίσουμε με y_1, y_2, y_3 το μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης για τα υλικά $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2$ και Y_3 αντίστοιχα, τότε το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (4.7)

$$Z = 1500y_1 + 900y_2 + 200y_3$$

με περιορισμούς δομής

$$30y_1 + 5y_2 \le 150$$

$$20y_1 + 25y_2 + 10y_3 \le 250$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$$

Όπως παρατηρούμε, το πρόβλημα αυτό είναι το δυϊκό του αρχικού προβλήματος.

Η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος εκφράζει τη συνολική αμοιβή που απαιτεί η επιχείρηση Β από την επιχείρηση Α για την αποθήκευση των υλικών (ποσότητες αποθήκευσης κάθε πόρου επί το αντίστοιχο μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης).

Οι περιορισμοί δομής εκφράζουν το ανώτατο όριο αμοιβής που είναι διατεθειμένη να καταβάλει η επιχείρηση Α για την αποθήκευση των υλικών της στην επιχείρηση Β. Συγκεκριμένα, το αριστερό μέλος κάθε περιορισμού εκφράζει τη συνολική αμοιβή που ζητεί η επιχείρηση Β για την αποθήκευση των πόρων που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας του αντίστοιχου προϊόντος, ενώ το δεξιό μέλος κάθε περιορισμού εκφράζει το κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας του τελικού αυτού προϊόντος. Προφανώς, η επιχείρηση Α επιδιώκει οι τιμές των αριστερών μελών των περιορισμών να είναι μικρότερες από, ή ίσες με, τις αντίστοιχες τιμές των δεξιών μελών των περιορισμών.

Οι περιορισμοί μη αρνητικότητας εκφράζουν το γεγονός ότι η τιμή που θα απαιτήσει η επιχείρηση Β από την επιχείρηση Α για την αποθήκευση μιας μονάδας κάθε προϊόντος δεν μπορεί να είναι αρνητική.

Ενότητα 4.5

Σχέσεις πρωτεύοντος-δυϊκού

4.5.1 Εισαγωγή

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην ενότητα 4.1, για κάθε πρωτεύον πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί το δυϊκό του, το οποίο αποτελεί μια εναλλακτική θεώρηση του αρχικού προβλήματος και παρέχει σημαντικές πληροφορίες οικονομικού χαρακτήρα σχετικά με τη βέλτιστη λύση του, όπως αναλύθηκε διεξοδικά στην προηγούμενη ενότητα 4.4.

Στις ενότητες 4.2 και 4.3, παρουσιάστηκαν οι κανόνες μετατροπής ενός αρχικού προβλήματος, εκφρασμένου στην κανονική ή στη γενική του μορφή, στο δυϊκό του.

Στην παρούσα ενότητα, θα αναφερθούμε στις σχέσεις μεταξύ ενός πρωτεύοντος και ενός δυϊκού του προβλήματος, αρχίζοντας από τον τρόπο με τον οποίο από τη λύση του πρωτεύοντος μπορούμε να προσδιορίσουμε τη λύση του δυϊκού του.

4.5.2 Εύρεση της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος

Αποδεικνύεται μαθηματικά ότι οι βέλτιστες λύσεις ενός πρωτεύοντος προβλήματος και του δυϊκού του έχουν μια στενή και ειδική σχέση, η οποία δικαιολογεί την ιδιαίτερη σημασία που έχει για το γραμμικό προγραμματισμό η **θεωρία του δυϊσμού** (*duality theory*). Σύμφωνα με το **θεώρημα του ασθενούς δυϊσμού** (*weak duality theorem*), για κάθε ζεύγος εφικτών λύσεων του πρωτεύοντος και του δυϊκού ισχύει: $\mathrm{Z} \leq W$, όπου Z και W είναι οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων για τις λύσεις αυτές αντίστοιχα. Η σχέση $\mathrm{Z} \leq W$ είναι γνωστή και ως **ασθενής δυϊσμός** (*weak duality*). Επιπλέον, σύμφωνα με το **θεώρημα του ισχυρού δυϊσμού** (*strong duality theorem*), αν για κάποιο ζεύγος εφικτών λύσεων του πρωτεύοντος και του δυϊκού ισχύει $\mathrm{Z} = W$, τότε οι εφικτές αυτές λύσεις είναι οι βέλτιστες για κάθε πρόβλημα αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, όταν υπάρχει βέλτιστη λύση για ένα πρωτεύον πρόβλημα, θα υπάρχει βέλτιστη λύση και για το δυϊκό του, και αντίστροφα. Επιπλέον, οι βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων του αρχικού και του δυϊκού προβλήματος, Z και W, ταυτίζονται. Η σχέση $\mathrm{Z} = W$ είναι γνωστή και ως **ισχυρός δυϊσμός** (*strong duality*).

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του ισχυρού δυϊσμού, μπορεί κανείς από τον τελικό πίνακα Simplex του αρχικού προβλήματος να οδηγηθεί στη βέλτιστη λύση του δυϊκού του. Ο τρόπος εύρεσης της λύσης αυτής για τις περιπτώσεις όπου το αρχικό πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του ή στη γενική του μορφή περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια:

Αρχικό πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή.

- Max Z = Min W.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις χαλαρές μεταβλητές του και (είναι οι σκιώδεις τιμές των πόρων του πρωτεύοντος), είναι οι τιμές των μεταβλητών απόφασης του δυϊκού.

- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του, είναι, με αλλαγμένο πρόσημο, οι τιμές των πλεονασματικών μεταβλητών του δυϊκού.

Αρχικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή.

- Min Z = Max W.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις πλεονασματικές/τεχνητές μεταβλητές του, και (είναι οι σκιώδεις τιμές των πόρων του πρωτεύοντος), είναι, με αλλαγμένο πρόσημο στην περίπτωση των πλεονασματικών μεταβλητών, οι τιμές των μεταβλητών απόφασης του δυϊκού.
- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του, είναι οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών του δυϊκού.

Αρχικό πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στη γενική του μορφή.

- Max Z = Min W.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος που αντιστοιχούν:
    - στις χαλαρές μεταβλητές του, είναι οι τιμές των αντίστοιχων μεταβλητών απόφασης του δυϊκού·
    - στις πλεονασματικές/τεχνητές μεταβλητές του, είναι, με αλλαγμένο πρόσημο στην περίπτωση των πλεονασματικών μεταβλητών, οι τιμές των αντίστοιχων μεταβλητών απόφασης του δυϊκού.
- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του, είναι, με αλλαγμένο πρόσημο, οι τιμές των πλεονασματικών μεταβλητών του δυϊκού.

Αρχικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στη γενική του μορφή.

- Min Z = Max W.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος που αντιστοιχούν:

- στις χαλαρές μεταβλητές του, είναι οι τιμές των αντίστοιχων μεταβλητών απόφασης του δυϊκού·
- στις πλεονασματικές/τεχνητές μεταβλητές του είναι, με αλλαγμένο πρόσημο στην περίπτωση των πλεονασματικών μεταβλητών, οι τιμές των αντίστοιχων μεταβλητών απόφασης του δυϊκού.

- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του, είναι οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών του δυϊκού.

Στη συνέχεια, όσα αναφέρθηκαν παραπάνω θα εφαρμοστούν στο ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού προβλήματος που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα 4.4 (Παράδειγμα 4.3) για να παρουσιαστεί η οικονομική ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος.

Παράδειγμα 4.5

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και ο τελικός πίνακας Simplex της λύσης του.

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (4.8)

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Πίνακας 4.2
Τελικός πίνακας Simplex πρωτεύοντος προβλήματος

Βάση		Μεταβλητές						
		3	8	0	0	0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
0	x_1	1	0	1/2	0	-2	100	
0	s_2	0	0	-3	1	10	500	
8	x_2	0	1	0	0	-1	350	

z_j		3	8	3/2	0	2	$Z = 3100$
$c_j - z_j$		0	0	-3/2	0	-2	

Να διατυπωθεί το δυϊκό πρόβλημα και από τον τελικό πίνακα Simplex του πρωτεύοντος προβλήματος να βρεθεί η λύση του.

………...

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή. Ακολουθώντας τους κανόνες μετατροπής της ενότητας 4.2, το αντίστοιχο δυϊκό του πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (4.9)

$$W = 1600y_1 + 1800y_2 + 350y_3$$

με περιορισμούς δομής:

$$2y_1 + 6y_2 \geq 3$$

$$4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 8$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

Ας σημειωθεί ότι το δυϊκό πρόβλημα που διατυπώθηκε βάσει των κανόνων μετατροπής ταυτίζεται, όπως άλλωστε είναι φυσικό, με το δυϊκό πρόβλημα που προέκυψε από το ίδιο το πρωτεύον με βάση την οικονομική ερμηνεία των δεδομένων (Παράδειγμα 4.3).

Από τον τελικό πίνακα Simplex του αρχικού και λαμβάνοντας υπόψη όσα ήδη αναφέρθηκαν στην υποενότητα 4.5.2 για την εύρεση της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- $\text{Max } Z = 3100 = \text{Min } W$. Με άλλα λόγια, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι 3100, δηλαδή ισούται με την αντίστοιχη τιμή του πρωτεύοντος.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος, που αντιστοιχούν στις χαλαρές μεταβλητές του s_1, s_2, s_3, δηλαδή οι τιμές $3/2, 0$ και 2, είναι οι τιμές των μεταβλητών απόφασης του δυϊκού. Άρα: $y_1 = 3/2,\ y_2 = 0,\ y_3 = 2$.
- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του x_1 και x_2, δηλαδή οι τιμές $0, 0$,

είναι, με αλλαγμένο πρόσημο, οι τιμές των πλεονασματικών μεταβλητών του δυϊκού. Άρα: $e_1 = 0$ και $e_2 = 0$.

Ας σημειωθεί ότι η λύση του δυϊκού, όπως προέκυψε από τον τελικό πίνακα Simplex του πρωτεύοντος (Πίνακας 4.2), σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες, επαληθεύεται πλήρως από τον τελικό πίνακα Simplex του δυϊκού προβλήματος (Πίνακας 4.3) στον οποίο καταλήγουμε λύνοντας το δυϊκό πρόβλημα κατά τα γνωστά.

Πίνακας 4.3

Τελικός πίνακας Simplex δυϊκού προβλήματος

Βάση		Μεταβλητές							Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	1600	1800	350	0	0	M	M		
		y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	a_1	a_2		
1600	y_1	1	3	0	-1/2	0	1/2	0	3/2	
350	y_3	0	-10	1	2	-1	-2	1	2	
	z_j	1600	1300	350	-100	-350	100	350	$W = 3100$	
$c_j - z_j$		0	500	0	100	350	M -100	M -350		

Οφείλουμε να υπογραμμίσουμε ότι το πρωτεύον και το δυϊκό πρόβλημα είναι δύο όψεις του ίδιου προβλήματος. Κατά συνέπεια, το «ποιο από τα δύο ορίζεται ως πρωτεύον και ποιο ως δυϊκό» εξαρτάται από την εκάστοτε προσέγγισή μας στο πρόβλημα και η αντιστοίχιση αυτή μπορεί να αντιστραφεί. Άρα, ο τρόπος εύρεσης της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος μπορεί επίσης να εφαρμοστεί, αντίστροφα, και για την εύρεση της λύσης του πρωτεύοντος από τη λύση του δυϊκού.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, το δυϊκό του προηγούμενου παραδείγματος (Πρόβλημα 4.9) θα θεωρηθεί ως πρωτεύον, και από τον τελικό πίνακα Simplex αυτού (Πίνακας 4.3) θα επιχειρηθεί να προσδιοριστεί η λύση του δυϊκού του, που αντιστοιχεί στο πρωτεύον του προηγούμενου παραδείγματος (Πρόβλημα 4.8).

<u>Παράδειγμα 4.6</u>

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού**:**

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$W = 1600y_1 + 1800y_2 + 350y_3$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned} 2y_1 + 6y_2 \quad\quad &\geq 3 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 8 \end{aligned} \tag{4.9}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ y_3 \geq 0$$

Να διατυπωθεί το δυϊκό του, και από τον τελικό πίνακα Simplex του πρωτεύοντος (Πίνακας 4.3) να βρεθεί η λύση του.

………...

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή. Κατά συνέπεια, το δυϊκό του διατυπώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 1600 \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 1800 \\ x_2 &\leq 350 \end{aligned} \tag{4.10}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Από τον τελικό πίνακα Simplex του αρχικού και λαμβάνοντας υπόψη όσα ήδη αναφέρθηκαν στην υποενότητα 4.5.2 για την εύρεση της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- $\text{Min } W = 3100 = \text{Max } Z$. Με άλλα λόγια, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι 3100, δηλαδή ισούται με την αντίστοιχη τιμή του πρωτεύοντος.
- Τα στοιχεία της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του δυϊκού, που αντιστοιχούν στις πλεονασματικές μεταβλητές του e_1 και e_2, δηλαδή οι τιμές -100 και -350, είναι, με αλλαγμένο πρόσημο, οι τιμές των μεταβλητών απόφασης του πρωτεύοντος. Άρα: $x_1 = 100$ και $x_2 = 350$.
- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του δυϊκού, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του y_1, y_2 και y_3, δηλαδή οι τιμές

$0, 500$ και 0, είναι οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών του πρωτεύοντος. Άρα: $s_1 = 0,\ s_2 = 500$ και $s_3 = 0$.

Και στην περίπτωση αυτή, η λύση του δυϊκού όπως προέκυψε από τον τελικό πίνακα Simplex του πρωτεύοντος (Πίνακας 4.3), σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες, επαληθεύεται πλήρως από τον τελικό πίνακα Simplex του δυϊκού προβλήματος (Πίνακας 4.2) στον οποίο καταλήγουμε λύνοντας το δυϊκό πρόβλημα κατά τα γνωστά.

4.6 Η σπουδαιότητα του δυϊκού προβλήματος

Στις προηγούμενες ενότητες αναφερθήκαμε στον τρόπο εύρεσης της λύσης του δυϊκού προβλήματος χωρίς αυτό να λυθεί, από τη λύση του πρωτεύοντος, καθώς και σε κάποιες άλλες σχέσεις μεταξύ πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος. Στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε στην πρακτική χρησιμότητα του δυϊκού προβλήματος, η οποία εστιάζεται κυρίως στα παρακάτω τρία σημεία:

- Το δυϊκό πρόβλημα παρέχει σημαντικές πληροφορίες οικονομικού ενδιαφέροντος για τις μεταβλητές τού υπό μελέτη πρωτεύοντος προβλήματος.
- Πολλές φορές, λόγω της δομής ενός προβλήματος, είναι ευκολότερη από την απευθείας επίλυσή του η διατύπωση και λύση του δυϊκού του και στη συνέχεια, η ανάκτηση από αυτήν της λύσης του πρωτεύοντος.
- Το δυϊκό πρόβλημα βοηθά στον εντοπισμό μιας προσεγγιστικής λύσης τού υπό μελέτη πρωτεύοντος, στην περίπτωση όπου η ακριβής λύση του δεν είναι απαραίτητη ή δεν είναι εύκολο να εντοπιστεί.

Η περίπτωση της άντλησης από το δυϊκό πρόβλημα σημαντικών πληροφοριών οικονομικού ενδιαφέροντος για το υπό μελέτη πρωτεύον πρόβλημα έχει παρουσιαστεί αναλυτικά και διεξοδικά στην ενότητα 4.4.

Η λύση του δυϊκού προβλήματος είναι ευκολότερη από αυτήν του αντίστοιχου πρωτεύοντος, όταν:

- Δεν υπάρχει άμεσα εντοπίσιμη, αρχική βασική εφικτή λύση (όπως, για παράδειγμα, στα προβλήματα ελαχιστοποίησης), οπότε θα πρέπει να τη δημιουργήσουμε.
- Ο αριθμός των περιορισμών του πρωτεύοντος (ο οποίος καθορίζει και τον υπολογιστικό φόρτο για τη λύση ενός προβλήματος) είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των μεταβλητών απόφασής του.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι προτιμότερο να διατυπωθεί και να λυθεί το δυϊκό πρόβλημα και, στη συνέχεια, από τη λύση του να ανακτηθεί η λύση του πρωτεύοντος, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην υποενότητα 4.5.2.

Για τον προσδιορισμό μιας προσεγγιστικής λύσης μέσω του δυϊκού, μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

- Αν η εύρεση της βέλτιστης λύσης του πρωτεύοντος είναι δύσκολη, ενώ, αντίθετα, κάποια λύση του δυϊκού είναι εύκολο να βρεθεί, τότε η λύση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα όριο της βέλτιστης λύσης του πρωτεύοντος. Το όριο αυτό, ανάλογα με την περίπτωση, θα μπορούσε να είναι μια πολύ χρήσιμη πληροφορία για τη λήψη μιας επιχειρηματικής απόφασης.
- Αν η εύρεση της βέλτιστης λύσης, τόσο του πρωτεύοντος όσο και του δυϊκού, είναι δύσκολη, τότε εφαρμόζουμε τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος με τον αλγόριθμο Simplex παράλληλα στο πρωτεύον και στο δυϊκό και υπολογίζουμε τα ζεύγη των τιμών:

$$\left(Z_i, W_i\right) \quad i=1,2,... \tag{4.11}$$

όπου Z_i, W_i είναι οι διαδοχικές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στον *i* Πίνακα Simplex του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα. Επειδή γνωρίζουμε ότι:

$$W_i \geq W_{i+1} \geq Z^* \geq Z_{i+1} \geq Z_i \tag{4.12}$$

όπου Z^* η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος, όταν

$$W_{i+1} - Z_{i+1} < \varepsilon \tag{4.13}$$

όπου ε μια αποδεκτή απόκλιση της προσεγγιστικής από τη βέλτιστη λύση,

τότε: η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος διακόπτεται**,** διότι προφανώς ισχύει:

$$Z^* - Z_{i+1} \leq W_{i+1} - Z_{i+1} < \varepsilon \tag{4.14}$$

Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1/Κεφάλαιο 4

Να επιλεγεί η σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης κάποιος περιορισμός είναι της μορφής $\geq$, τότε η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή:

   (α) Είναι θετική. (β) Είναι μη θετική.

   (γ) Είναι αρνητική. (δ) Δεν περιορίζεται στις τιμές της.

2. Αν σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης κάποιος περιορισμός είναι της μορφής $\leq$, τότε η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή:

   (α) Είναι θετική. (β) Είναι μη θετική.

   (γ) Είναι αρνητική. (δ) Δεν περιορίζεται στις τιμές της.

3. Αν σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης μια μεταβλητή απόφασης είναι μη αρνητική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι της μορφής:

   (α) $\geq$ (β) $\leq$ (γ) $>$ (δ) $=$

4. Αν σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μια μεταβλητή απόφασης δεν περιορίζεται ως προς τις τιμές της, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι της μορφής:

   (α) $\geq$ (β) $\leq$ (γ) $>$ (δ) $=$

<u>Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2/Κεφάλαιο 4</u>

Να ελέγξετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) και ποιες Λανθασμένες (Λ).

1.	Για κάθε ζεύγος εφικτών λύσεων ενός πρωτεύοντος προβλήματος και του δυϊκού του, ισχύει $Z \leq W$, όπου Z και W είναι οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων για τις λύσεις αυτές αντίστοιχα.	(Σ)	(Λ)
2.	Όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, τότε το δυϊκό του είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης.	(Σ)	(Λ)
3.	Όταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης, τότε το δυϊκό του είναι επίσης πρόβλημα ελαχιστοποίησης.	(Σ)	(Λ)
4.	Το δυϊκό πρόβλημα έχει τόσες μεταβλητές απόφασης όσοι είναι και οι περιορισμοί του πρωτεύοντος.	(Σ)	(Λ)
5.	Το δυϊκό πρόβλημα έχει τόσους περιορισμούς όσες είναι και οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος.	(Σ)	(Λ)
6.	Οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυϊκού προβλήματος είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος.	(Σ)	(Λ)
7.	Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δυϊκού είναι οι τεχνολογικοί συντελεστές του πρωτεύοντος.	(Σ)	(Λ)
8.	Αν ένας περιορισμός ενός πρωτεύοντος προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι της μορφής $\geq$, τότε η αντίστοιχη δυϊκή	(Σ)	(Λ)

μεταβλητή είναι αρνητική.

9. Αν ένας περιορισμός του πρωτεύοντος είναι ισότητα, η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή δεν περιορίζεται ως προς τις τιμές της. (Σ) (Λ)

10. Αν μια μεταβλητή απόφασης ενός πρωτεύοντος προβλήματος μεγιστοποίησης είναι μη αρνητική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του δυϊκού είναι της μορφής $\geq$. (Σ) (Λ)

Οι σωστές απαντήσεις δίνονται στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

<u>Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3/Κεφάλαιο 4</u>

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 9x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 9$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Να κατασκευαστεί το δυϊκό του πρόβλημα.

<u>Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4/Κεφάλαιο 4</u>

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 2x_1 + x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 = -3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \in R \text{ δηλαδή } x_2 \in (-\infty, +\infty)$$

Να κατασκευαστεί το δυϊκό του πρόβλημα.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5/Κεφάλαιο 4

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και ο τελικός πίνακας Simplex της λύσης του:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 2x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$3x_1 + 9x_2 \le 45$$

$$2x_1 + x_2 \ge 12$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Τελικός πίνακας Simplex

Βάση		Μεταβλητές						
		x_1	x_2	s_1	e_1	a_1		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	2	8	0	0	-M	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
8	x_2	0	1	2/15	3/15	-3/15	54/15	
2	x_1	1	0	-1/15	-6/10	6/10	21/5	
z_j		2	8	14/15	6/15	-6/15	$Z = 186/5$	
$c_j - z_j$		0	0	-14/15	-6/15	-M+6/15		

Να διατυπωθεί το δυϊκό πρόβλημα, και από τον τελικό πίνακα Simplex του πρωτεύοντος να βρεθεί η λύση του.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 6/Κεφάλαιο 4

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και ο τελικός πίνακας Simplex της λύσης του.

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$4x_1 - x_2 \geq 3$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Τελικός Πίνακας Simplex

<table>
<tr><th colspan="2">Βάση</th><th colspan="5">Μεταβλητές</th><th rowspan="3">Δεξιό μέλος</th><th rowspan="3">Πηλίκο</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Αντικειμενικοί Συντελεστές</th><th rowspan="2">Βασικές Μεταβλητές</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>s_1</th><th>e_1</th><th>a_1</th></tr>
<tr><th>2</th><th>3</th><th>0</th><th>0</th><th>M</th></tr>
<tr><td>0</td><td>s_1</td><td>0</td><td>5/4</td><td>1</td><td>1/4</td><td>-1/4</td><td>13/4</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>x_1</td><td>1</td><td>-1/4</td><td>0</td><td>-1/4</td><td>1/4</td><td>3/4</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">z_j</td><td>2</td><td>-1/2</td><td>0</td><td>-1/2</td><td>1/2</td><td colspan="2" rowspan="2">$Z = 3/2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c_j - z_j$</td><td>0</td><td>7/2</td><td>0</td><td>1/2</td><td>M-1/2</td></tr>
</table>

Να διατυπωθεί το δυϊκό πρόβλημα, και από τον τελικό πίνακα Simplex του πρωτεύοντος να βρεθεί η λύση του.

Οι σωστές απαντήσεις δίνονται στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

ΣΥΝΟΨΗ

Μία από τις πιο σημαντικές διαπιστώσεις που προέκυψαν από τα πρώτα στάδια ανάπτυξης και εξέλιξης του γραμμικού προγραμματισμού είναι η θεωρία του δυϊσμού. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, για κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο ονομάζεται **αρχικό** ή **πρωτεύον πρόβλημα** (*primal problem*), μπορεί να διατυπωθεί ένα αντίστοιχο **δυϊκό πρόβλημα** (*dual problem*), το οποίο σχετίζεται με το «αρχικό» ως προς τη δομή του και το οποίο παρέχει σημαντικές πληροφορίες οικονομικού χαρακτήρα σχετικά με τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος. Το δυϊκό πρόβλημα αποτελεί μια εναλλακτική θεώρηση του «αρχικού» προβλήματος και η ταυτόχρονη προσέγγιση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και με τις δύο αυτές μορφές του βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας και των αλγορίθμων του γραμμικού προγραμματισμού.

Η μελέτη του δυϊκού προβλήματος αποτέλεσε το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου. Στην πρώτη ενότητα, αναφερθήκαμε στη βασική ιδέα και στις γενικές έννοιες του δυϊκού προβλήματος. Στις επόμενες δύο ενότητες, το ενδιαφέρον εστιάστηκε στον τρόπο δημιουργίας του δυϊκού προβλήματος από το πρωτεύον, όταν αυτό είναι διατυπωμένο, αφενός, στην κανονική του και, αφετέρου, στην τυπική του μορφή. Σε κάθε περίπτωση, αρχικά περιγράφηκαν θεωρητικά τα βασικά βήματα της δημιουργίας του δυϊκού από το πρωτεύον και στη συνέχεια εφαρμόστηκαν σε συγκεκριμένα προβλήματα. Στην τέταρτη ενότητα αναφερθήκαμε στις πληροφορίες που μπορεί κανείς να αντλήσει από το δυϊκό πρόβλημα. Προς το σκοπό αυτόν, επιλέχτηκαν δύο από τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες ενότητες, δημιουργήθηκαν τα δυϊκά τους προβλήματα και εξετάστηκαν οι πληροφορίες οικονομικού ενδιαφέροντος που μπορεί κανείς να αντλήσει από αυτά. Στην πέμπτη ενότητα εξετάσαμε τις σχέσεις μεταξύ ενός πρωτεύοντος προβλήματος και του δυϊκού του και, ειδικότερα, τον τρόπο με τον οποίο από τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος μπορεί κανείς να προσδιορίσει τη λύση του δυϊκού του προβλήματος. Και στην περίπτωση αυτή, αρχικά περιγράφηκε η θεωρητική προσέγγιση και στη συνέχεια εφαρμόστηκε σε επιλεγμένα παραδείγματα. Τέλος, στην έκτη ενότητα αναφερθήκαμε στην πρακτική χρησιμότητα του δυϊκού προβλήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Απαντήσεις στις Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1

1	2	3	4
β	β	α	δ

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή. Κατά συνέπεια, το δυϊκό πρόβλημα, το οποίο προκύπτει άμεσα από το πρωτεύον με την εφαρμογή των σχετικών κανόνων και διατυπώνεται παρακάτω, είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$W = 6y_1 + 9y_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$y_1 + 2y_2 \leq 3$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 9$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Όπως παρατηρούμε, το δυϊκό πρόβλημα έχει δύο μεταβλητές απόφασης όσοι δηλαδή είναι και οι περιορισμοί δομής του πρωτεύοντος, καθώς και δύο περιορισμούς, όσες δηλαδή είναι και οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος. Επιπλέον, οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυϊκού προβλήματος είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών δομής του πρωτεύοντος (6, 9), ενώ τα δεξιά μέλη των περιορισμών του (3, 9) είναι οι αντικειμενικοί συντελεστές του πρωτεύοντος.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4

Στην περίπτωση αυτή, το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στη γενική του μορφή. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, το δυϊκό του πρόβλημα μπορεί να δημιουργηθεί με δύο τρόπους:

α΄. Μέσω της κανονικής μορφής του αρχικού.

β΄. Απευθείας από τη γενική μορφή του αρχικού.

Οι δύο τρόποι αυτοί θα παρουσιαστούν στη συνέχεια:

α΄ τρόπος. Ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, όπως το υπό μελέτη, είναι εκφρασμένο στην κανονική του μορφή όταν όλοι οι περιορισμοί δομής του είναι της μορφής $\leq$ και όλες οι μεταβλητές απόφασής του είναι μη αρνητικές ($x_j \geq 0$). Στην προκειμένη περίπτωση, μόνο ο πρώτος περιορισμός ($x_1 + 2x_2 \leq 3$) είναι της μορφής $\leq$. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να μετατραπούν και οι υπόλοιποι περιορισμοί στη μορφή αυτή.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, έχουμε:

$$\begin{array}{lll}
\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 & \text{Max Z} = 2x_1 + x_2 & \text{Max Z} = 2x_1 + x_2 \\
\text{με περιορισμούς:} & \text{με περιορισμούς:} & \text{με περιορισμούς:} \\
x_1 + 2x_2 \le 3 & x_1 + 2x_2 \le 3 & x_1 + 2x_2 \le 3 \\
3x_1 + x_2 = -3 \quad \Leftrightarrow & 3x_1 + x_2 \le -3 \quad \Leftrightarrow & 3x_1 + x_2 \le -3 \\
4\text{ x}_1 + 3x_2 \ge 6 & 3x_1 + x_2 \ge -3 & -3x_1 - x_2 \le 3 \\
 & -4x_1 - 3x_2 \le -6 & -4x_1 - 3x_2 \le -6 \\
x_1 \ge 0, x_2 \in R & x_1 \ge 0, x_2 \in R & x_1 \ge 0, x_2 \in R
\end{array}$$

Παρά τη μετατροπή των περιορισμών δομής στη μορφή $\le$, το πρόβλημα δεν είναι διατυπωμένο ακόμα στην κανονική του μορφή, επειδή $x_2 \in R$. Για να το μετατρέψουμε στην κανονική του μορφή, η μεταβλητή x_2 θα πρέπει να εκφραστεί ως διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών x_2', x_2'', δηλαδή $x_2 = x_2' - x_2'' \ge 0$. Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$\begin{array}{ll}
\text{Max } Z = 2x_1 + x_2' - x_2'' & \text{Max } Z = 2x_1 + x_2' - x_2'' \\
\text{με περιορισμούς:} & \text{με περιορισμούς:} \\
x_1 + 2\left(x_2' - x_2''\right) \le 3 & x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \le 3 \\
3x_1 + \left(x_2' - x_2''\right) \le -3 \quad \Leftrightarrow & 3x_1 + x_2' - x_2'' \le -3 \\
-3x_1 - \left(x_2' - x_2''\right) \le 3 & -3x_1 - x_2' + x_2'' \le 3 \\
-4x_1 - 3\left(x_2' - x_2''\right) \le -6 & -4x_1 - 3x_2' + 3x_2'' \le -6 \\
x_1, x_2', x_2'' \ge 0 & x_1, x_2', x_2'' \ge 0
\end{array}$$

Έχοντας μετατρέψει το πρωτεύον πρόβλημα στην κανονική του μορφή, μπορούμε να κατασκευάσουμε το δυϊκό του πρόβλημα με βάση τους κανόνες της ενότητας 4.2:

$$\begin{array}{l}
\text{Min } W = 3y_1 - 3y_2 + 3y_3 - 6y_4 \\
\text{με περιορισμούς:} \\
y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 4y_4 \ge 2 \\
2y_1 + y_2 - y_3 - 3y_4 \ge 1 \\
-2y_1 - y_2 + y_3 + 3y_4 \ge -1 \\
y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0
\end{array}$$

Παρατηρώντας ότι οι δύο τελευταίοι περιορισμοί ισοδυναμούν με περιορισμό ισότητας, έχουμε:

$$\begin{array}{l}
\text{Min } W = 3y_1 - 3y_2 + 3y_3 - 6y_4 \\
\text{με περιορισμούς:} \\
y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 4y_4 \ge 2 \\
2y_1 + y_2 - y_3 - 3y_4 = 1 \\
y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0
\end{array}$$

Όπως παρατηρούμε, το δυϊκό πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στην κανονική του μορφή.

β΄ τρόπος. Εναλλακτικά, το δυϊκό πρόβλημα μπορεί να κατασκευαστεί απευθείας από το πρωτεύον, εκφρασμένο στη γενική του μορφή, σύμφωνα με τους κανόνες της ενότητας 4.3.

Στην προκειμένη περίπτωση, η πρώτη μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος (x_1) είναι μη αρνητική, ενώ η δεύτερη (x_2) δεν περιορίζεται ως προς το πρόσημό της. Κατά συνέπεια, ο πρώτος περιορισμός του δυϊκού θα είναι της μορφής $\geq$, ενώ ο δεύτερος ισότητα.

Επιπλέον:

- Ο πρώτος περιορισμός του πρωτεύοντος ($x_1 + 2x_2 \leq 3$) είναι της μορφής $\leq$ και, κατά συνέπεια, η πρώτη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού θα είναι μη αρνητική ($y_1 \geq 0$).
- Ο δεύτερος περιορισμός του πρωτεύοντος ($3x_1 + x_2 = -3$) είναι ισότητα και, επομένως, η δεύτερη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού δεν θα περιορίζεται ως προς το πρόσημό της ($y_2 \in R$).
- Τέλος, ο τελευταίος περιορισμός του πρωτεύοντος ($4x_1 + 2x_2 \geq 6$) είναι της μορφής $\geq$ και, επομένως, η τρίτη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού θα είναι μη θετική ($y_3 \leq 0$).

Κατά συνέπεια, το δυϊκό πρόβλημα, που κατασκευάζεται σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι το ακόλουθο:

Min $W = 3y_1 - 3y_2 + 6y_3$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 &= 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in R, y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Το ερώτημα που φυσιολογικά τίθεται μετά την ανάλυση των δύο τρόπων μετατροπής είναι αν τα δύο δυϊκά προβλήματα που κατασκευάστηκαν με τις δύο εναλλακτικές μεθόδους είναι ισοδύναμα. Η απάντηση είναι καταφατική και αποδεικνύεται αν φέρουμε και τα δύο δυϊκά προβλήματα στην κανονική τους μορφή.

Το πρώτο είναι διατυπωμένο στην κανονική του μορφή και, κατά συνέπεια, δεν χρειάζεται καμία περαιτέρω παρέμβαση. Αντίθετα, το δεύτερο είναι διατυπωμένο στην κανονική του μορφή όσον αφορά τους περιορισμούς, αλλά χρειάζεται κάποιες μετατροπές στις μεταβλητές του ώστε να είναι όλες μη αρνητικές.

Η y_3 είναι μη θετική και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να αντικατασταθεί από τη μεταβλητή $y_3{}' = -y_3 \geq 0$.

Η $y_2 \in R$ και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να εκφραστεί ως διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών $y_2{}'$ και $y_2{}''$. Άρα: $y_2 = y_2{}' - y_2{}'' \geq 0$.

Τέλος, η y_1 είναι ήδη μη αρνητική ($\geq$ 0).

Άρα, το δυϊκό πρόβλημα της δεύτερης περίπτωσης στην κανονική του μορφή είναι το ακόλουθο:

Min $W = 3y_1 - 3y_2' + 3y_2'' - 6y_3'$

με περιορισμούς:

$$
\begin{aligned}
y_1 + 3y_2' - 3y_2'' - 4y_3' &\geq 2 \\
2y_1 + y_2' - y_2'' - 3y_3' &= 1 \\
y_1, y_2', y_2'', y_3' &\geq 0
\end{aligned}
$$

Παρατηρώντας τα δύο δυϊκά προβλήματα στην κανονική τους μορφή, διαπιστώνουμε ότι είναι ισοδύναμα και ότι η μόνη διαφορά τους αφορά τα σύμβολα των μεταβλητών τους.

<u>Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5</u>

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης εκφρασμένο στη γενική του μορφή.

Το αντίστοιχο δυϊκό του πρόβλημα διατυπώνεται, κατά τα γνωστά, ως εξής:

$\mathrm{M}inW = 45y_1 + 12y_2$

με περιορισμούς

$$
\begin{aligned}
3y_1 + 2y_2 &\geq 2 \\
9y_1 + 1y_2 &\geq 8 \\
y_1 \geq 0, y_2 &\leq 0
\end{aligned}
$$

Από τον τελικό πίνακα Simplex του αρχικού και λαμβάνοντας υπόψη όσα ήδη αναφέρθηκαν στην υποενότητα 4.5.2 για την εύρεση της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- $\mathrm{Min}\,W = 186/5 = \mathrm{Max}\,Z$. Με άλλα λόγια, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι 186/5, δηλαδή ισούται με την αντίστοιχη τιμή του πρωτεύοντος.
- Το στοιχείο της σειράς z_j του τελικού Πίνακα Simplex του πρωτεύοντος που αντιστοιχεί στη χαλαρή μεταβλητή του s_1, δηλαδή το στοιχείο 14/15, είναι η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής απόφασης του δυϊκού. Επιπλέον, το στοιχείο της ίδιας σειράς που αντιστοιχεί στη πλεονασματική μεταβλητή e_1, δηλαδή το στοιχείο $6/15$, είναι, με αλλαγμένο πρόσημο, η τιμή της δεύτερης μεταβλητής απόφασης του δυϊκού. Άρα: $y_1 = 14/15, y_2 = -6/15$.
- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του x_1 και x_2, δηλαδή τα στοιχεία 0, 0, είναι οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών του δυϊκού. Άρα: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$.

<u>Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 6</u>

Το υπό μελέτη πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης εκφρασμένο στη γενική του μορφή.

Το αντίστοιχο δυϊκό του πρόβλημα διατυπώνεται, κατά τα γνωστά, ως εξής:

$$\mathrm{Max}\,W = 4y_1 + 3y_2$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} y_1 + 4y_2 &\geq 2 \\ y_1 - y_2 &\leq 3 \\ y_1 \leq 0,\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Από τον τελικό πίνακα Simplex του αρχικού και λαμβάνοντας υπόψη όσα ήδη αναφέρθηκαν στην υποενότητα 4.5.2 για την εύρεση της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- $\mathrm{Max}\,W = 3/2 = \mathrm{Min}\,Z$. Με άλλα λόγια, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι $3/2$, δηλαδή ισούται με την αντίστοιχη τιμή του πρωτεύοντος.
- Το στοιχείο της σειράς z_j του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος που αντιστοιχεί στη χαλαρή μεταβλητή του s_1, δηλαδή το στοιχείο 0, είναι η τιμή της

αντίστοιχης μεταβλητής απόφασης του δυϊκού. Επιπλέον, το στοιχείο της ίδιας σειράς που αντιστοιχεί στη πλεονασματική μεταβλητή e_1, δηλαδή το στοιχείο $-1/2$ είναι, με αλλαγμένο πρόσημο, η τιμή της δεύτερης μεταβλητής απόφασης του δυϊκού. Άρα: $y_1 = 0, y_2 = 1/2$.

- Τα στοιχεία της σειράς $c_j - z_j$ του τελικού πίνακα Simplex του πρωτεύοντος που αντιστοιχούν στις μεταβλητές απόφασής του x_1 και x_2, δηλαδή τα στοιχεία 0, 7/2, είναι οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών του δυϊκού. Άρα: $s_1 = 0$, $s_2 = 7/2$.