ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΙΕΡΗΣΕΩΝ

Εργαστήριο
Ποσοτικών Μεθόδων

Σημειώσεις

Επιχειρησιακής Έρευνας

Κεφάλαιο 2

Β.Α. Αγγελής

Χίος, 2008

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Ενότητα 2.1

Μεθοδολογία επίλυσης

2.1.1 Θεωρητικό πλαίσιο

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τη μεθοδολογία της **γραφικής επίλυσης** (*graphical solution*) ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Η γραφική επίλυση είναι πρακτικά δυνατή μόνο όταν το μοντέλο έχει δύο μεταβλητές απόφασης, καθώς τότε μόνο είναι πρακτικά δυνατή η γραφική παράσταση στο επίπεδο της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών του. Η χρήση της για την επίλυση προβλημάτων με τρεις μεταβλητές είναι θεωρητικά δυνατή, αλλά στην πράξη σπάνια χρησιμοποιείται λόγω της δυσκολίας της γραφικής απεικόνισης των περιορισμών και της αντικειμενικής συνάρτησης στον τρισδιάστατο χώρο. Για την επίλυση μοντέλων με περισσότερες από δύο μεταβλητές, θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Simplex, η οποία θα παρουσιαστεί σε επόμενη ενότητα.

Τα βήματα που ακολουθούνται για τη γραφική επίλυση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού είναι τα ακόλουθα:

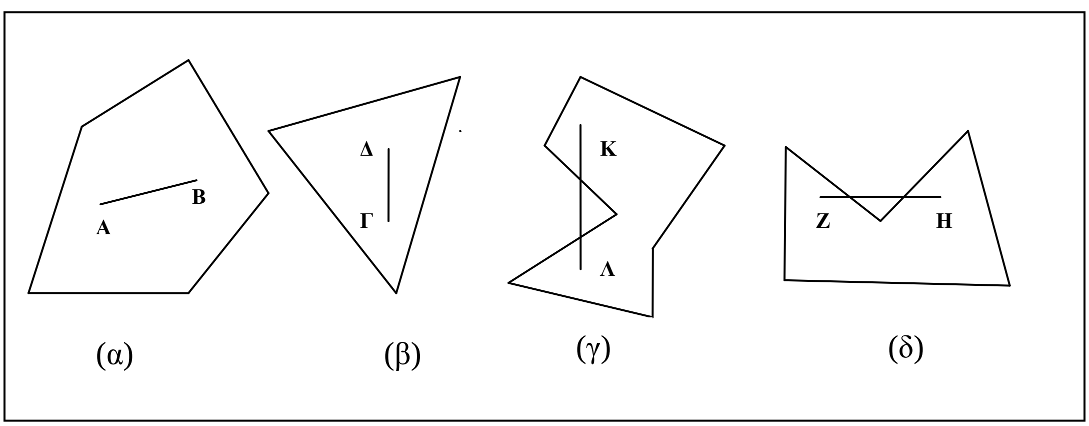
1. Κατασκευάζουμε ένα δισδιάστατο σύστημα αξόνων, στον οριζόντιο άξονα του οποίου λαμβάνει τιμές η μεταβλητή x_1, ενώ στον κατακόρυφο άξονά του η μεταβλητή x_2.
2. Στο σύστημα αξόνων που κατασκευάστηκε, απεικονίζουμε γραφικά όλους τους περιορισμούς. Συγκεκριμένα, για κάθε περιορισμό:

   α. Αντικαθιστούμε την ανίσωση που τον εκφράζει με την αντίστοιχη εξίσωση.

   β. Χαράσσουμε την ευθεία που αντιστοιχεί στην εξίσωση αυτή. Η ευθεία αυτή ονομάζεται **περιοριστική ευθεία** (*binding line*).

   Η σειρά γραφικής απεικόνισης των περιορισμών δεν επηρεάζει τη λύση του προβλήματος.

3. Εντοπίζουμε την περιοχή στην οποία ισχύει κάθε περιορισμός. Για το σκοπό αυτόν, επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο και εξετάζουμε αν επαληθεύει τον περιορισμό. Στην περίπτωση όπου τον επαληθεύει, ο περιορισμός ισχύει στο ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο, ενώ, στην αντίθετη περίπτωση, ισχύει στο συμπληρωματικό ημιεπίπεδο. Το σημείο που συνήθως επιλέγεται είναι η αρχή των αξόνων Ο (0,0), εκτός από την περίπτωση όπου η περιοριστική ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε επιλέγεται ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο.
4. Προσδιορίζουμε την περιοχή στην οποία συναληθεύουν όλοι οι περιορισμοί. Η περιοχή αυτή ονομάζεται **εφικτή περιοχή** (*feasible region*) και περιλαμβάνει το **σύνολο των εφικτών λύσεων** (*feasible solutions*) του προβλήματος. Γενικά, η εφικτή περιοχή είναι ένα **κυρτό πολύγωνο** (*convex polygon*), δηλαδή ένα πολύγωνο όπου κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει δύο σημεία του, Α και Β, βρίσκεται ολόκληρο μέσα σε αυτό (Σχήμα 2.1). Όμως, σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, τις οποίες θα εξετάσουμε αναλυτικά στις επόμενες ενότητες, η εφικτή περιοχή μπορεί είτε να επεκτείνεται επ’ άπειρον προς ορισμένη κατεύθυνση, οπότε ονομάζεται **μη φραγμένη εφικτή περιοχή** (*unbounded feasible region*), είτε να είναι το **κενό σύνολο** (*empty set*).



Σχήμα 2.1
Κυρτά (α, β) και μη κυρτά (γ, δ) πολύγωνα.

5. Προσδιορίζουμε τη **βέλτιστη λύση** (*optimum solution*). Στη γενική περίπτωση όπου η εφικτή περιοχή είναι ένα κυρτό πολύγωνο, αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη λύση είναι μία από τις κορυφές του πολυγώνου και ο προσδιορισμός της μπορεί

να γίνει με μία από τις δύο μεθόδους που περιγράφονται στη συνέχεια. Η αντιμετώπιση των ειδικών περιπτώσεων (μη φραγμένης εφικτής περιοχής, κενού συνόλου) θα εξεταστεί σε επόμενη ενότητα.

Μέθοδος 1

i. Δίνουμε μιαν αυθαίρετη τιμή στο Z και χαράσσουμε την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει στο σύστημα των αξόνων που έχουμε δημιουργήσει.
ii. Αν η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης τέμνει την εφικτή περιοχή, τη μετακινούμε παράλληλα, αντίθετα από την αρχή των αξόνων όταν έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης, ή προς την αρχή των αξόνων όταν έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, και εντοπίζουμε την τελευταία **κορυφή ή ακραίο σημείο** (*vertex/extreme point*) του πολυγώνου που συναντά πριν εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή. Αντίστοιχα, αν η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης βρίσκεται εκτός της εφικτής περιοχής, τη μετακινούμε παράλληλα έτσι ώστε να τέμνει την εφικτή περιοχή και εργαζόμαστε όπως αναφέραμε παραπάνω.
iii. Εντοπίζουμε την τελευταία κορυφή του πολυγώνου από την οποία διέρχεται η παράλληλα μετατοπισμένη ευθεία προτού εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή.
iv. Με τη βοήθεια των δύο περιοριστικών ευθειών που καθορίζουν την κορυφή αυτή, προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες της, οι οποίες είναι και οι βέλτιστες τιμές των δύο μεταβλητών απόφασης.
v. Υπολογίζουμε τη βέλτιστη τιμή για το Z, αντικαθιστώντας τις βέλτιστες τιμές των δύο μεταβλητών απόφασης στην αντικειμενική συνάρτηση.

Μέθοδος 2

i. Με τη βοήθεια των περιοριστικών ευθειών ανά ζεύγη, οι οποίες καθορίζουν τις κορυφές του πολυγώνου, προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών αυτών.
ii. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες κάθε κορυφής στην αντικειμενική συνάρτηση, υπολογίζουμε την τιμή του Z για κάθε κορυφή.
iii. Επιλέγουμε την κορυφή που δίνει τη βέλτιστη τιμή στο Z. Οι συντεταγμένες της αποτελούν τις βέλτιστες τιμές των δύο μεταβλητών απόφασης.

Η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην ενότητα αυτή θα εφαρμοστεί στη συνέχεια για τη γραφική επίλυση δύο προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, εκ των οποίων το ένα είναι **πρόβλημα μεγιστοποίησης** (*maximization problem*) και το άλλο **πρόβλημα ελαχιστοποίησης** (*minimization problem*).

2.1.2 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτό που διατυπώθηκε στην ενότητα 1.4.1, εκφράστηκε ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού και διαπιστώθηκε ότι πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις για την επίλυσή του ως μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Κατά συνέπεια, μπορούμε να προχωρήσουμε στη γραφική του επίλυση σύμφωνα με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε παραπάνω.

⇒ Το πρώτο βήμα είναι η κατασκευή ενός δισδιάστατου συστήματος αξόνων, στον οριζόντιο άξονα του οποίου λαμβάνει τιμές η μεταβλητή x_1 και στον κατακόρυφό του άξονα η μεταβλητή x_2. Επειδή όμως στο συγκεκριμένο πρόβλημα ισχύει για τις μεταβλητές απόφασης ο περιορισμός της μη αρνητικότητας (δηλαδή: $x_1,\ x_2 \geq 0$), θα περιοριστούμε στο πρώτο τεταρτημόριο του συστήματος των αξόνων, το οποίο αντιστοιχεί στους θετικούς ημιάξονες.

⇒ Το δεύτερο βήμα είναι η γραφική απεικόνιση όλων των περιορισμών στο σύστημα των αξόνων. Όπως ήδη αναφέρθηκε, για κάθε περιορισμό αντικαθιστούμε την ανίσωση με την αντίστοιχη εξίσωση και χαράσσουμε την ευθεία που αντιστοιχεί σε αυτήν. Έτσι:

- Η εξίσωση της ευθείας που αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό είναι η $2x_1 + 4x_2 = 1600$ και τη χαράσσουμε αφού προσδιορίσουμε δύο σημεία της:
  - Για $x_1 = 0$, έχουμε: $4x_2 = 1600 \rightarrow x_2 = 400$

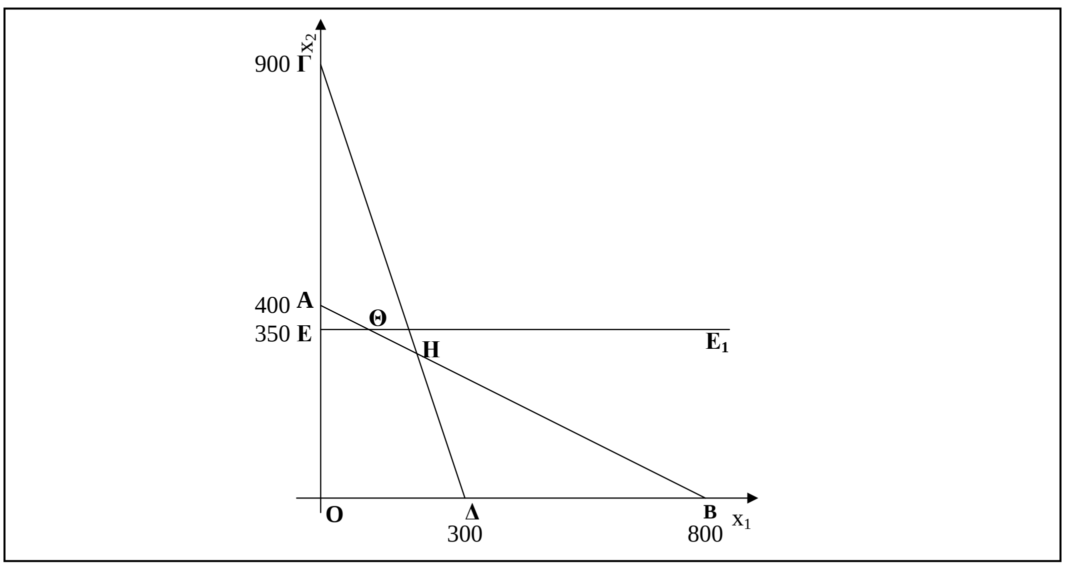
    Άρα, ένα σημείο της είναι το **Α** ($x_1 = 0$, $x_2 = 400$)
  - Αντίστοιχα, για $x_2 = 0$, έχουμε: $2x_1 = 1600 \rightarrow x_1 = 800$

    Άρα, ένα δεύτερο σημείο της είναι το **Β** ($x_1 = 800$, $x_2 = 0$).

Κατά συνέπεια, η ζητούμενη ευθεία είναι η ΑΒ, που διέρχεται από τα σημεία Α $(0,\ 400)$ και Β $(800,\ 0)$. Προφανώς, εμείς χαράσσουμε μόνο το ευθύγραμμο τμήμα της ΑΒ, το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

- Με τον ίδιο τρόπο χαράσσουμε την ευθεία ΓΔ, που αντιστοιχεί στο δεύτερο περιορισμό $\left(6x_1 + 2x_2 = 1800\right)$ αφού προσδιορίσουμε δύο σημεία της, έστω Γ $\left(x_1 = 0,\ x_2 = 900\right)$ και Δ$\left(x_1 = 300,\ x_2 = 0\right)$.
- Τέλος, η ευθεία που αντιστοιχεί στον τρίτο περιορισμό $\left(x_2 = 350\right)$ είναι η ευθεία EE_1, παράλληλη προς τον άξονα x_1 που τέμνει τον άξονα των x_2 στο σημείο Ε $(x_1 = 0, x_2 = 350)$.

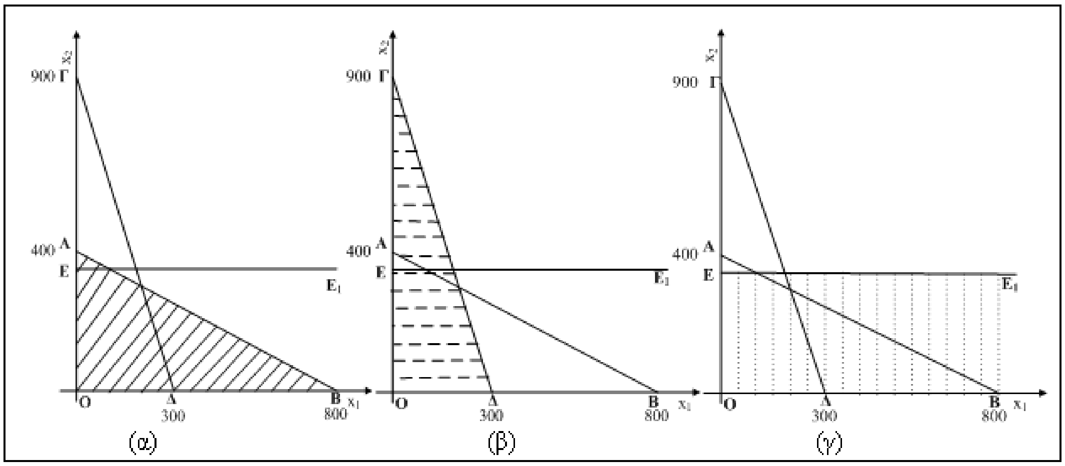
Η γραφική απεικόνιση των παραπάνω περιορισμών φαίνεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2
Γραφική απεικόνιση των περιορισμών

⇒ Το τρίτο βήμα είναι ο προσδιορισμός της περιοχής στην οποία ισχύει, δηλαδή επαληθεύεται, κάθε περιορισμός. Για τα λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε, όπως αναφέρθηκε, την αρχή των αξόνων Ο $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$. Συγκεκριμένα, αντικαθιστούμε τις τιμές $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ στο αριστερό μέλος κάθε περιορισμού και εξετάζουμε αν αληθεύει. Στην περίπτωση όπου αληθεύει, τότε ο περιορισμός ισχύει για το ημιεπίπεδο που περιέχει την αρχή των αξόνων, ενώ, στην αντίθετη περίπτωση, ισχύει για το συμπληρωματικό ημιεπίπεδο. Έτσι:

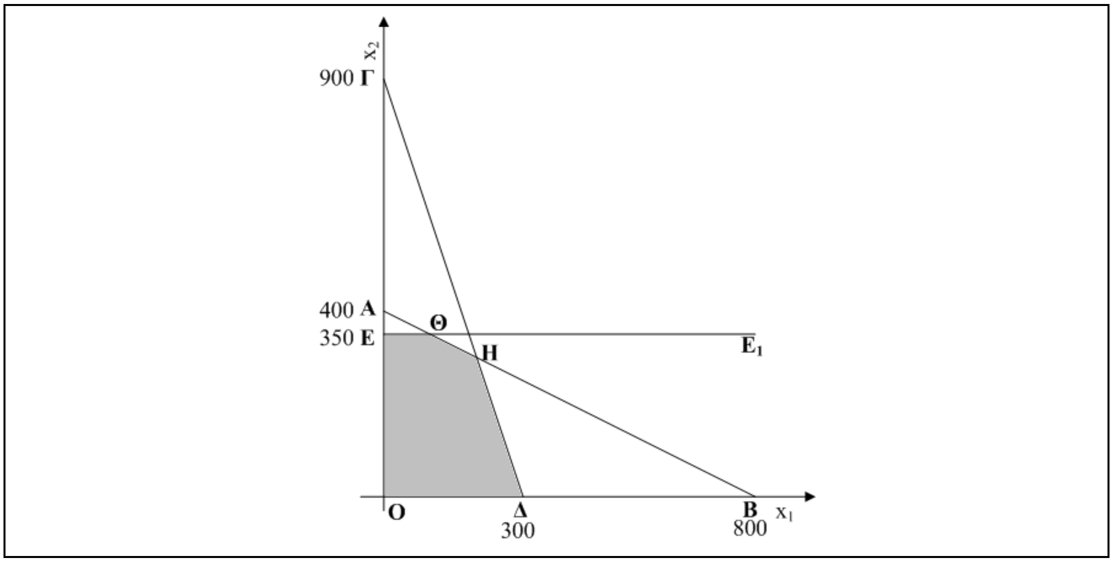
- αντικαθιστώντας $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ **στο αριστερό μέλος του πρώτου περιορισμού**, έχουμε: $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \leq 1600$ ή $0 \leq 1600$. Η σχέση αυτή αληθεύει και, κατά συνέπεια, ο περιορισμός ισχύει για το ημιεπίπεδο που περιέχει την αρχή των αξόνων και το οποίο στο Σχήμα 2.3 (α) σημειώνεται με γραμμοσκίαση. Το συμπληρωματικό του ημιεπίπεδο, όπου ο περιορισμός δεν ισχύει, παραμένει λευκό.



Σχήμα 2.3
Περιοχές επαλήθευσης των περιορισμών

- Με τον ίδιο τρόπο, προσδιορίζεται η περιοχή στην οποία επαληθεύεται ο δεύτερος περιορισμός (Σχήμα 2.3 (β)) και ο τρίτος περιορισμός (Σχήμα 2.3 (γ)).

⇒ Το τέταρτο βήμα είναι ο προσδιορισμός της εφικτής περιοχής, δηλαδή της περιοχής στην οποία ισχύουν όλοι οι περιορισμοί και η οποία περιλαμβάνει το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.4, η εφικτή περιοχή είναι το γραμμοσκιασμένο τμήμα του πρώτου τεταρτημορίου, δηλαδή το **κυρτό πολύγωνο** ΟΕΘΗΔ. Καθένα από τα σημεία Ο, Ε, Θ, Η, Δ ονομάζεται **κορυφή** της εφικτής περιοχής και είναι το σημείο τομής δύο περιοριστικών ευθειών. Οι κορυφές του πολυγώνου και τα ευθύγραμμα τμήματα που τις συνδέουν, δηλαδή οι **πλευρές** ή οι **ακμές** (*edges*) του πολυγώνου, ανήκουν στην εφικτή περιοχή και, επιπλέον, επάνω στα ευθύγραμμα αυτά τμήματα οι περιορισμοί ισχύουν ως ισότητες.



Σχήμα 2.4
Προσδιορισμός της εφικτής περιοχής

⇒ Το πέμπτο και τελευταίο βήμα είναι ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης μεταξύ των εφικτών λύσεων του προβλήματος. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η βέλτιστη λύση είναι μία από τις κορυφές του πολυγώνου και μπορεί να προσδιοριστεί με μία από τις δύο παρακάτω μεθόδους:

Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο:

- Λύνουμε την αντικειμενική συνάρτηση $Z = 3x_1 + 8x_2$ ως προς x_2 και έχουμε:

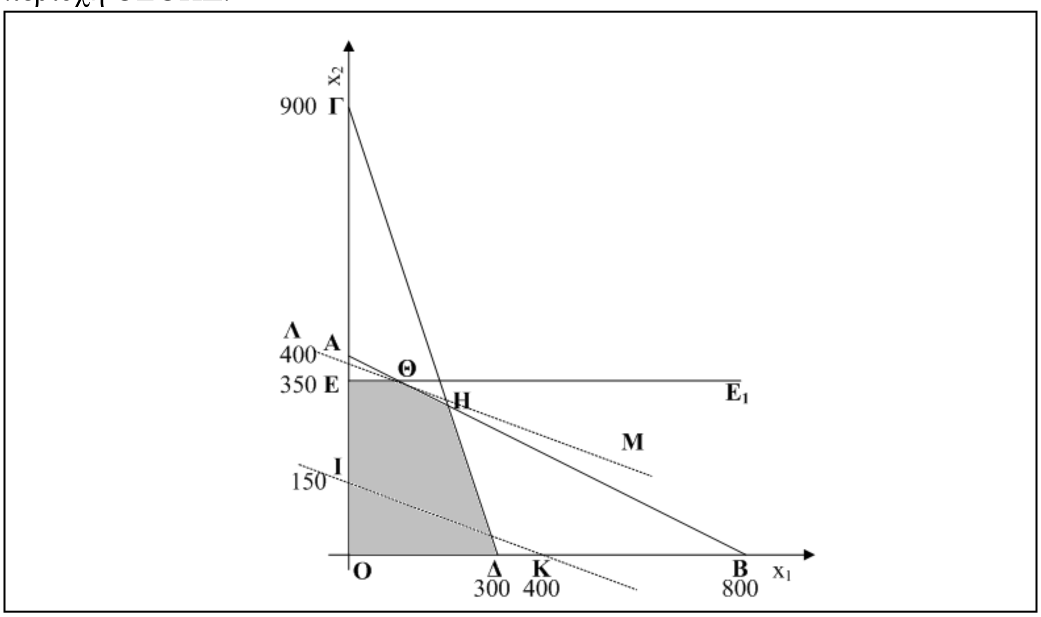
$$-8x_2 = 3x_1 - Z \rightarrow 8x_2 = -3x_1 + Z \rightarrow x_2 = -\frac{3}{8}x_1 + \frac{Z}{8} \qquad (2.1)$$

Η συνάρτηση αυτή εκφράζει μια ευθεία με **κλίση** (*gradient/slope*) -3/8, η οποία τέμνει τον άξονα των x_2 στο σημείο $Z/8$. Δίνοντας στο Z διάφορες τιμές, δημιουργούμε μια οικογένεια παράλληλων ευθειών με κλίση -3/8, οι οποίες ονομάζονται **ισοσταθμικές** (*contours*) και τέμνουν τον άξονα των x_2 σε διαφορετικά σημεία. Προφανώς, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του Z, τόσο περισσότερο απομακρύνεται η ευθεία από την αρχή των αξόνων. Αντίθετα, όσο μικρότερη είναι η τιμή του Z, τόσο περισσότερο πλησιάζει στην αρχή των αξόνων. Οι ευθείες αυτές για διάφορες τιμές του Z, στην περίπτωση προβλημάτων μεγιστοποίησης, αναφέρονται και ως **ευθείες ίσου κέρδους** (*isoprofit lines*).

- Δίνουμε στο Z μια αυθαίρετη τιμή, αλλά μέσα στο πλαίσιο της αριθμητικής κλίμακας που χρησιμοποιείται στους άξονες, έστω $Z = 1200$. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

$$3x_1 + 8x_2 = 1200 \quad \rightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{8}x_1 + \frac{1200}{8} \tag{2.2}$$

- Χαράσσουμε την ευθεία ΙΚ της αντικειμενικής συνάρτησης για $Z = 1200$, αφού προσδιορίσουμε δύο σημεία της, έστω Ι (0, 150) και Κ (400,0). Προφανώς, εμείς χαράσσουμε μόνο το ευθύγραμμο τμήμα της ΙΚ, το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο (Σχήμα 2.5).
- Μετακινούμε παράλληλα το ευθύγραμμο τμήμα ΙΚ αντίθετα από την αρχή των αξόνων, εφόσον πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης του Ζ, οπότε δημιουργείται η οικογένεια των ευθειών ίσου κέρδους. Παρατηρούμε ότι η κορυφή Θ είναι η τελευταία από την οποία διέρχεται η παράλληλα μετατοπισμένη ευθεία ΙΚ, όταν φτάσει στη θέση ΛΜ και προτού εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή ΟΕΘΗΔ.



Σχήμα 2.5
Προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης

- Η κορυφή Θ που εντοπίστηκε παραπάνω αποτελεί την τομή των περιοριστικών ευθειών

$$x_2 = 350 \text{ και } 2x_1 + 4x_2 = 1600$$

Κατά συνέπεια, **οι συντεταγμένες της**, όπως προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των δύο αυτών εξισώσεων, είναι: $x_1 = 100$ **και** $x_2 = 350$ **και αποτελούν και τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης** x_1 **και** x_2 **αντίστοιχα**.

- Αντικαθιστώντας τις βέλτιστες αυτές τιμές των μεταβλητών απόφασης x_1 και x_2 στην αντικειμενική συνάρτηση, έχουμε:

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \rightarrow Z = 3 \cdot 100 + 8 \cdot 350 \rightarrow Z = 300 + 2800 \rightarrow Z = 3100 \qquad (2.3)$$

Η τιμή αυτή του Ζ αποτελεί τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο:

- Για κάθε κορυφή της εφικτής περιοχής ΟΕΘΗΔ εντοπίζουμε το ζεύγος των περιοριστικών ευθειών που την ορίζουν και, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους, υπολογίζουμε τις συντεταγμένες της.
- Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες κάθε κορυφής, που υπολογίστηκαν παραπάνω, στην αντικειμενική συνάρτηση, υπολογίζουμε την τιμή του Ζ για κάθε κορυφή. Οι συντεταγμένες κάθε κορυφής της εφικτής περιοχής και οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης συνοψίζονται στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1
Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης σε όλες τις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	**Συντεταγμένες** (x_1, x_2)	**Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης** $Z = 3x_1 + 8x_2$
Ο	(0,0)	$Z = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$
Ε	(0,350)	$Z = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 350 = 2800$
Θ	(100,350)	$Z = 3 \cdot 100 + 8 \cdot 350 = 3100$
Η	(200,300)	$Z = 3 \cdot 200 + 8 \cdot 300 = 3000$
Δ	(300,0)	$Z = 3 \cdot 300 + 8 \cdot 0 = 900$

- Με βάση τα στοιχεία που υπολογίστηκαν παραπάνω, επιλέγουμε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος, **η οποία αντιστοιχεί στην κορυφή Θ**, όπου η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή. Σύμφωνα με τη λύση αυτή, οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι $x_1 = 100$ και $x_2 = 350$ αντίστοιχα, ενώ η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι Z =3100.

- Η λύση αυτή, εκφρασμένη σε όρους του προβλήματος, σημαίνει ότι η βιομηχανική μονάδα θα πρέπει να παράγει κάθε μέρα $x_1 = 100$ μονάδες από το προϊόν Π_1 και $x_2 = 350$ μονάδες από το προϊόν Π_2, η διάθεση των οποίων θα της αποφέρει συνολικό κέρδος $Z = 3100$ χρηματικές μονάδες.

Μετά την ολοκλήρωση της επίλυσης τού υπό μελέτη προβλήματος μεγιστοποίησης ας υποθέσουμε ότι σε αυτό υπήρχε ένας ακόμη περιορισμός δομής: $x_1 + x_2 \le 600$. Στην περίπτωση αυτή, το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού του προβλήματος θα ήταν διατυπωμένο ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (2.4)

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

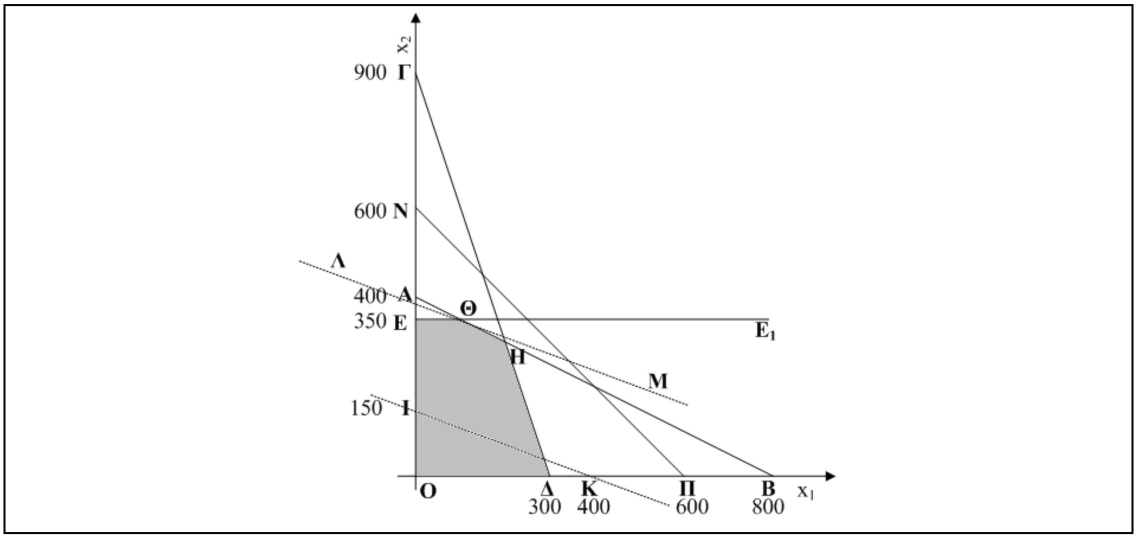
με περιορισμούς δομής:

$$2x_1 + 4x_2 \le 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 1800$$
$$x_1 + x_2 \le 600$$
$$x_2 \le 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \ge 0$$

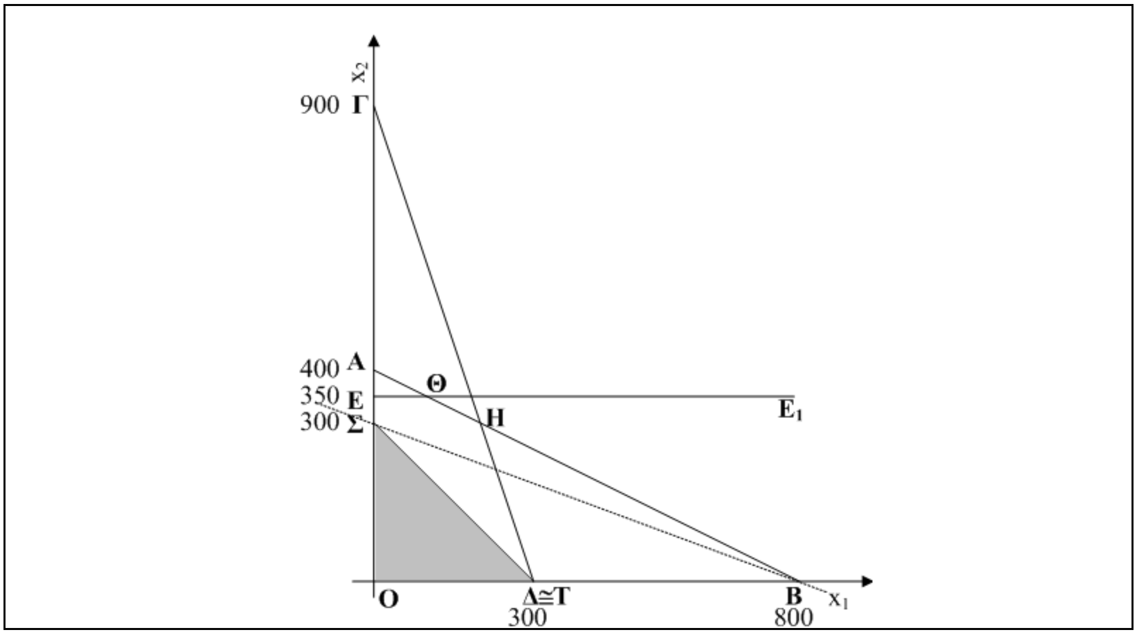
Σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί, πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις για την επίλυση του προβλήματος ως μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού και προχωρούμε στη γραφική του επίλυση, ακολουθώντας τη μεθοδολογία που ήδη παρουσιάστηκε. Η γραφική επίλυση του προβλήματος, κατά τα γνωστά, μας οδηγεί στο Σχήμα 2.6. Το Σχήμα αυτό ταυτίζεται με το Σχήμα 2.5, αφού δεν υπάρχει καμία αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση και στους υπάρχοντες περιορισμούς, με μόνη προσθήκη το νέο περιορισμό $\left(x_1 + x_2 \le 600\right)$, ο οποίος απεικονίζεται με την ευθεία ΝΠ.



Σχήμα 2.6
Γραφική απεικόνιση του προβλήματος με την προσθήκη του νέου περιορισμού

Όπως παρατηρούμε, ο νέος περιορισμός όχι μόνο δεν συμμετέχει στον προσδιορισμό της βέλτιστης κορυφής, αλλά επιπλέον δεν επηρεάζει και την εφικτή περιοχή, καθώς βρίσκεται εξολοκλήρου έξω από αυτήν. Ένας τέτοιος περιορισμός ονομάζεται **πλεονάζων περιορισμός** (*redundant constraint*).

Το γεγονός ότι ένας περιορισμός είναι πλεονάζων δεν τον καθιστά περιττό για τη μελέτη του προβλήματος, καθώς, αν κάποιες συνθήκες μεταβληθούν, μπορεί να γίνει καθοριστικός για τη λύση. Αν, για παράδειγμα, στο συγκεκριμένο πρόβλημα το δεξιό μέλος του πλεονάζοντος περιορισμού υποδιπλασιαστεί, δηλαδή αν ο περιορισμός γίνει $x_1 + x_2 \leq 300$, τότε θα πάψει να είναι πλεονάζων, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.7, όπου ο τροποποιημένος νέος περιορισμός απεικονίζεται με την ευθεία ΣΤ. Ο περιορισμός αυτός γίνεται δεσμευτικός και μαζί με τον περιορισμό $x_1 = 0$ (ευθεία Ox_2) προσδιορίζουν τη βέλτιστη λύση, που είναι η κορυφή Σ (0, 300) της νέας εφικτής περιοχής ΟΣΤ.

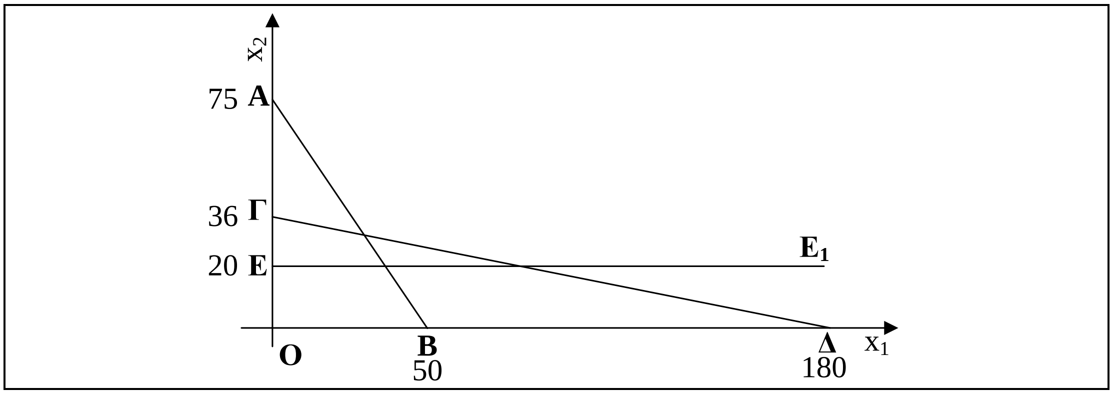


Σχήμα 2.7
Προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης
μετά τον υποδιπλασιασμό του δεξιού μέλους του πλεονάζοντος περιορισμού

2.1.3 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτό που διατυπώθηκε στην ενότητα 1.4.2, εκφράστηκε ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού και διαπιστώθηκε ότι πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις για την επίλυσή του ως μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Κατά συνέπεια μπορούμε να προχωρήσουμε στη γραφική του επίλυση σύμφωνα με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε.

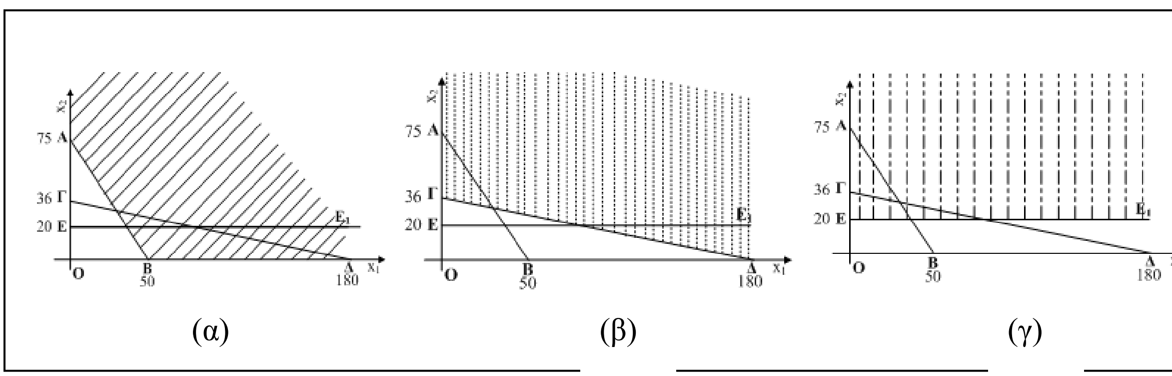
⇒ Το πρώτο βήμα είναι η κατασκευή ενός δισδιάστατου συστήματος αξόνων x_1, x_2, στον οριζόντιο άξονα του οποίου λαμβάνει τιμές η μεταβλητή x_1 και στον κατακόρυφό του άξονα η μεταβλητή x_2. Επειδή και στην περίπτωση αυτή ισχύει για τις μεταβλητές απόφασης ο περιορισμός της μη αρνητικότητας (δηλαδή: $x_1,\ x_2 \geq 0$), θα περιοριστούμε στο πρώτο τεταρτημόριο του συστήματος των αξόνων, το οποίο αντιστοιχεί στους θετικούς ημιάξονες.



Σχήμα 2.8
Γραφική απεικόνιση των περιορισμών

⇒ Το δεύτερο βήμα είναι η γραφική απεικόνιση όλων των περιορισμών στο σύστημα των αξόνων. Το Σχήμα 2.8 απεικονίζει γραφικά και τους τρεις περιορισμούς. Συγκεκριμένα:

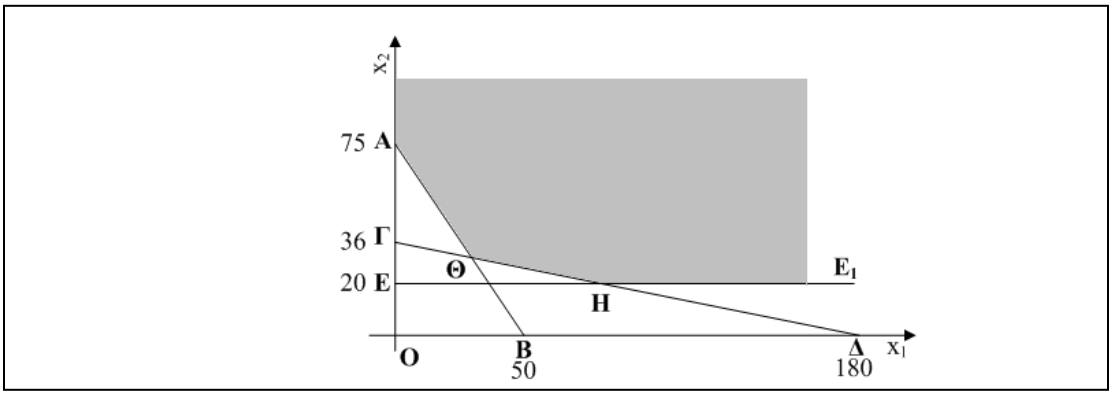
- η ευθεία ΑΒ, που αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό $\left(30x_1{+}20x_2=1500\right)$, διέρχεται από τα σημεία Α (0,75) και Β (50,0)·
- η ευθεία ΓΔ, που αντιστοιχεί στον δεύτερο περιορισμό $\left(5x_1{+}25x_2=900\right)$, διέρχεται από τα σημεία Γ (0,36) και Δ (180,0)·
- τέλος, η ευθεία ΕΕ$_1$, που αντιστοιχεί στον τρίτο περιορισμό $\left(10x_2=200\right)$, είναι παράλληλη προς τον άξονα x_1 και τέμνει τον άξονα x_2 στο σημείο Ε (0,20).



Σχήμα 2.9
Περιοχές επαλήθευσης των περιορισμών

⇒ Το τρίτο βήμα είναι ο προσδιορισμός της περιοχής στην οποία ισχύει κάθε περιορισμός. Όπως εύκολα διαπιστώνεται και απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9, οι τρεις περιορισμοί επαληθεύονται στο ημιεπίπεδο που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων Ο (0,0).

⇒ Το τέταρτο βήμα είναι ο προσδιορισμός της εφικτής περιοχής, δηλαδή της περιοχής στην οποία ισχύουν όλοι οι περιορισμοί και η οποία περιλαμβάνει το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10, η εφικτή περιοχή είναι το γραμμοσκιασμένο τμήμα του πρώτου τεταρτημορίου, δηλαδή το **μη φραγμένο πολύπλευρο** (*unbounded polyhedral*) που προσδιορίζεται από τα σημεία x_2 ΑΘΗΕ$_1$.



Σχήμα 2.10
Προσδιορισμός της εφικτής περιοχής

⇒ Το πέμπτο και τελευταίο βήμα είναι ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης μεταξύ των εφικτών λύσεων του προβλήματος. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η βέλτιστη λύση είναι μία από τις κορυφές του πολυπλεύρου και μπορεί να προσδιοριστεί με μία από τις δύο παρακάτω μεθόδους:

Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο:

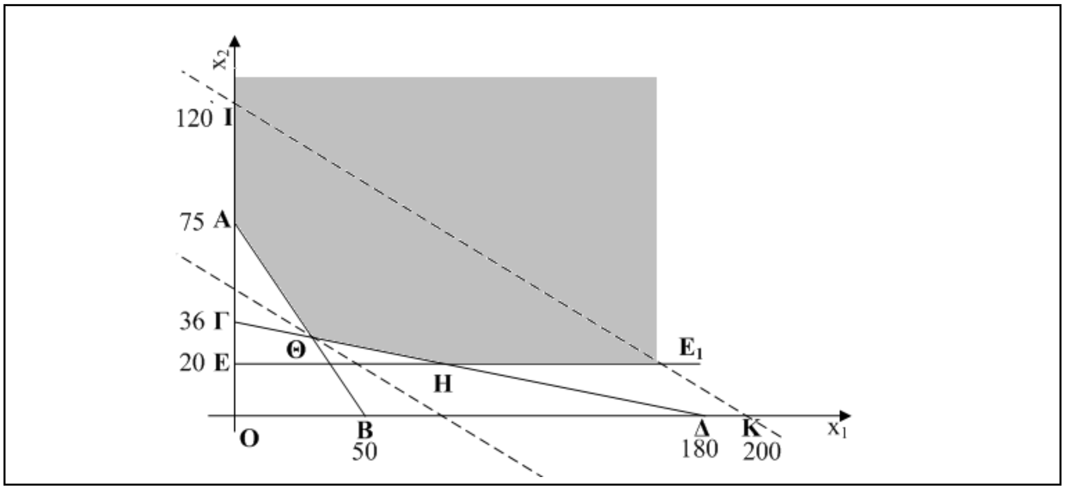
- Λύνουμε την αντικειμενική συνάρτηση $Z = 150x_1 + 250x_2$ ως προς x_2 και έχουμε:

$$250x_2 = Z - 150x_1 \rightarrow x_2 = -150/250x_1 + Z/250 \rightarrow x_2 = -3/5\,x_1 + Z/250 \qquad (2.5)$$

- Δίνουμε στο Z μιαν αυθαίρετη αλλά μέσα στο πλαίσιο της αριθμητικής κλίμακας που χρησιμοποιείται στους άξονες τιμή, έστω $Z = 30000$. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

$$150x_1 + 250x_2 = 30000 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{30000}{250} \qquad (2.6)$$

- Χαράσσουμε την ευθεία ΙΚ της αντικειμενικής συνάρτησης για $Z = 30000$, αφού προσδιορίσουμε δύο σημεία της, έστω Ι (0,120) και Κ (200,0). Προφανώς, εμείς χαράσσουμε μόνο το ευθύγραμμο τμήμα της ΙΚ, το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο (Σχήμα 2.11).
- Μετακινούμε παράλληλα το ευθύγραμμο τμήμα ΙΚ προς την αρχή των αξόνων, εφόσον πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης του Ζ, και δημιουργούμε την οικογένεια των παράλληλων **ισοσταθμικών** ευθειών με κλίση $-3/5$, οι οποίες στην περίπτωση αυτή ονομάζονται **ευθείες ίσου κόστους** (*isocost lines*), εφόσον πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης του Z, και παρατηρούμε ότι η κορυφή Θ είναι η τελευταία από την οποία διέρχεται η παράλληλα μετατοπισμένη ευθεία όταν φτάσει στη θέση ΛΜ και προτού εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή ΙΑΘΗΕ$_1$.



Σχήμα 2.11
Προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης

- Η κορυφή που εντοπίστηκε παραπάνω αποτελεί την τομή των περιοριστικών ευθειών:

$$30x_1 + 20x_2 = 1500 \text{ και } 5x_1 + 25x_2 = 900$$

Κατά συνέπεια, οι συντεταγμένες της, όπως υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος των δύο αυτών εξισώσεων, είναι x_1=30 και x_2=30.

- Αντικαθιστώντας τις βέλτιστες αυτές τιμές των μεταβλητών απόφασης x_1 και x_2 στην αντικειμενική συνάρτηση, έχουμε:

$$Z = 150x_1 + 250x_2 \rightarrow Z = 150 \cdot 30 + 250 \cdot 30 \rightarrow Z = 12000 \qquad (2.7)$$

Η τιμή αυτή του Z αποτελεί τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες κάθε κορυφής της εφικτής περιοχής και για καθεμία από αυτές την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα στοιχεία αυτά συνοψίζονται στον Πίνακα 2.2.

Πίνακας 2.2
Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης σε όλες τις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	**Συντεταγμένες** (x_1, x_2)	**Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης** $Z = 150x_1 + 250x_2$
Α	(0,75)	$Z = 150 \cdot 0 + 250 \cdot 75 = 18750$
Θ	(30,30)	$Z = 150 \cdot 30 + 250 \cdot 30 = 12000$
Η	(80,20)	$Z = 150 \cdot 80 + 250 \cdot 20 = 17000$

Με βάση τα στοιχεία που υπολογίστηκαν παραπάνω, επιλέγουμε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος, **η οποία αντιστοιχεί στην κορυφή Θ, όπου η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την ελάχιστη τιμή**.

Σύμφωνα με τη λύση του προβλήματος, οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι x_1=30 και x_2=30, ενώ η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 12000. Εκφρασμένη σε όρους του προβλήματος, η λύση αυτή σημαίνει ότι η βιομηχανική μονάδα θα πρέπει να παράγει κάθε μέρα $x_1 = 30$ μονάδες από το προϊόν Π_1 και $x_2 = 30$ μονάδες από το προϊόν Π_2, η αποθήκευση των οποίων θα έχει συνολικό κόστος $Z = 12000$ χρηματικές μονάδες.

Ενότητα 2.2

Διερεύνηση της λύσης

2.2.1 Θεωρητικό πλαίσιο

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσαμε την μεθοδολογία γραφικής επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης του.

Στην ενότητα αυτή, θα διερευνήσουμε το βαθμό στον οποίο η βέλτιστη αυτή λύση ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος και συγκεκριμένα αν για την επίτευξή της έχει γίνει χρήση όλων των διαθέσιμων πόρων (στην περίπτωση προβλήματος μεγιστοποίησης) ή έχουν υπερκαλυφθεί όλες οι ελάχιστες απαιτήσεις (στην περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποίησης). Η διερεύνηση αυτή είναι πολύ ενδιαφέρουσα και τα συμπεράσματά της μπορεί να περιέχουν οικονομική πληροφόρηση με μεγάλο επιχειρηματικό ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση ύπαρξης αδιάθετων πόρων, η επιχείρηση θα μπορούσε να τους χρησιμοποιήσει για την παραγωγή κάποιου άλλου προϊόντος ή να τους πωλήσει. Αντίστοιχα, στην περίπτωση υπερκάλυψης κάποιων ελάχιστων απαιτήσεων, η επιχείρηση θα μπορούσε να εξετάσει το ενδεχόμενο να περιοριστεί στην κάλυψη των ελάχιστων απαιτήσεων και να χρησιμοποιήσει τους πρόσθετους πόρους σε κάποια άλλη δραστηριότητα. Τα βασικά βήματα για τη διερεύνηση αυτή περιγράφονται παρακάτω για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης και στη συνέχεια για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ας σημειωθεί ότι, μετά την ολοκλήρωση της διερεύνησης, η πληροφόρηση για τυχόν αδιάθετους πόρους ή υπερκαλύψεις ελάχιστων απαιτήσεων θα είναι άμεσα διαθέσιμη στους υπεύθυνους ώστε να ληφθεί υπόψη στις αποφάσεις τους.

Πρόβλημα μεγιστοποίησης

Τα βήματα που ακολουθούνται στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης με *n* μεταβλητές και *m* περιορισμούς είναι τα ακόλουθα:

- Αντικατάσταση στο αριστερό μέλος κάθε περιορισμού των μεταβλητών απόφασης $\left(x_j, j=1,...,n\right)$ με τις τιμές τους, όπως έχουν προσδιοριστεί στη βέλτιστη λύση, και υπολογισμός της συνολικής τιμής του μέλους αυτού. Προφανώς, για κάποιους περιορισμούς τα αριστερά μέλη θα είναι ίσα με τα αντίστοιχα δεξιά, γεγονός που σημαίνει ότι οι πόροι που αντιστοιχούν στους περιορισμούς αυτούς έχουν διατεθεί πλήρως. Αντίστοιχα, για τους υπόλοιπους περιορισμούς τα αριστερά μέλη θα είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα δεξιά, γεγονός που σημαίνει ότι μέρος των πόρων που αντιστοιχούν στους περιορισμούς αυτούς έχει μείνει αδιάθετο.

- Μετατροπή όλων των περιορισμών από ανισότητες σε ισότητες με την προσθήκη στα αριστερά μέλη τους αντίστοιχων βοηθητικών μεταβλητών $s_i, i=1,...,m$, οι οποίες ονομάζονται **χαλαρές μεταβλητές** ή **μεταβλητές περιθωρίου** (*slack variables*) και εκφράζουν τις ποσότητες των πόρων που έχουν μείνει αδιάθετες. Κάθε χαλαρή μεταβλητή εμφανίζεται σε ένα μόνο περιορισμό με συντελεστή μονάδα. Επιπλέον, όλες οι χαλαρές μεταβλητές εμφανίζονται και στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή 0 και, κατά συνέπεια, δεν επηρεάζουν την τιμή της. Προφανώς για όσους περιορισμούς ήταν ήδη ισότητες, η τιμή του s_i είναι μηδενική $(s_i = 0)$, ενώ για τους υπόλοιπους περιορισμούς η τιμή του s_i είναι θετική $(s_i > 0)$ και ίση με τη διαφορά της μέγιστης ποσότητας του διαθέσιμου πόρου (δεξιό μέρος του περιορισμού) και της ποσότητας του πόρου που έχει καταναλωθεί (υπολογισθείσα τιμή του αριστερού μέλους του περιορισμού).

Ολοκληρώνοντας, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι οι περιορισμοί με $s_i = 0$ ονομάζονται **δεσμευτικοί περιορισμοί** (*binding constraints*) ή **ενεργοί περιορισμοί** (*active constraints*), συμμετέχουν στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης και, όπως θα δούμε καλύτερα στις εφαρμογές που θα αναλυθούν, η βέλτιστη κορυφή της εφικτής περιοχής είναι η τομή των ευθειών που τους εκφράζουν. Αντίστοιχα, οι περιορισμοί με $s_i > 0$ ονομάζονται **μη δεσμευτικοί** (*non-binding/loose constraints*) ή **αδρανείς περιορισμοί** (*inactive constraints*) και δεν συμμετέχουν στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης.

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Τα βήματα που ακολουθούνται στην περίπτωση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης, με *n* μεταβλητές και *m* περιορισμούς, είναι τα ακόλουθα:

- Αντικατάσταση στο αριστερό μέλος κάθε περιορισμού των μεταβλητών απόφασης $x_j, j=1,...,n$ με τις τιμές τους, όπως έχουν προσδιοριστεί στη βέλτιστη λύση, και υπολογισμός της συνολικής τιμής του μέλους αυτού. Προφανώς, για κάποιους περιορισμούς τα αριστερά μέλη θα είναι ίσα με τα αντίστοιχα δεξιά, γεγονός που σημαίνει ότι οι απαιτήσεις που αντιστοιχούν στους περιορισμούς αυτούς έχουν απλώς καλυφθεί. Αντίστοιχα, για τους υπόλοιπους περιορισμούς τα αριστερά μέλη θα είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα δεξιά, γεγονός που σημαίνει ότι οι απαιτήσεις έχουν υπερκαλυφθεί.

- Μετατροπή όλων των περιορισμών από ανισότητες σε ισότητες με την αφαίρεση από τα αριστερά μέλη τους των αντίστοιχων βοηθητικών μεταβλητών e_i, $i=1,...,m$, οι οποίες ονομάζονται **πλεονασματικές μεταβλητές** ή **μεταβλητές πλεονάσματος** (*excess*/*surplus variables*) και εκφράζουν τις ποσότητες κατά τις οποίες έχουν υπερκαλυφθεί οι ελάχιστες απαιτήσεις. Επιπλέον, όλες οι πλεονασματικές μεταβλητές εμφανίζονται και στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή 0 και, κατά συνέπεια, δεν επηρεάζουν την τιμή της. Προφανώς, για όσους περιορισμούς ήταν ήδη ισότητες, η τιμή του e_i είναι μηδενική $(e_i = 0)$, ενώ για τους υπόλοιπους περιορισμούς η τιμή του e_i είναι θετική ($e_i > 0$) και ίση με τη διαφορά της ελάχιστης απαίτησης παραγωγής (δεξιό μέλος του περιορισμού) και της ποσότητας που έχει παραχθεί (υπολογισθείσα τιμή του αριστερού μέλους του περιορισμού).

Ολοκληρώνοντας, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι, όπως και στην περίπτωση των προβλημάτων μεγιστοποίησης, οι περιορισμοί με $e_1 = 0$ ονομάζονται **δεσμευτικοί** ή **ενεργοί περιορισμοί**, συμμετέχουν στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης και, όπως θα δούμε καλύτερα στις εφαρμογές που θα αναλυθούν, η βέλτιστη κορυφή της εφικτής περιοχής είναι η τομή των ευθειών που τους εκφράζουν. Αντίστοιχα, οι περιορισμοί με $e_i > 0$ ονομάζονται **μη δεσμευτικοί** ή **αδρανείς** και δεν συμμετέχουν στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης.

2.2.2 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης

Ως πρόβλημα μεγιστοποίησης για την εφαρμογή της μεθοδολογίας διερεύνησης του βαθμού χρησιμοποίησης των διαθέσιμων πόρων, η οποία παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα, θα χρησιμοποιηθεί το πρόβλημα που διατυπώθηκε και επιλύθηκε γραφικά στην ενότητα 2.1.2.

Προκειμένου να διερευνήσουμε αν για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης χρησιμοποιήθηκαν όλοι οι διαθέσιμοι πόροι ή υπάρχουν ακόμα κάποιοι αδιάθετοι, εργαζόμαστε, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ως εξής:

- Στο αριστερό μέλος κάθε περιορισμού δομής, αντικαθιστούμε τις μεταβλητές απόφασης με τις τιμές τους $x_1 = 100, x_2 = 350$, όπως έχουν προσδιοριστεί στη βέλτιστη λύση, και έχουμε:

$$2 \cdot 100 + 4 \cdot 350 = 1600 = \text{δεξιό μέλος } (1600)$$

$$6 \cdot 100 + 2 \cdot 350 = 1300 < \text{δεξιό μέλος } (1800)$$

$$1 \cdot 350 = 350 = \text{δεξιό μέλος } (350)$$

- Μετατρέπουμε όλους τους περιορισμούς από ανισότητες σε ισότητες με την προσθήκη στα αριστερά μέλη τους των χαλαρών μεταβλητών s_i, $i = 1,...,n$.

Με βάση τα παραπάνω, το πρόβλημα λαμβάνει την ακόλουθη κανονική μορφή:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (2.8)

$$Z = 3x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3,$$

με περιορισμούς δομής:

$$2x_1 + 4x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 1600$$

$$6x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 1800$$

$$3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0$$

Παρατηρώντας τους περιορισμούς δομής και λαμβάνοντας υπόψη όσα σχετικά έχουν αναφερθεί παραπάνω, εύκολα συνάγεται ότι στη βέλτιστη λύση οι τρεις χαλαρές μεταβλητές λαμβάνουν τις τιμές

$$s_1 = 0,\ s_2 = 1800 - 1300 \Leftrightarrow s_2 = 500,\ s_3 = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης εξαντλήθηκε ο διαθέσιμος χρόνος εργασίας και η διαθέσιμη ποσότητα του υλικού Y_3, ενώ έμειναν αδιάθετες (1800-1300) = 500 μονάδες του υλικού Y_2. Κατά συνέπεια, η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Παραγωγή: $x_1 = 100\,, x_2 = 350$

Αδιάθετοι πόροι $s_1 = 0\,,\ s_2 = 500\,,\ s_3 = 0$

Κέρδος: $Z = 3100$

Ολοκληρώνοντας, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι ο πρώτος και ο τρίτος περιορισμός, με χαλαρές μεταβλητές $s_1 = 0$ και $s_3 = 0$ αντίστοιχα, είναι δεσμευτικοί και καθορίζουν τη βέλτιστη λύση. Αντίθετα, ο δεύτερος περιορισμός, με χαλαρή μεταβλητή $s_2 = 500 > 0$, είναι μη δεσμευτικός και δεν συμμετέχει στον προσδιορισμό της βέλτιστης κορυφής. Όλα τα παραπάνω διαπιστώνονται και γεωμετρικά στο Σχήμα 2.5.

2.2.3 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης για την εφαρμογή της μεθοδολογίας του βαθμού κάλυψης των ελάχιστων απαιτήσεων, η οποία παρουσιάστηκε σε προηγούμενη υποενότητα, θα χρησιμοποιηθεί το πρόβλημα που διατυπώθηκε και επιλύθηκε γραφικά στην ενότητα 2.1.3.

Προκειμένου να διερευνήσουμε αν για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης καλύφθηκαν/υπερκαλύφθηκαν οι ελάχιστες απαιτήσεις χρήσης των διαθέσιμων πόρων, εργαζόμαστε, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ως εξής:

- Στο αριστερό μέλος κάθε περιορισμού δομής αντικαθιστούμε τις μεταβλητές απόφασης με τις τιμές τους $x_1 = 30,\ x_2 = 30$, όπως έχουν προσδιοριστεί στη βέλτιστη λύση και έχουμε:

$$30 \cdot 30 + 20 \cdot 30 = 1500 = \text{δεξιό μέλος } (1500)$$

$$5 \cdot 30 + 25 \cdot 30 = 900 = \text{δεξιό μέλος } (900)$$

$$10 \cdot 30 = 300 > \text{δεξιό μέλος } (200)$$

- Μετατρέπουμε όλους τους περιορισμούς από ανισότητες σε ισότητες, με την προσθήκη στα αριστερά μέλη τους των πλεονασματικών μεταβλητών $e_i,\ i = 1,...,n$.

Με βάση τα παραπάνω, το πρόβλημα λαμβάνει την ακόλουθη κανονική μορφή:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (2.9)

$$Z = 150x_1 + 250x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

με περιορισμούς δομής:

$$30x_1 + 20x_2 - 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 1500$$
$$5x_1 + 25x_2 + 0e_1 - 1e_2 + 0e_3 = 900$$
$$10x_2 + 0e_1 + 0e_2 - 1e_3 = 200$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ \ e_2 \geq 0,\ \ e_3 \geq 0$$

Παρατηρώντας τους περιορισμούς δομής και λαμβάνοντας υπόψη όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω, εύκολα συνάγεται ότι στη βέλτιστη λύση οι τρεις πλεονασματικές μεταβλητές λαμβάνουν τις τιμές

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 300 - 200 \rightarrow e_3 = 100$$

Αυτό σημαίνει ότι για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης καλύφθηκαν οι ελάχιστες απαιτήσεις χρήσης των αποθεμάτων των υλικών Y_1 και Y_2 και υπερκαλύφθηκε κατά (300-200) = 100 μονάδες η ελάχιστη απαίτηση χρήσης των αποθεμάτων του υλικού Y_3. Κατά συνέπεια, η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Παραγωγή: $x_1 = 30$, $x_2 = 30$

Υπερκάλυψη απαιτήσεων: $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 100$

Κόστος: $Z = 12000$

Ολοκληρώνοντας, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι ο πρώτος και ο δεύτερος περιορισμός, με πλεονασματικές μεταβλητές $e_1 = 0$ και $e_2 = 0$ αντίστοιχα, είναι δεσμευτικοί περιορισμοί, ενώ, αντίθετα, ο τρίτος περιορισμός, με πλεονασματική μεταβλητή $e_3 = 100 > 0$, είναι μη δεσμευτικός και δεν συμμετέχει στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης. Όλα τα παραπάνω διαπιστώνονται και γεωμετρικά στο Σχήμα 2.11.

Ενότητα 2.3

Ειδικές περιπτώσεις

2.3.1 Εισαγωγή

Στα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες υποενότητες, η γραφική επίλυσή τους οδήγησε στον προσδιορισμό της μοναδικής βέλτιστης λύσης, δηλαδή της λύσης που βελτιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η βέλτιστη λύση εντοπίστηκε σε μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντοτε. Αντίθετα, υπάρχουν και περιπτώσεις προβλημάτων χωρίς μοναδική βέλτιστη λύση, τα οποία απαιτούν ιδιαίτερη αντιμετώπιση. Τέτοια προβλήματα είναι τα εξής:

- Προβλήματα με άπειρες λύσεις.
- Προβλήματα χωρίς εφικτή λύση.
- Μη φραγμένα προβλήματα.

Οι παραπάνω περιπτώσεις δεν εμφανίζονται συχνά στην πράξη, αλλά όταν εμφανίζονται, αυτό τις περισσότερες φορές οφείλεται σε σφάλματα κατά την ανάπτυξη του μοντέλου. Στη συνέχεια οι περιπτώσεις αυτές θα μελετηθούν αναλυτικά μέσα από παραλλαγές του αρχικού προβλήματος που διατυπώθηκε στην ενότητα 1.4.1.

2.3.2 Πρόβλημα με άπειρες λύσεις

Στην παραλλαγή αυτή, η μοναδική διαφοροποίηση σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα είναι η μεταβολή της τιμής του αντικειμενικού συντελεστή της μεταβλητής x_1 από $c_1 = 3$ σε $c_1 = 4$. Έτσι, το αρχικό πρόβλημα επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (2.10)

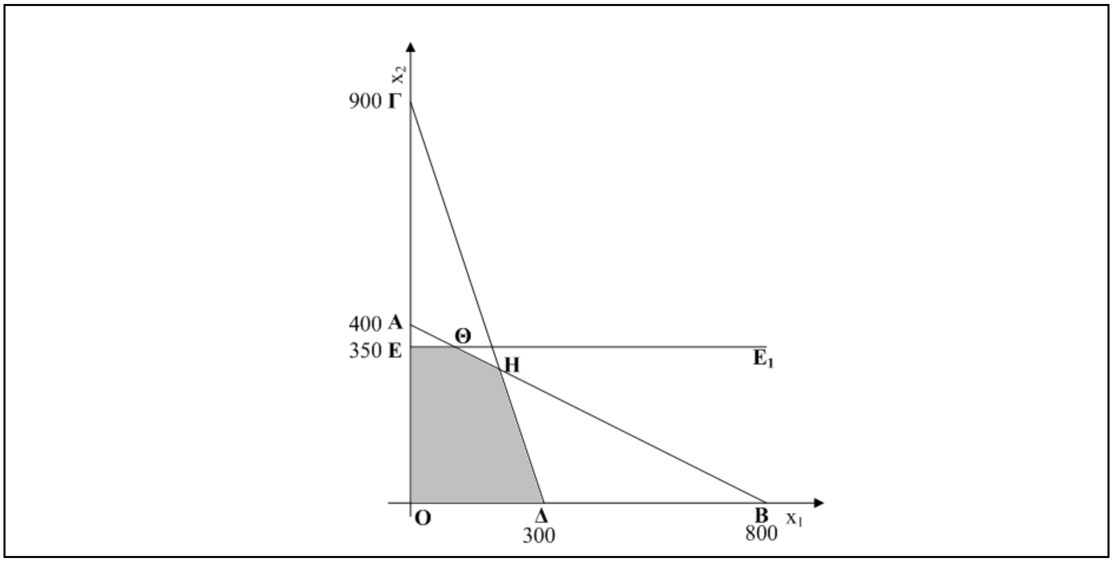
$$Z = 4x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$



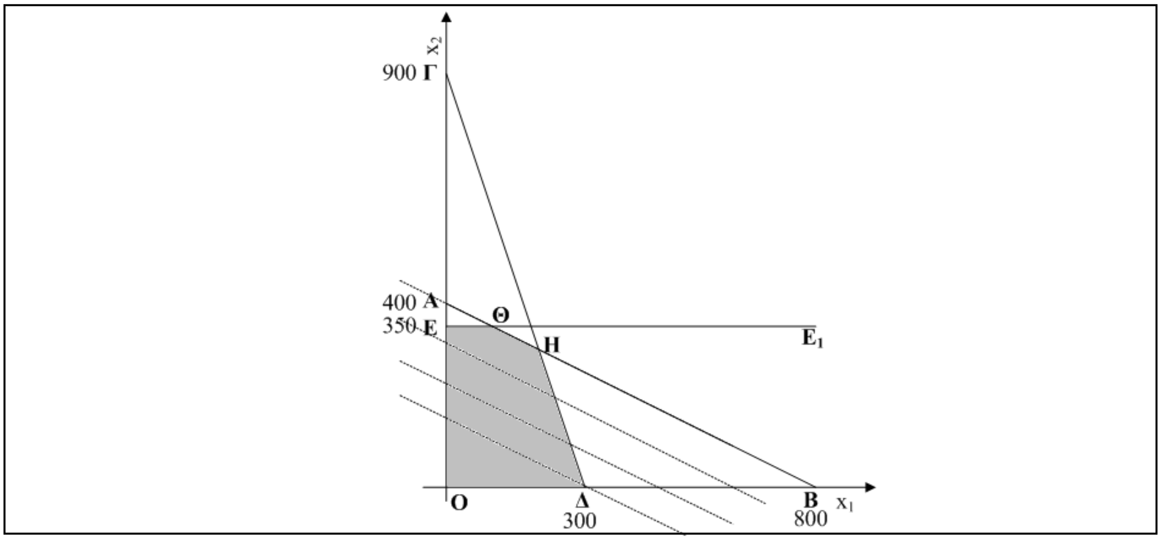
Σχήμα 2.12

Γραφική απεικόνιση των περιορισμών και προσδιορισμός της εφικτής περιοχής

Λύνοντας την αντικειμενική συνάρτηση $Z = 4x_1 + 8x_2$ ως προς x_2, έχουμε:

$$-8x_2 = -4x_1 + Z \rightarrow 8x_2 = -4x_1 + Z \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{Z}{8} \qquad (2.11)$$

Άρα, η αντικειμενική συνάρτηση είναι μια ευθεία με κλίση $-\frac{1}{2}$, δηλαδή ίση με την κλίση της πρώτης περιοριστικής ευθείας AB ($2x_1 + 4x_2 = 1600$). Συνεπώς, οι δύο αυτές ευθείες είναι παράλληλες. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.13, καθώς μετακινείται παράλληλα η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης, δημιουργώντας αντίστοιχες ευθείες ίσου κέρδους, προτού εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή, δεν διέρχεται απλώς από μια κορυφή της, αλλά συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ.



Σχήμα 2.13
Γραφική απεικόνιση των ευθειών ίσου κέρδους

Αντικαθιστώντας διαδοχικά τις συντεταγμένες των σημείων Θ (100, 350) και Η (200, 300) στην αντικειμενική συνάρτηση, έχουμε:

για το σημείο $\Theta: Z = 4 \cdot 100 + 8 \cdot 350 = 3200$

για το σημείο $H: Z = 4 \cdot 200 + 8 \cdot 300 = 3200$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και οι δύο αυτές κορυφές είναι βέλτιστες. Επιπλέον όμως, δεν είναι οι μόνες. Το ίδιο ισχύει και για όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΘΗ. Επομένως, έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ άπειρων βέλτιστων λύσεων, που όλες βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ (περιλαμβανομένων και των δύο ακραίων σημείων του) και δίνουν την ίδια τιμή στο Z. Η επιλογή αυτή μπορεί να βασιστεί σε διάφορα κριτήρια. Ένα τέτοιο κριτήριο επιλογής θα μπορούσαν να είναι οι τιμές των συντεταγμένων των διαφόρων σημείων, οι οποίες στη συγκεκριμένη περίπτωση εκφράζουν τον αριθμό των μονάδων x_1 και x_2 που παράγονται από τα δύο προϊόντα Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Έτσι οι κορυφές Θ ή Η θα επιλεγούν ως βέλτιστη λύση, αν η επιχείρηση επιθυμεί να παράγει το μέγιστο δυνατό αριθμό μονάδων από τα προϊόντα Π_2 ή Π_1 αντίστοιχα. Αντίθετα, αν η επιχείρηση επιθυμεί να παράγει ένα συνολικό αριθμό μονάδων και από τα δύο προϊόντα, ίσο με ένα σταθμισμένο μέσο όρο των μονάδων που μπορούν να παραχθούν στις δύο κορυφές Θ και Η, τότε θα επιλέξει ένα σημείο Ν του ευθύγραμμου τμήματος ΘΗ, τέτοιο ώστε:

$$N = \alpha \cdot (100,350) + (1-\alpha) \cdot (200,300), \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{2.12}$$

όπου α και $(1-\alpha)$ οι **επιθυμητοί συντελεστές στάθμισης**. Ο μέσος αυτός όρος ονομάζεται **κυρτός συνδυασμός** (*convex combination*), επειδή οι συντελεστές βαρύτητάς του έχουν άθροισμα τη μονάδα και αντιστοιχεί σε ένα **συνοριακό σημείο** (*boundary point*) που ανήκει στην ακμή που συνδέει τα δύο ακραία σημεία του ευθύγραμμου τμήματος.

Αν, για παράδειγμα, $\alpha = 0,40$, οπότε $1 - \alpha = 0,60$, τότε:

$$N = 0,4 \cdot (100,350) + 0,6 \cdot (200,300) \rightarrow N = (160,320) \tag{2.13}$$

Με άλλα λόγια, η επιχείρηση θα παράγει 160 μονάδες από το προϊόν Π_1 και 320 μονάδες από το προϊόν Π_2. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$Z = 4 \cdot 160 + 8 \cdot 320 = 640 + 2560 = 3200 \tag{2.14}$$

Ολοκληρώνοντας την υποενότητα, σημειώνουμε ότι στο πρόβλημα αυτό θα είχαμε επίσης άπειρες λύσεις αν η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης ήταν παράλληλη και προς οποιοδήποτε άλλο ευθύγραμμο τμήμα από αυτά που καθορίζουν την εφικτή περιοχή.

2.3.3 Πρόβλημα χωρίς εφικτή λύση

Στην παραλλαγή αυτή, η μοναδική διαφοροποίηση σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα είναι η αντικατάσταση του τρίτου περιορισμού $x_2 \le 350$ από τον αντίστοιχο $x_2 \ge 450$. Έτσι, το αρχικό πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (2.15)

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

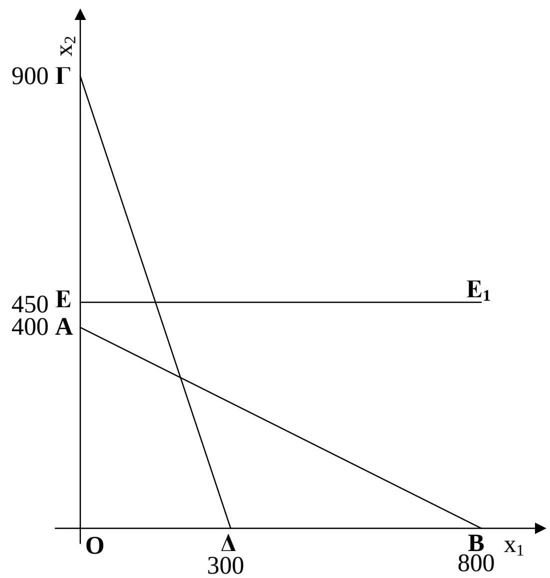
με περιορισμούς δομής:

$$2x_1 + 4x_2 \le 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 1800$$
$$x_2 \ge 450$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Η γραφική απεικόνιση των περιορισμών του προβλήματος και ο προσδιορισμός της εφικτής περιοχής, η οποία έγινε σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.1.1, παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.14.



Σχήμα 2.14
Γραφική απεικόνιση των περιορισμών

Παρατηρώντας το Σχήμα 2.14, διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχουν σημεία που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς. Κατά συνέπεια, δεν υπάρχει εφικτή λύση και η εφικτή περιοχή είναι το **κενό σύνολο**.

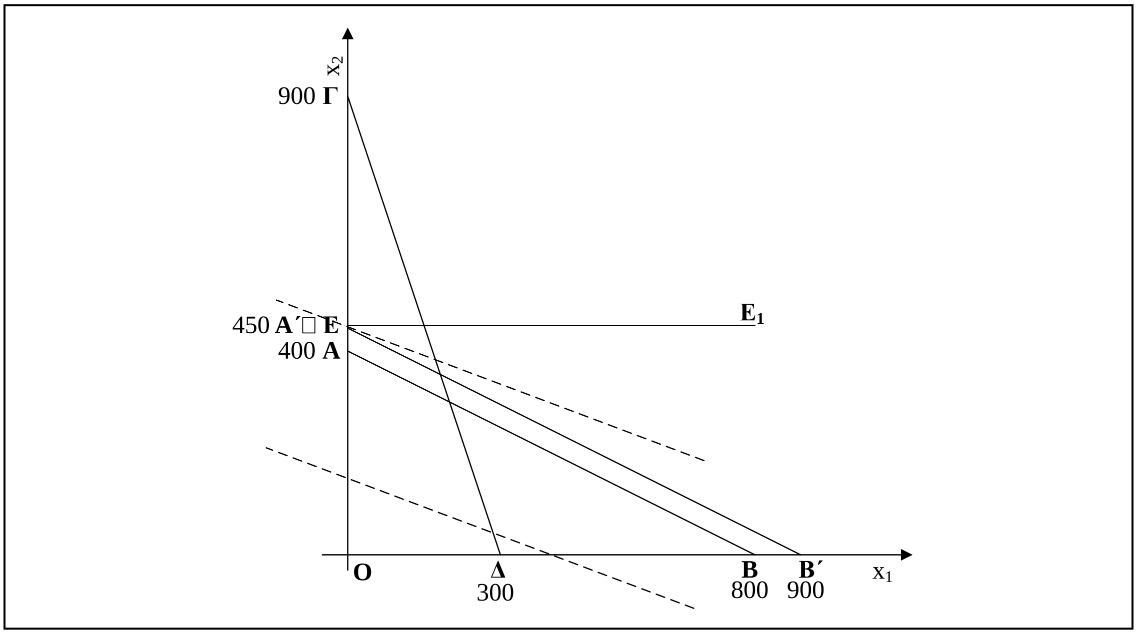
Αντικαθιστώντας την ελάχιστη απαίτηση παραγωγής για το προϊόν Π_2 $\left(x_2 = 450\right)$ στους δύο προηγούμενους περιορισμούς, έχουμε:

$2\,x_1 + 4x_2 = 2x_1 + 4 \cdot 450 = 2x_1 + 1800$, με σταθερά δεξιού μέλους το 1600

$6x_1 + 2x_2 = 6x_1 + 2 \cdot 450 = 6x_1 + 900$, με σταθερά δεξιού μέλους το 1800

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για να ικανοποιηθεί η απαίτηση παραγωγής 450 τουλάχιστον μονάδων του προϊόντος Π_2, χρειάζονται 1800 τουλάχιστον μονάδες του πρώτου πόρου, ενώ η επιχείρηση διαθέτει μόνο 1600 μονάδες, και 900 τουλάχιστον μονάδες του δεύτερου πόρου, ενώ η επιχείρηση διαθέτει 1800. **Άρα, η ανυπαρξία εφικτής λύσης οφείλεται στην ανεπάρκεια του πρώτου πόρου**.

Αν οι διαθέσιμες μονάδες του πρώτου πόρου αυξηθούν σε 1800, μεταβάλλοντας αντίστοιχα και το δεύτερο μέλος του πρώτου περιορισμού, η αντίστοιχη περιοριστική ευθεία θα μετακινηθεί προς τα δεξιά και θα τέμνει τον άξονα x_2 στο σημείο $\text{Α}'(0, 450)$, εκεί δηλαδή ακριβώς $\left(\text{σημείο Ε}\right)$ που τον τέμνει και η περιοριστική ευθεία που αντιστοιχεί στον τρίτο περιορισμό. Στο σημείο αυτό ισχύει και ο δεύτερος περιορισμός.



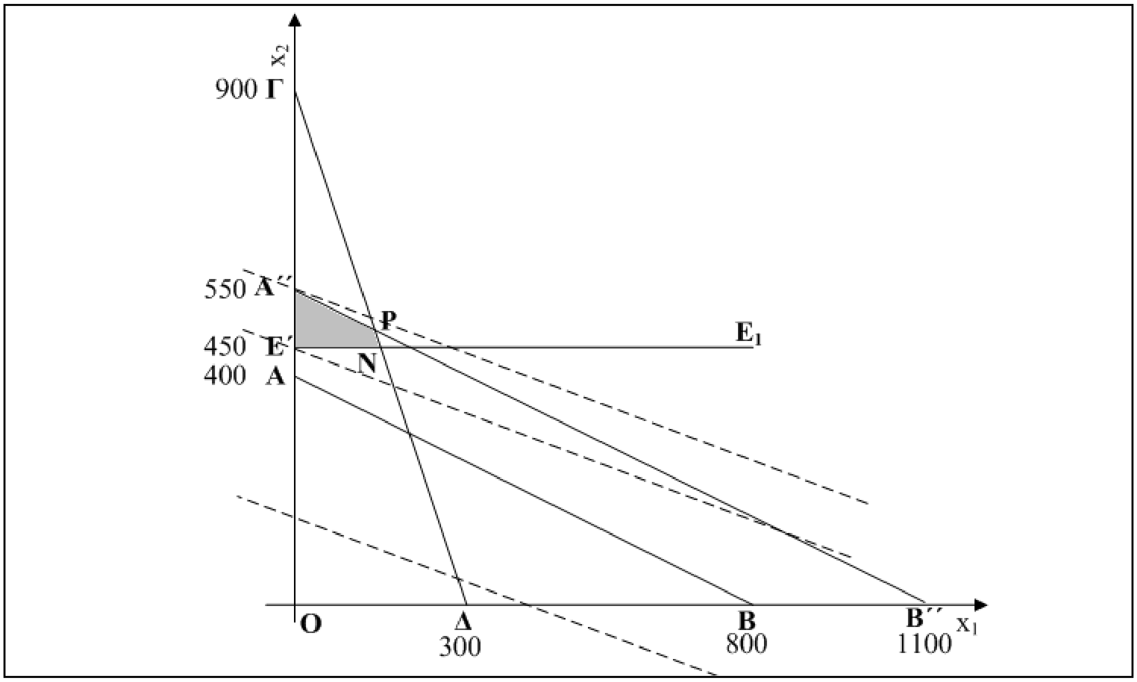
Σχήμα 2.15
Μεταβολή της εφικτής περιοχής
λόγω μεταβολής του δεξιού μέλους του πρώτου περιορισμού ($b_1 = 1800$)

Κατά συνέπεια, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.15, η εφικτή περιοχή αποτελείται από ένα μοναδικό σημείο, το $\text{Α}' \equiv \text{Ε}$ (0, 450). Η αντικειμενική συνάρτηση, που απεικονίζεται με τη διακεκομμένη γραμμή, διέρχεται από το σημείο αυτό, το οποίο αποτελεί τη βέλτιστη λύση. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι η εξής:

$$Z = 3x_1 + 8x_2 = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 450 = 0 + 3600 \rightarrow Z = 3600 \qquad (2.16)$$

Αν η διαθέσιμη ποσότητα του πρώτου πόρου αυξηθεί ακόμη περισσότερο, τότε η επιχείρηση θα μπορούσε να τη χρησιμοποιήσει, σε συνδυασμό με τυχόν αχρησιμοποίητες ποσότητες των δύο άλλων πόρων, αυξάνοντας την παραγωγή της και εφόσον υπάρχει ζήτηση για αυτήν και τα κέρδη της. Το Σχήμα 2.16 παρουσιάζει την εφικτή περιοχή των λύσεων όταν η διαθέσιμη ποσότητα του πρώτου πόρου είναι 2200 μονάδες. Όπως παρατηρούμε, η εφικτή περιοχή είναι το τετράπλευρο $\text{Α}''\text{ΡΝΕ}$. Απεικονίζοντας την αντικειμενική συνάρτηση και τις ευθείες ίσου κέρδους, διαπιστώνουμε ότι το βέλτιστο σημείο είναι η κορυφή A''. Το σημείο αυτό είναι η τομή των ευθειών $2x_1 + 4x_2 = 1600$ και $x_1 = 0$ με συντεταγμένες (0,550). Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι η εξής:

$$Z = 3x_1 + 8x_2 = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 550 = 4400 \tag{2.17}$$



Σχήμα 2.16
Μεταβολή της εφικτής περιοχής
λόγω μεταβολής του δεξιού μέλους του πρώτου περιορισμού ($b_1 = 2200$)

Ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή, σημειώνουμε ότι, όπως φαίνεται και από το προηγούμενο παράδειγμα, η μη ύπαρξη εφικτής λύσης σε κάποιο πρόβλημα οφείλεται κατά κύριο λόγο στους περιορισμούς του. Κατά συνέπεια, στις περιπτώσεις αυτές η διερεύνηση και η αναζήτηση των αιτιών που προκαλούν το πρόβλημα θα πρέπει να επικεντρωθεί στους περιορισμούς και ειδικότερα στους τεχνολογικούς συντελεστές των μεταβλητών και στις σταθερές των δεξιών μελών τους.

2.3.4 Μη φραγμένο πρόβλημα

Στην παραλλαγή αυτή, η διαφοροποίηση σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα είναι η διαγραφή των δύο πρώτων περιορισμών δομής και η προσθήκη ενός νέου, του $x_1 \geq 450$. Έτσι το αρχικό πρόβλημα επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (2.18)

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής:

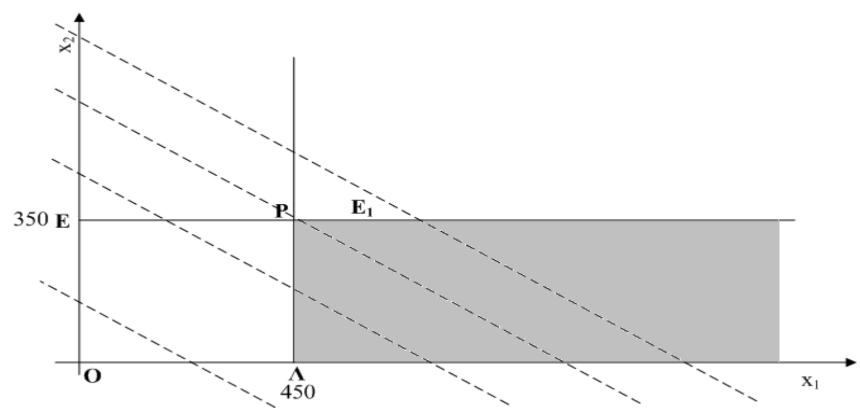
$$x_1 \geq 450$$

$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ο πρώτος περιορισμός δομής αφορά την ελάχιστη ζήτηση για το πρώτο προϊόν, ενώ ο δεύτερος περιορισμός αφορά τη διαθεσιμότητα του πόρου που απαιτείται για την παραγωγή του δεύτερου προϊόντος. Η γραφική επίλυση του προβλήματος, δηλαδή η γραφική παράσταση των περιορισμών (συμπαγείς ευθείες) και των ευθειών ίσου κέρδους, δηλαδή της αντικειμενικής συνάρτησης για διάφορες τιμές του Z (διακεκομμένες ευθείες), εμφανίζεται στο Σχήμα 2.17.



Σχήμα 2.17
Γραφική απεικόνιση των περιορισμών και της εφικτής περιοχής

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.17, η εφικτή περιοχή είναι μη φραγμένη και, επομένως, εκτείνεται προς το άπειρο. Επιπλέον, καθώς η αντικειμενική συνάρτηση μετακινείται προς τα δεξιά, η τιμή της αυξάνεται συνεχώς. Άρα, ανεξάρτητα από το ποια είναι η τρέχουσα τιμή που λαμβάνει το Z, υπάρχει πάντοτε μία εφικτή λύση που μπορεί να του δώσει μεγαλύτερη τιμή. Κατά συνέπεια, έχουμε ένα **μη φραγμένο πρόβλημα** (*unbounded problem*) και **η τιμή του Z τείνει στο άπειρο**.

Συμπερασματικά, η ύπαρξη μη φραγμένης περιοχής δεν αποτελεί πρόβλημα. Αυτό άλλωστε φάνηκε και από την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης στην ενότητα 1.4.2, όπου η εφικτή περιοχή ήταν μη φραγμένη, αλλά υπήρχε βέλτιστη λύση. Όταν, όμως, όπως στην παρούσα περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, η ύπαρξη μη φραγμένης εφικτής περιοχής οδηγεί σε απεριόριστη αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, **τότε έχουμε μη φραγμένο πρόβλημα. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποίησης, όταν η ύπαρξη μη φραγμένης περιοχής οδηγεί σε απεριόριστη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης**.

Ολοκληρώνοντας την υποενότητα αυτή, σημειώνουμε ότι ένα μη φραγμένο πρόβλημα οφείλεται κατά κύριο λόγο σε λογικό σφάλμα κατά τη δημιουργία του μοντέλου. Εφόσον το σφάλμα εντοπιστεί, το πρόβλημα μπορεί να γίνει επιλύσιμο, ανάλογα με την περίπτωση, με την αντικατάσταση των εσφαλμένων περιορισμών, την προσθήκη νέων περιορισμών, τη μεταβολή της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης και τη μεταβολή του κριτηρίου απόδοσης.

Ενότητα 2.4

Ανάλυση ευαισθησίας της λύσης

2.4.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα 1.3.2 αναφερθήκαμε στις βασικές προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται έτσι ώστε ένα πρόβλημα να μπορεί να εκφραστεί ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Μία από αυτές είναι η **προϋπόθεση της βεβαιότητας**, σύμφωνα με την οποία οι τιμές όλων των παραμέτρων του προβλήματος, δηλαδή των αντικειμενικών συντελεστών, των τεχνολογικών συντελεστών και των δεξιών μελών των περιορισμών, είναι σταθερές και διατηρούνται στο χρονικό ορίζοντα τού υπό μελέτη προβλήματος. Στην πραγματικότητα, όμως, η προϋπόθεση αυτή είναι πρακτικά αδύνατο να ισχύει πλήρως, καθώς οι τιμές των παραμέτρων αυτών είναι συνήθως εκτιμήσεις ή προβλέψεις των πραγματικών τιμών που εμπεριέχουν το σφάλμα εκτίμησης/πρόβλεψης και, επιπλέον, δεν παραμένουν σταθερές διαχρονικά. Για παράδειγμα, η ζήτηση ενός προϊόντος δεν είναι πάντοτε γνωστή ούτε σταθερή και το ίδιο ισχύει για τις τιμές των πρώτων υλών ή των τελικών προϊόντων. Για το λόγο αυτόν, είναι πολύ σημαντικό η επίλυση ενός προβλήματος και ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης του να ακολουθούνται από την **ανάλυση ευαισθησίας** (*sensitivity/postoptimality analysis*) **της λύσης**. Η ανάλυση αυτή διερευνά τις μεταβολές που συμβαίνουν στη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος όταν υπάρχουν μικρές ή μεγαλύτερες μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων του. Διερευνά, για παράδειγμα, πώς θα μεταβληθεί το συνολικό κέρδος μιας επιχείρησης αν η τιμή πώλησης ενός από τα προϊόντα της αυξηθεί κατά κάποιο συγκεκριμένο ποσό ή ποσοστό, ή σε ποιο διάστημα μπορεί να κυμαίνεται η τιμή πώλησης ενός άλλου προϊόντος της χωρίς να μεταβληθεί το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής της.

Είναι προφανές ότι τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση ευαισθησίας της λύσης ενός προβλήματος έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους διοικούντες μιαν επιχείρηση, καθώς τους επιτρέπουν να εντοπίζουν τις ευαίσθητες παραμέτρους του προβλήματος, ώστε να τις προσεγγίζουν με μεγαλύτερη προσοχή.

Ένας τρόπος προσέγγισης της ανάλυσης ευαισθησίας της λύσης ενός προβλήματος είναι η ενσωμάτωση στο μοντέλο που το εκφράζει της μεταβολής της παραμέτρου που θέλουμε να διερευνήσουμε και η εκ νέου επίλυσή του. Η προσέγγιση αυτή, όμως, εκτός του ότι είναι εξαιρετικά χρονοβόρα, δεν διερευνά στην ουσία το μηχανισμό επηρεασμού της λύσης από τη μεταβολή της παραμέτρου, αλλά δίνει μόνο το τελικό αποτέλεσμα. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιάσουμε μια διαφορετική προσέγγιση της ανάλυσης ευαισθησίας της λύσης ενός προβλήματος μέσω της γραφικής επίλυσής του, η οποία μας βοηθά να κατανοήσουμε αυτόν ακριβώς το μηχανισμό επηρεασμού της λύσης ενός προβλήματος. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις που επιφέρουν στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ενός προβλήματος οι μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές και στα δεξιά μέλη των περιορισμών.

Μεταβολές σε κάποιον αντικειμενικό συντελεστή επηρεάζουν την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετική επιλογή βέλτιστης κορυφής, δηλαδή σε μεταβολή της βέλτιστης λύσης. Το πρώτο ζητούμενο από την ανάλυση ευαισθησίας της λύσης στην περίπτωση αυτή είναι να προσδιορίσουμε το διάστημα μέσα στο οποίο μπορεί να μεταβάλλεται η τιμή ενός αντικειμενικού συντελεστή, όταν οι τιμές όλων των άλλων παραμέτρων παραμένουν σταθερές, ώστε να μη μεταβληθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος. Το διάστημα αυτό ονομάζεται **εύρος ευαισθησίας του αντικειμενικού συντελεστή** (*objective function coefficient sensitivity* *range*). Προφανώς, όσο μικρότερο είναι το εύρος αυτό, τόσο πιο ευαίσθητη θεωρείται η λύση σε αλλαγές του συγκεκριμένου συντελεστή.

Μεταβολές στο δεξιό μέλος κάποιου περιορισμού προκαλούν παράλληλη μετατόπιση της αντίστοιχης περιοριστικής ευθείας, είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά της τρέχουσας θέσης της, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει, ανάλογα και με το αν ο περιορισμός είναι δεσμευτικός, ή μη, σε μεταβολή της εφικτής περιοχής και μετατόπιση της βέλτιστης κορυφής, δηλαδή της βέλτιστης λύσης. Το πρώτο ζητούμενο από την ανάλυση ευαισθησίας της λύσης στην περίπτωση αυτή είναι να προσδιορίσουμε το διάστημα μέσα στο οποίο μπορεί να μεταβάλλεται η τιμή του δεξιού μέλους του περιορισμού, όταν οι τιμές όλων των άλλων παραμέτρων παραμένουν σταθερές, ώστε να μη μεταβληθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος. Το διάστημα αυτό ονομάζεται **εύρος ευαισθησίας του δεξιού μέλους του περιορισμού** (*right hand side sensitivity range*). Προφανώς, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, όσο μικρότερο είναι το εύρος αυτό, τόσο πιο ευαίσθητη θεωρείται η λύση σε αλλαγές του δεξιού μέλους του συγκεκριμένου περιορισμού.

Ολοκληρώνοντας σημειώνουμε ότι στην ενότητα αυτή η ανάλυση ευαισθησίας θα περιορισθεί στην περίπτωση που κάθε φορά μεταβάλλεται η τιμή του αντικειμενικού συντελεστή μιας μόνο μεταβλητής ή του δεξιού μέλους ενός μόνον περιορισμού. Η διερεύνηση της περίπτωσης όπου μεταβάλλονται ταυτόχρονα οι τιμές περισσοτέρων του ενός αντικειμενικών συντελεστών ή δεξιών μελών περιορισμών, θα εξετασθεί στην ενότητα 3.5, όπου θα επανέλθουμε στο θέμα της ανάλυσης ευαισθησίας, για να το μελετήσουμε στο πλαίσιο όχι πλέον της γραφικής, αλλά της μαθηματικής επίλυσης ενός προβλήματος.

Όσα θεωρητικά αναφέρθηκαν παραπάνω για την ανάλυση ευαισθησίας της λύσης ενός προβλήματος θα εφαρμοστούν στη συνέχεια σε δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, εκ των οποίων το ένα είναι μεγιστοποίησης και το άλλο ελαχιστοποίησης.

2.4.2 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης

Ως πρόβλημα μεγιστοποίησης για την εφαρμογή της ανάλυσης ευαισθησίας της λύσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα θα χρησιμοποιηθεί το πρόβλημα που διατυπώθηκε και επιλύθηκε γραφικά στην υποενότητα 2.1.2.

Στην παρούσα υποενότητα, εφαρμόζοντας την ανάλυση ευαισθησίας, θα διερευνήσουμε τις μεταβολές που επιφέρουν στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης οι μεταβολές, αφενός, στους αντικειμενικούς συντελεστές και, αφετέρου, στα δεξιά μέλη των περιορισμών του προβλήματος.

2.4.2.1 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι μεταβολές σε κάποιον αντικειμενικό συντελεστή επηρεάζουν την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης και, κατά συνέπεια, τη βέλτιστη λύση. Το ζητούμενο εδώ είναι να προσδιοριστεί, για κάθε αντικειμενικό συντελεστή, το εύρος της ευαισθησίας του, δηλαδή το διάστημα στο οποίο μπορεί να μεταβάλλεται, όταν οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων είναι σταθερές, έτσι ώστε να μη μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζεται από την εξίσωση:

$$Z = 3x_1 + 8x_2 \text{ ή } 8x_2 = -3x_1 + Z \text{ ή } x_2 = -\frac{3}{8}x_1 + \frac{Z}{8} \tag{2.19}$$

Άρα η κλίση της είναι: $\lambda = -\frac{3}{8}$

Το πρώτο μας βήμα, λοιπόν, είναι να προσδιορίσουμε τα όρια του διαστήματος στα οποία μπορεί να λαμβάνει τιμές η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Στο Σχήμα 2.5 με τη γραφική επίλυση του προβλήματος που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 2.1.2, παρατηρούμε την περιοχή ΟΕΘΗΔ των εφικτών λύσεων και τη βέλτιστη κορυφή Θ (100, 350), για την οποία η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι: $Z = 3100$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ, το οποίο εμφανίζεται ως διακεκομμένο, παριστάνει την ευθεία που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση για $Z = 3100$.

Οποιαδήποτε αλλαγή σε κάποιον από τους δύο αντικειμενικούς συντελεστές επηρεάζει την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία ισούται με το λόγο, με αρνητικό πρόσημο, των δύο αντικειμενικών συντελεστών. Κατά συνέπεια, για κάθε αλλαγή στους συντελεστές της, η αντικειμενική συνάρτηση περιστρέφεται, με κέντρο τη βέλτιστη κορυφή Θ, είτε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού είτε κατά την αντίθετη φορά.

Όταν κινείται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού (Σχήμα 2.18 (α)), η κορυφή Θ θα συνεχίσει να είναι η βέλτιστη λύση μέχρι η αντικειμενική συνάρτηση να συμπέσει με το ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ παριστάνει την ευθεία:

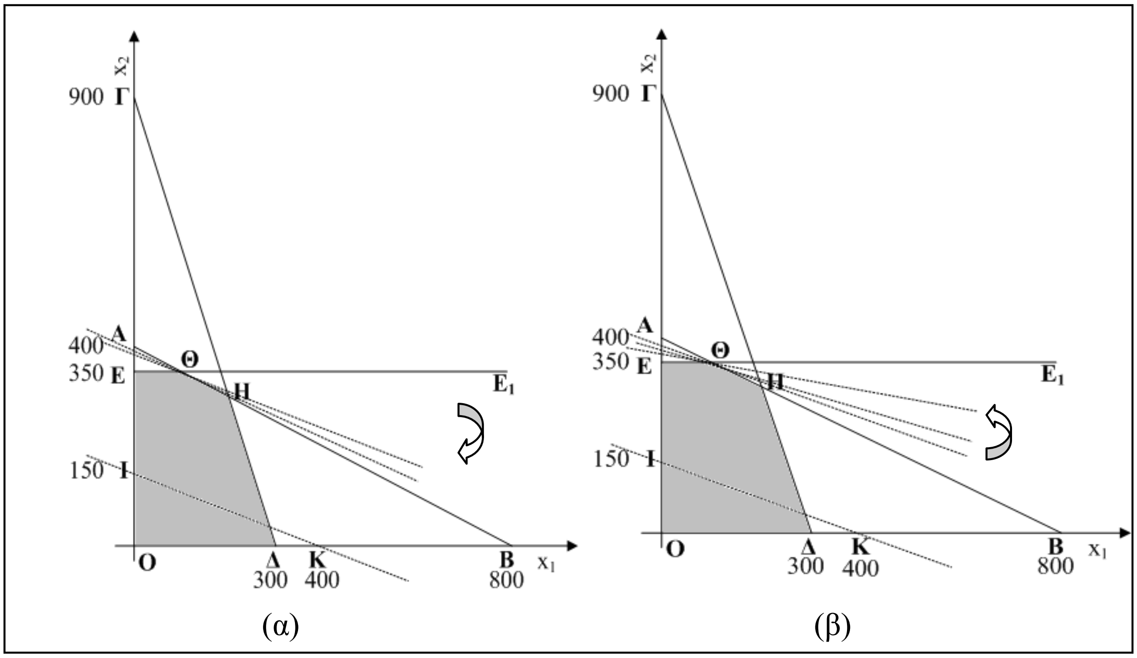
$$2x_1+4x_2=1600 \rightarrow 4x_2=-2x_1+1600 \rightarrow x_2=-\frac{1}{2}x_1+400 \tag{2.20}$$

της οποίας η κλίση είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$. Όταν συμβεί αυτό, θα υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις και συγκεκριμένα οι κορυφές Θ και Η καθώς και όλα τα (άπειρα) σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΘΗ. Αν η αντικειμενική συνάρτηση συνεχίσει να περιστρέφεται με την ίδια φορά, η κορυφή Θ θα πάψει να είναι η βέλτιστη λύση και τη θέση της θα λάβει η κορυφή Η (200,300).

Αντίστοιχα, όταν η αντικειμενική συνάρτηση κινείται αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού (Σχήμα 2.18 (β)), η κορυφή Θ θα συνεχίσει να είναι η βέλτιστη λύση μέχρι η αντικειμενική συνάρτηση να συμπέσει με το ευθύγραμμο τμήμα ΕΘ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΘ παριστάνει την ευθεία:

$$x_2=350 \rightarrow 0x_1+x_2=350 \rightarrow x_2=-0x_1+350 \tag{2.21}$$

της οποίας η κλίση είναι $\lambda_2=0$.



Σχήμα 2.18

Μεταβολή της βέλτιστης λύσης λόγω μεταβολής της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Όταν συμβεί αυτό, θα υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις και συγκεκριμένα οι κορυφές Ε και Θ καθώς και όλα τα (άπειρα) σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΕΘ. Αν η αντικειμενική συνάρτηση συνεχίσει να περιστρέφεται με την ίδια φορά, η κορυφή Θ θα πάψει να είναι η βέλτιστη λύση και τη θέση της θα λάβει η κορυφή Ε (0,350).

Με βάση τα παραπάνω, συνάγεται ότι, ανεξάρτητα από την πηγή προέλευσης της μεταβολής, όσο η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-1/2, 0]$, δηλαδή στο διάστημα που ορίζεται από τις κλίσεις των ευθειών που αντιστοιχούν στους δύο δεσμευτικούς περιορισμούς, τότε η λύση που έχει βρεθεί (κορυφή Θ) θα παραμένει η βέλτιστη, ενώ στα άκρα του διαστήματος θα υπάρχουν άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.

Έχοντας προσδιορίσει τα όρια του διαστήματος στο οποίο μπορεί να λαμβάνει τιμές η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση, θα προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του εύρους ευαισθησίας για κάθε αντικειμενικό συντελεστή, δηλαδή του διαστήματος στο οποίο μπορεί να κινείται χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Αρχίζουμε από τον αντικειμενικό συντελεστή της μεταβλητής x_1, τον οποίο συμβολίζουμε με c_1 και του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι $c_1 = 3$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε:

$$-\frac{1}{2} \le \lambda \le 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{c_1}{8} \le 0 \rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{c_1}{8} \ge 0 \rightarrow 0 \le c_1 \le 4$$

δηλαδή $c_1 \in [0,4]$

Άρα, όταν η τιμή πώλησης c_1 του προϊόντος Π_1 κινείται στο διάστημα [0,4], η κορυφή Θ (100,350) παραμένει η βέλτιστη. Στα άκρα του διαστήματος αυτού έχουμε, εκτός της Θ, άπειρες βέλτιστες εναλλακτικές λύσεις λόγω της σύμπτωσης της αντικειμενικής συνάρτησης με τις δεσμευτικές περιοριστικές ευθείες $x_2 = 350$ και $2x_1 + 4x_2 = 1600$ αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι, παρ' όλο που όταν το c_1 κινείται στο διάστημα [0,4] η βέλτιστη λύση δεν μεταβάλλεται, η τιμή Z της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή το συνολικό κέρδος της επιχείρησης, μεταβάλλεται, καθώς εξαρτάται από το c_1. Έτσι, για $c_1 = 2$, έχουμε: $Z = 2 \cdot 100 + 8 \cdot 350$, δηλαδή $Z = 3000$, αντί $Z = 3100$ που είχαμε για c_1 =3.

Γνωρίζοντας πλέον το εύρος ευαισθησίας του συντελεστή c_1, μπορούμε εναλλακτικά να προσδιορίσουμε, τόσο σε απόλυτους όρους (Δc_1) όσο και σε ποσοστό (Δc_1%), το εύρος της απόκλισης από την τρέχουσα τιμή του $c_1 = 3$, για το οποίο η βέλτιστη λύση δεν μεταβάλλεται. Προφανώς, αφού c_1=3 και $0 \le c_1 \le 4$, έχουμε: $-3 \le \Delta c_1 \le 1$, δηλαδή: $\Delta c_1 \in$[-3,1] ή $-100 \le \Delta c_1(\%) \le 33$, δηλαδή $\Delta c_1(\%) \in$ [-100,33].

Συνοψίζοντας τα ευρήματα για το συντελεστή c_1, έχουμε:

$$c_1 \in [0,4],\ \Delta c_1 \in [-3,1] \text{ και } \Delta c_1(\%) \in [-100,33] \tag{2.22}$$

Έχοντας προσδιορίσει τα παραπάνω διαστήματα, μπορούμε πλέον, εύκολα και άμεσα, να διαπιστώσουμε αν μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση όταν ο αντικειμενικός συντελεστής c_1 της μεταβλητής x_1 αυξηθεί ή μειωθεί κατά ένα συγκεκριμένο ποσό ή ποσοστό. Έτσι, αν, για παράδειγμα, ο συντελεστής c_1 μειωθεί κατά δύο μονάδες (Δc_1= -2), η βέλτιστη λύση δεν μεταβάλλεται, καθώς η μεταβολή αυτή σημειώνεται εντός του διαστήματος [-3,1] που προσδιορίστηκε παραπάνω. Αντίθετα, αν ο συντελεστής c_1 αυξηθεί κατά 40%

(Δc_1%=40), τότε η βέλτιστη λύση θα μεταβληθεί, καθώς η μεταβολή αυτή σημειώνεται εκτός του διαστήματος [-100,33], που επίσης προσδιορίστηκε παραπάνω.

Έχοντας ολοκληρώσει τη διερεύνηση για τον αντικειμενικό συντελεστή c_1 της μεταβλητής x_1, θα προχωρήσουμε στη διερεύνηση του συντελεστή της μεταβλητής x_2, τον οποίο συμβολίζουμε με c_2 και του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι: $c_2 = 8$. Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα, γνωρίζουμε ότι $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 0$ ή $-\frac{1}{2} \leq -\frac{3}{c_2} \leq 0$ και, εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση του c_1, βρίσκουμε τελικά ότι:

$$c_2 \in [6,+\infty], \Delta c_2 \in [-2,+\infty] \text{ και } \Delta c_2(\%) \in [-25,+\infty] \qquad (2.23)$$

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να διαπιστώνουμε, εύκολα και άμεσα, αν μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση όταν ο συντελεστής c_2 αυξάνεται ή μειώνεται κατά κάποιο ποσό ή ποσοστό.

2.4.2.2 Μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μεταβολές στο δεξιό μέλος κάποιου περιορισμού προκαλούν παράλληλη μετατόπιση της αντίστοιχης περιοριστικής ευθείας, είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά της τρέχουσας θέσης της, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει, ανάλογα με το αν ο περιορισμός είναι δεσμευτικός, ή μη, σε μεταβολή της εφικτής περιοχής και μετατόπιση της βέλτιστης κορυφής, δηλαδή της βέλτιστης λύσης. Το ζητούμενο εδώ είναι να προσδιοριστεί, για το δεξιό μέλος κάθε περιορισμού, το εύρος της ευαισθησίας του, δηλαδή το διάστημα στο οποίο μπορεί να μεταβάλλεται η τιμή του, όταν οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων είναι σταθερές, έτσι ώστε να μη μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Στο Σχήμα 2.5 με τη γραφική επίλυση του προβλήματος, το οποίο παρουσιάστηκε στην υποενότητα 2.1.2, παρατηρούμε τις περιοριστικές ευθείες ΑΒ, ΓΔ και $ΕΕ_1$, οι οποίες αντιστοιχούν στους τρεις περιορισμούς και προσδιορίζουν την περιοχή των εφικτών λύσεων ΟΕΘΗΔ και τη βέλτιστη κορυφή Θ (100,350), για την οποία η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι: $Z = 3100$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι οι περιορισμοί που αντιστοιχούν στις ευθείες $AB\left(2x_1+4x_2=1600\right)$ και $EE_1\left(x_2=350\right)$ είναι δεσμευτικοί, καθώς προσδιορίζουν τη βέλτιστη κορυφή Θ. Αντίθετα, ο περιορισμός που αντιστοιχεί στην ευθεία $\Gamma\Delta\left(6x_1+2x_2=1800\right)$ δεν είναι δεσμευτικός, καθώς δεν συμμετέχει στον προσδιορισμό της βέλτιστης κορυφής Θ.

Επειδή η επίδραση που έχει στη λύση του προβλήματος μία μεταβολή στο δεξιό μέλος ενός περιορισμού διαφέρει ανάλογα με το αν ο περιορισμός του οποίου το δεξιό μέλος μεταβάλλεται είναι δεσμευτικός, ή μη, θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση των δεσμευτικών περιορισμών και στη συνέχεια του μη δεσμευτικού.

Αρχίζουμε με τον πρώτο δεσμευτικό περιορισμό και συμβολίζουμε με b_1 το δεξιό μέλος του. Η περιοριστική ευθεία που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι η εξής:

$$2x_1+4x_2=b_1 \rightarrow x_2=-\frac{1}{2}x_1+\frac{b_1}{4} \tag{2.24}$$

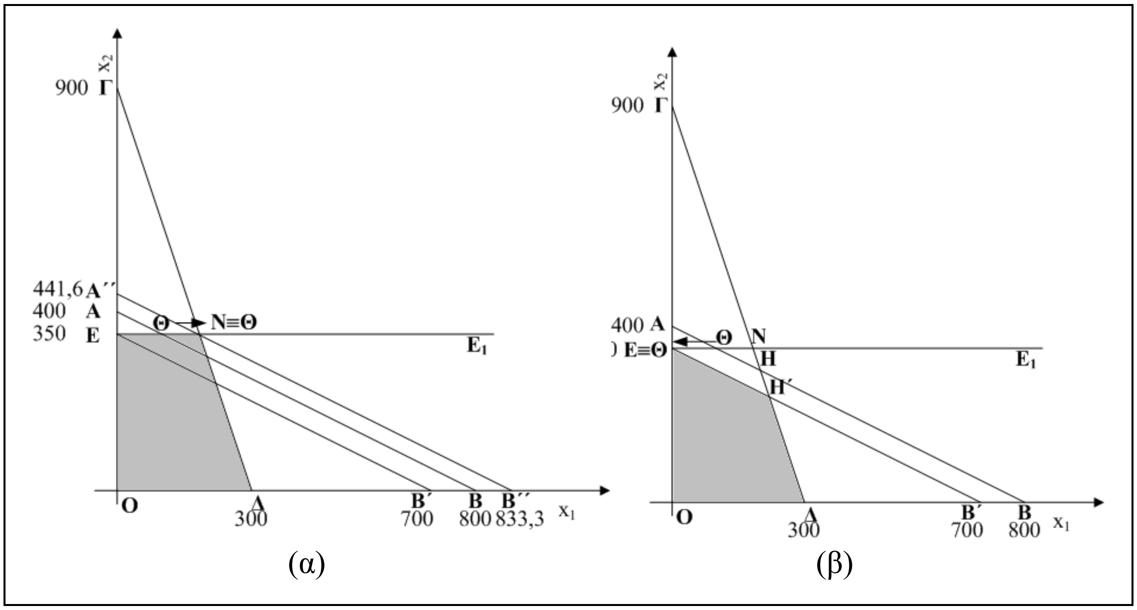
Για την τρέχουσα τιμή του δεξιού μέλους, η αντίστοιχη περιοριστική ευθεία συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Καθώς το b_1 αρχίζει να μεταβάλλεται, η κλίση της περιοριστικής ευθείας παραμένει σταθερή και ίση με -1/2, αφού δεν επηρεάζεται από το b_1, αλλά συγχρόνως η ευθεία ΑΒ αρχίζει να μετατοπίζεται παράλληλα είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά της τρέχουσας θέσης, ανάλογα με το αν το b_1 αυξάνεται ή μειώνεται. Κατά τη μετατόπιση αυτή, το σημείο Θ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΕΝ.

Κατά τη μετακίνηση του σημείου Θ πάνω στο ΕΝ, μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του, καθώς και το σχήμα της περιοχής των εφικτών λύσεων. Για την αριστερή ακραία θέση του Θ, δηλαδή όταν το Θ συμπίπτει με το Ε (0,350), η περιοριστική ευθεία έχει μετατοπιστεί στη θέση EB' και η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι η $OEH'\Delta$, αντί της αρχικής ΟΕΘΗΔ (Σχήμα 2.19 ((α)).

Αντίστοιχα, για τη δεξιά ακραία θέση του Θ, δηλαδή όταν το Θ συμπίπτει με το Ν (1100/6=183.33 , 350), η περιοριστική ευθεία έχει μετατοπιστεί στη θέση $A''B''$ και η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι η ΟΕΝΔ (Σχήμα 2.19 (β)).

Πάντως, όσο το σημείο Θ παραμένει στο ευθύγραμμο τμήμα ΕΝ, εξακολουθεί να είναι το βέλτιστο σημείο. Μόλις όμως βρεθεί έξω από το τμήμα αυτό, είτε προς τα δεξιά του Ν είτε προς τα αριστερά του Ε, τότε παύει πλέον να είναι το βέλτιστο σημείο.

Με βάση τα παραπάνω, είμαστε πλέον έτοιμοι να προσδιορίσουμε το εύρος της ευαισθησίας του b_1. Προς το σκοπό αυτόν, αντικαθιστούμε στο αριστερό μέλος της περιοριστικής ευθείας $2x_1+4x_2=b_1$ τις συντεταγμένες των ακραίων σημείων Ε και Ν και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές του b_1.



Σχήμα 2.19
Μεταβολή της εφικτής περιοχής
λόγω μεταβολής του δεξιού μέλους του πρώτου περιορισμού (b_1)

Έτσι στο σημείο Ε (0,350) έχουμε b_1=1400. Αντίστοιχα, στο σημείο Ν $(1100/6\,,350)$ έχουμε $b_1=1766.67$. Άρα, το εύρος της ευαισθησίας του b_1 είναι το διάστημα [1400 , 1766.67], δηλαδή $b_1\in[1400,1766.67]$.

Γνωρίζοντας πλέον το εύρος ευαισθησίας του πόρου b_1, μπορούμε εναλλακτικά να προσδιορίσουμε, τόσο σε απόλυτους όρους (Δb_1)όσο και σε ποσοστό (Δb_1%), το εύρος της απόκλισής του από την τρέχουσα τιμή του $b_1=1600$, για το οποίο η βέλτιστη λύση δεν μεταβάλλεται. Προφανώς, αφού $b_1=1600$ και $1400\le b_1\le 1766.67$, έχουμε:

$$-200\le\Delta b_1\le 176.67 \qquad \text{δηλαδή} \qquad \Delta b_1\in[-200,176.67]$$

$$-12.5\le\Delta b_1(\%)<11.1 \;\text{ δηλαδή }\; \Delta b_1(\%)\in[-12.5,11.1]$$

Συνοψίζοντας τα ευρήματα για το συντελεστή b_1, έχουμε:

$$b_1 \in [1400\,,1766.67],\ \Delta b_1 \in [-200,176.67] \text{ και } \Delta b_1(\%) \in [-12.5,11.1] \qquad (2.25)$$

Έχοντας προσδιορίσει τα παραπάνω διαστήματα, μπορούμε πλέον, εύκολα και άμεσα, να διαπιστώσουμε αν μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση καθώς και αν και κατά πόσο μεταβάλλονται οι τιμές των μεταβλητών απόφασης και της αντικειμενικής συνάρτησης, όταν ο πόρος b_1 αυξηθεί ή μειωθεί κατά ένα συγκεκριμένο πόσο ή ποσοστό. Έτσι, αν, για παράδειγμα, το b_1 αυξηθεί κατά 100 μονάδες ($\Delta b_1 = 100$), η βέλτιστη λύση παραμένει το σημείο Θ, γιατί η μεταβολή αυτή είναι εντός του διαστήματος που προσδιορίστηκε παραπάνω, αλλά οι συντεταγμένες του, δηλαδή οι τιμές των μεταβλητών απόφασης και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλονται.

Αντίθετα, αν ο πόρος b_1 μειωθεί κατά 20%, η βέλτιστη λύση μεταβάλλεται, καθώς η μεταβολή αυτή σημειώνεται εκτός του διαστήματος [-12.5,11.1], που επίσης προσδιορίστηκε παραπάνω. Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να εντοπίσουμε τη νέα βέλτιστη λύση και στη συνέχεια τις τιμές των μεταβλητών απόφασης και της αντικειμενικής συνάρτησης.

Έχοντας προσδιορίσει το εύρος της ευαισθησίας του b_1, μπορούμε να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του ρυθμού μεταβολής των x_1, x_2 και Z όταν το b_1 κινείται εντός των ορίων της ευαισθησίας του.

Προφανώς, καθώς η πρώτη περιοριστική ευθεία μετατοπίζεται παράλληλα, η θέση του Θ μεταβάλλεται, και σε κάθε νέα του θέση οι συντεταγμένες του προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$2x_1 + 4x_2 = 1600 + \Delta b_1 \text{ και } x_2 = 350$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό, έχουμε:

$$x_1 = 100 + \frac{\Delta b_1}{2}, x_2 = 350 \qquad (2.26)$$

Κατά συνέπεια, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται:

$$Z = 3x_1 + 8x_2 = 3\left(100 + \frac{\Delta b_1}{2}\right) + 8 * 350 \rightarrow Z = 3100 + \frac{3}{2}\Delta b_1 \qquad (2.27)$$

Οι τρεις παραπάνω σχέσεις εκφράζουν το ρυθμό μεταβολής των δύο μεταβλητών απόφασης x_1 και x_2 και της αντικειμενικής συνάρτησης Ζ, όταν το δεξιό μέλος του πρώτου περιορισμού κινείται μέσα στα όρια της ευαισθησίας του. Όπως φαίνεται, για κάθε μεταβολή του πρώτου πόρου κατά Δb_1, η τιμή του x_1 μεταβάλλεται κατά $\Delta b_1/2$, η τιμή του x_2 παραμένει αμετάβλητη και η τιμή του Z μεταβάλλεται κατά $3\Delta b_1/2$. Ειδικότερα, για κάθε αύξηση του πόρου b_1 κατά 1 μονάδα ($\Delta b_1 = 1$), η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται κατά $3/2$ μονάδες. Η βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης όταν το δεξιό μέλος ενός περιορισμού αυξηθεί κατά μία μονάδα, παραμένοντας όμως μέσα στο εύρος της ευαισθησίας του, δηλαδή η **οριακή αξία** (*marginal value*) μιας μονάδας του αντίστοιχου πόρου ονομάζεται **σκιώδης τιμή** (*shadow price*) ή **δυϊκή τιμή** (*dual price*) του αντίστοιχου πόρου. Άρα, η σκιώδης τιμή του πόρου b_1 είναι $3/2$. Ας σημειωθεί ότι η σκιώδης τιμή ενός πόρου παραμένει σταθερή μέσα στα όρια ευαισθησίας του, αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο έξω από αυτά.

Έχοντας ολοκληρώσει τη διερεύνηση για τον πρώτο περιορισμό, συνεχίζουμε με το δεύτερο δεσμευτικό περιορισμό $x_2 \leq 350$. Συμβολίζουμε με b_3 το δεξιό μέλος του, του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι $b_3 = 350$, ενώ η περιοριστική ευθεία που αντιστοιχεί σε αυτό είναι $x_2 = b_3$.

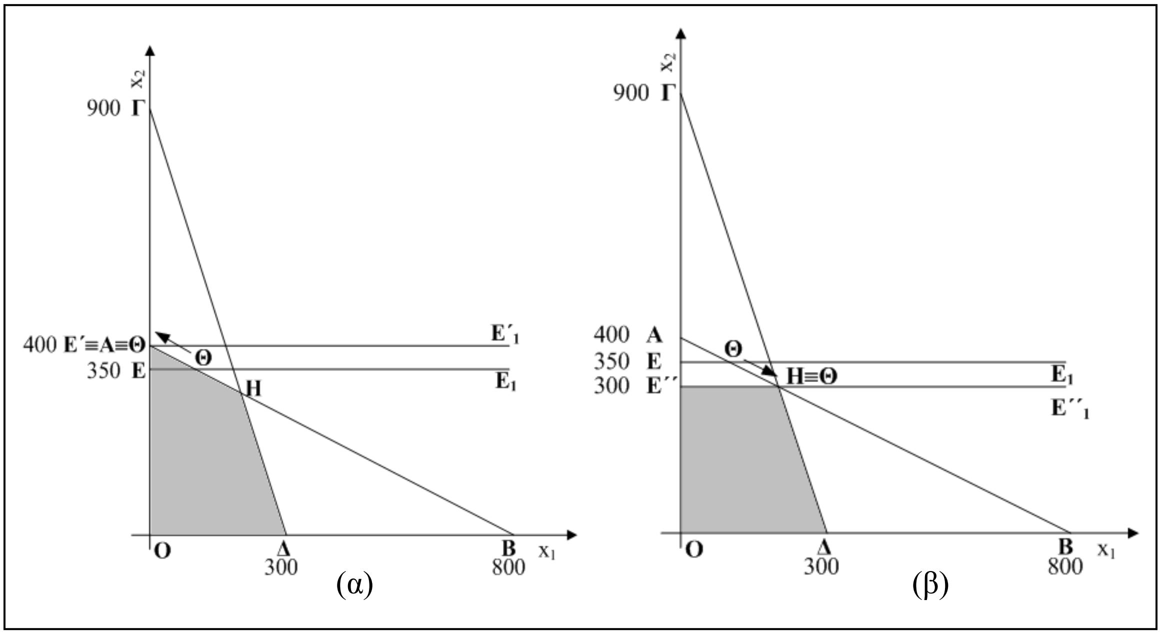
Η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα x_1 και τέμνει τον άξονα x_2 στο σημείο $(0, b_3)$. Για την τρέχουσα τιμή του δεξιού μέλους $b_3 = 350$, η περιοριστική αυτή ευθεία συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα EE_1.

Καθώς το b_3 αρχίζει να μεταβάλλεται, η περιοριστική ευθεία παραμένει παράλληλη προς τον άξονα x_1, αλλά συγχρόνως αρχίζει να μετατοπίζεται παράλληλα, είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω σε σχέση με την τρέχουσα θέση της, ανάλογα με το αν το b_3 αυξάνεται ή μειώνεται. Κατά τη μετατόπιση αυτή, το σημείο Θ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ και, προφανώς, μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του αλλά και το σχήμα της περιοχής των εφικτών λύσεων. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι, για την αριστερή ακραία θέση του Θ, δηλαδή όταν το Θ συμπίπτει με το Α $(0, 400)$, η περιοριστική ευθεία EE_1 έχει μετατοπιστεί στη θέση $A\mathrm{E}_1'$ (δηλαδή το Ε΄ συμπίπτει με το Α), και η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι η ΟΑΗΔ (Σχήμα 2.20 (α)). Αντίστοιχα, για τη δεξιά ακραία θέση του Θ, δηλαδή όταν το Θ συμπίπτει με το Η (200, 300), η περιοριστική ευθεία EE_1 έχει μετατοπιστεί στη θέση $\mathrm{E}''\mathrm{E}_1''$, και η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι η

ΟΕ″ΗΔ (Σχήμα 2.20 (β)). Πάντως, όσο το Θ παραμένει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ, εξακολουθεί να είναι το βέλτιστο σημείο. Μόλις όμως βρεθεί έξω από το τμήμα αυτό, είτε προς τα δεξιά του Η είτε προς τα αριστερά του Α, τότε παύει πλέον να είναι το βέλτιστο σημείο.

Με βάση τα παραπάνω, είμαστε πλέον έτοιμοι να προσδιορίσουμε το εύρος της ευαισθησίας του b_3. Εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση του b_1, βρίσκουμε ότι:

$$b_3 \in [300, 400],\ \Delta b_3 \in [-50, 50] \text{ και } \Delta b_3(\%) \in [-14.29, 14.29] \tag{2.28}$$



Σχήμα 2.20
Μεταβολή της εφικτής περιοχής
λόγω μεταβολής του δεξιού μέλους του τρίτου περιορισμού (b_3)

Μετά τον προσδιορισμό του εύρους της ευαισθησίας του b_3, προχωρούμε στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής των x_1, x_2 και Z όταν το b_3 κινείται στα όρια της ευαισθησίας τους. Εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση του b_1, βρίσκουμε ότι:

$$x_1 = 100 - 2\Delta b_3, x_2 = 350 + \Delta b_3, Z = 3100 + 2\Delta b_3 \tag{2.29}$$

Όπως φαίνεται, για κάθε μεταβολή του τρίτου πόρου κατά Δb_3, η τιμή του x_1 μεταβάλλεται κατά -$2\Delta b_3$, η τιμή του x_2 μεταβάλλεται κατά Δb_3 και η τιμή του Z μεταβάλλεται κατά $2\Delta b_3$. **Κατά συνέπεια, η σκιώδης τιμή του πόρου b_3 είναι 2**.

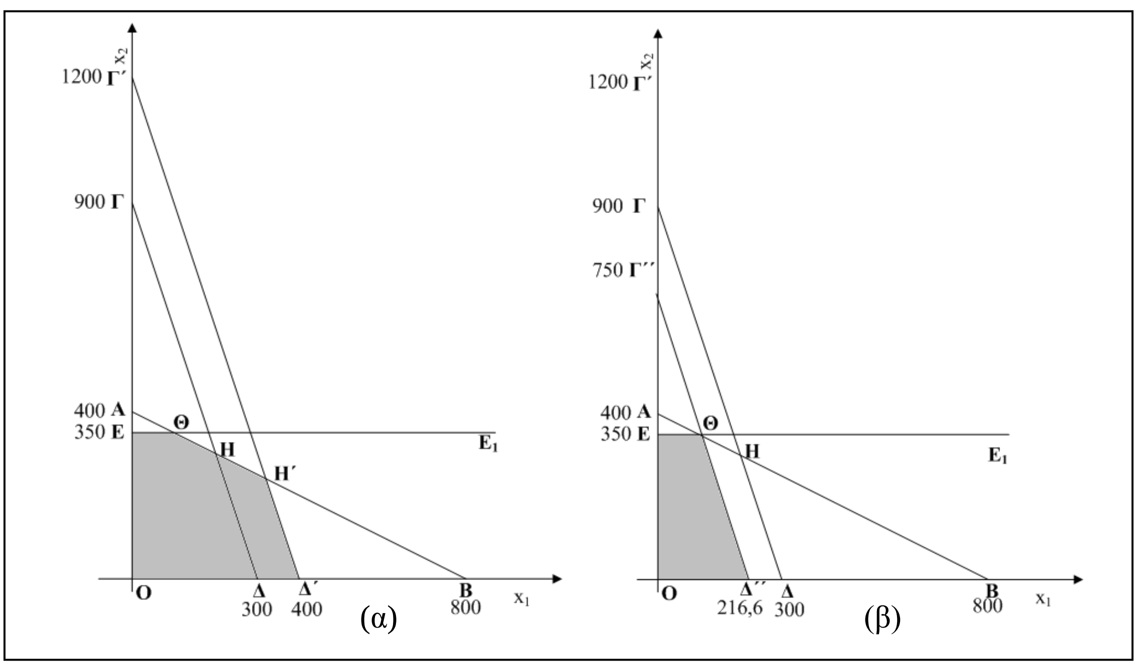
Αφού ολοκληρώσαμε τη διερεύνηση των δεσμευτικών περιορισμών, θα προχωρήσουμε στη διερεύνηση του μη δεσμευτικού περιορισμού $\left(6x_1+2x_2\leq 1800\right)$. Συμβολίζουμε με b_2 το δεξιό μέλος του, του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι $b_2=1800$. Η περιοριστική ευθεία που αντιστοιχεί σε αυτό είναι:

$$6x_1+2x_2=b_2 \rightarrow 2x_2=-6x_1+b_2 \rightarrow x_2=-3x_1+b_2/2 \tag{2.30}$$

Για την τρέχουσα τιμή του δεξιού μέλους $b_2=1800$, η περιοριστική αυτή ευθεία συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

Καθώς το b_2 αρχίζει να μεταβάλλεται, η κλίση της περιοριστικής ευθείας παραμένει σταθερή και ίση με -3, αφού δεν εξαρτάται από το b_2, αλλά συγχρόνως η ευθεία αρχίζει να μετατοπίζεται παράλληλα, είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά της τρέχουσας θέσης της, ανάλογα με το αν το b_2 αυξάνεται ή μειώνεται. Κατά τη μετατόπιση αυτή, το σημείο Θ, δηλαδή η βέλτιστη λύση, δεν μετακινείται, καθώς η ευθεία ΓΔ δεν μετέχει στον καθορισμό της θέσης του.

Όταν το b_2 αυξάνεται, η εφικτή περιοχή επεκτείνεται. Για παράδειγμα, αν η ΓΔ μετακινηθεί στη θέση $\Gamma'\Delta'$, η εφικτή περιοχή γίνεται $\mathrm{OE\Theta H'\Delta'}$ (Σχήμα 2.21 (α)). Αυτό, όμως, δεν έχει καμία επίπτωση στη βέλτιστη λύση, η οποία εξακολουθεί να είναι το σημείο Θ, καθώς η περιοριστική ευθεία ΓΔ δεν συμμετέχει στον προσδιορισμό της. Κατά συνέπεια, το ανώτερο όριο του διαστήματος ευαισθησίας του b_2 είναι το $+\infty$.



Σχήμα 2.21
Μεταβολή της εφικτής περιοχής
λόγω μεταβολής του δεξιού μέλους του δεύτερου περιορισμού (b_2)

Αντίθετα, όταν το b_2 μειώνεται, η εφικτή περιοχή συρρικνώνεται. Αυτό δεν έχει καμία επίπτωση στη βέλτιστη λύση όσο η μετακινούμενη ευθεία ΓΔ παραμένει μη περιοριστική, δηλαδή μέχρι να φτάσει στη θέση $\Gamma''\Delta''$, οπότε και οι τρεις περιοριστικές ευθείες τέμνονται στο σημείο Θ (Σχήμα 2.21 (β)).

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του ακραίου σημείου Θ (100, 350) στο αριστερό μέλος της περιοριστικής ευθείας $6x_1{+}2x_2 = b_2$ έχουμε:

$$6\cdot 100 + 2\cdot 350 = b_2 \rightarrow 600 + 700 = b_2 \rightarrow b_2 = 1300$$

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$b_2 \in [1300, +\infty), \Delta b_2 \in [-500, +\infty) \text{ και } \Delta b_2(\%) \in [27.78, +\infty) \tag{2.31}$$

Μετά τον προσδιορισμό του εύρους ευαισθησίας του b_2, προχωρούμε στον προσδιορισμό του ρυθμού μεταβολής των x_1, x_2 και Z, όταν το b_2 κινείται στα όρια της ευαισθησίας του. Εργαζόμενοι όπως και στις περιπτώσεις των b_1 και b_3, παρατηρούμε ότι, όταν η περιοριστική ευθεία μετατοπίζεται αλλά το b_2 διατηρείται στα όρια της ευαισθησίας του, η θέση του Θ δεν μεταβάλλεται και οι συντεταγμένες του παραμένουν σταθερές. Κατά συνέπεια, ο ρυθμός μεταβολής των x_1, x_2 και Z είναι μηδενικός και, επιπλέον, εφόσον η τιμή του Ζ παραμένει σταθερή, **η σκιώδης τιμή του πόρου b_2 είναι 0**.

Ολοκληρώνοντας την υποενότητα αυτή, σημειώνουμε μια σχέση που συνδέει τις χαλαρές μεταβλητές των περιορισμών με τις σκιώδεις τιμές των αντίστοιχων πόρων. Όπως προκύπτει από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, όταν ένας περιορισμός είναι δεσμευτικός η σκιώδης τιμή του αντίστοιχου πόρου είναι μη μηδενική, αλλά παράλληλα, όπως γνωρίζουμε από την υποενότητα 2.2.1, η χαλαρή μεταβλητή που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι μηδενική. Αντίστοιχα, όταν ο περιορισμός είμαι μη δεσμευτικός, η σκιώδης τιμή του αντίστοιχου πόρου είναι μηδενική, αλλά η χαλαρή μεταβλητή που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι μη μηδενική. Κατά συνέπεια, σε κάθε περίπτωση το γινόμενο της χαλαρής μεταβλητής ενός περιορισμού επί τη σκιώδη τιμή του αντίστοιχου πόρου είναι μηδενικό. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **συμπληρωματική χαλαρότητα** (*complementary slackness*).

2.4.3 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης, για την εφαρμογή της ανάλυσης ευαισθησίας που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη υποενότητα, θα χρησιμοποιηθεί το πρόβλημα που διατυπώθηκε στην υποενότητα 1.4.2 και επιλύθηκε γραφικά στην υποενότητα 2.1.3.

Στην παρούσα υποενότητα, εφαρμόζοντας την ανάλυση ευαισθησίας, θα διερευνήσουμε τις μεταβολές που επιφέρουν στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης οι μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές και στα δεξιά μέλη των περιορισμών του προβλήματος.

2.4.3.1 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές

Το ζητούμενο εδώ είναι να προσδιοριστεί, για κάθε αντικειμενικό συντελεστή, το εύρος της ευαισθησίας του, δηλαδή το διάστημα στο οποίο μπορεί να μεταβάλλεται, όταν οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων είναι σταθερές, έτσι ώστε να μη μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζεται από την εξίσωση:

$$Z = 150x_1 + 250x_2 \rightarrow 250x_2 = -150x_1 + Z \rightarrow x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{Z}{250} \qquad (2.32)$$

Άρα η κλίση της είναι: $\lambda = -\frac{3}{5}$.

Το πρώτο μας βήμα, λοιπόν, είναι να προσδιορίσουμε τα όρια του διαστήματος στα οποία μπορεί να λαμβάνει τιμές η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι, αν η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης λαμβάνει τιμές στο διάστημα [-3/2, -1/5], δηλαδή στο διάστημα που ορίζεται από τις κλίσεις των ευθειών που αντιστοιχούν στους δύο δεσμευτικούς περιορισμούς, τότε η λύση που έχει βρεθεί (κορυφή Θ) θα παραμένει η βέλτιστη, ενώ στα άκρα του διαστήματος θα υπάρχουν άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.

Έχοντας προσδιορίσει τα όρια του ζητούμενου διαστήματος, στο οποίο μπορεί να λαμβάνει τιμές η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση, θα προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του εύρους της ευαισθησίας για κάθε αντικειμενικό συντελεστή, δηλαδή του διαστήματος στο οποίο μπορεί να κινείται χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Αρχίζουμε από τον αντικειμενικό συντελεστή της μεταβλητής x_1, τον οποίο συμβολίζουμε με c_1 και του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι $c_1 = 150$. Εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, βρίσκουμε ότι:

$$c_1 \in [50, 375], \Delta c_1 \in [-100, 225] \text{ και } \Delta c_1(\%) \in [66.67, 150] \tag{2.33}$$

Αντίστοιχα, για το συντελεστή c_2, του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι: $c_2 = 250$, βρίσκουμε ότι:

$$c_2 \in [100, 750], \Delta c_2 \in [-150, 500] \text{ και } \Delta c_2(\%) \in [-60, 200] \tag{2.34}$$

Έχοντας προσδιορίσει τα παραπάνω διαστήματα, μπορούμε πλέον να διαπιστώνουμε, εύκολα και άμεσα, αν μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση όταν οι συντελεστές c_1 ή c_2 αντίστοιχα αυξάνονται ή μειώνονται κατά κάποιο ποσό ή ποσοστό.

2.4.3.2 Μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών

Το ζητούμενο εδώ είναι να προσδιοριστεί, για το δεξιό μέλος κάθε περιορισμού, το εύρος της ευαισθησίας του, δηλαδή το διάστημα στο οποίο μπορεί να μεταβάλλεται η τιμή του, όταν οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων είναι σταθερές, έτσι ώστε να μη μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Αρχίζουμε με τον πρώτο δεσμευτικό περιορισμό και συμβολίζουμε με b_1 το δεξιό μέλος του, του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι: $b_1 = 1500$.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι:

$$b_1 \in [720, 2800],\ \Delta b_1 \in [-780, 1300] \text{ και } \Delta b_1(\%) \in [-52, 86.67] \tag{2.35}$$

Στη συνέχεια, εργαζόμενοι επίσης όπως στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, βρίσκουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής των δύο μεταβλητών απόφασης x_1 και x_2 και της αντικειμενικής συνάρτησης Z, όταν το b_1 κινείται μέσα στα όρια της ευαισθησίας του, δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_1 = 30 + \frac{5\Delta b_1}{130}, x_2 = 30 - \frac{\Delta b_1}{130}, Z = 12000 + \frac{50\Delta b_1}{13} \tag{2.36}$$

Όπως φαίνεται, για κάθε μεταβολή του πρώτου πόρου κατά Δb_1, η τιμή του x_1 μεταβάλλεται κατά $5\Delta b_1/130$, η τιμή του x_2 μεταβάλλεται κατά $-\Delta b_1/130$ και η τιμή του Z μεταβάλλεται κατά $50\Delta b_1/13$.

Ειδικότερα, για κάθε αύξηση του πόρου b_1 κατά 1 μονάδα ($\Delta b_1 = 1$), η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται κατά $50/13$ μονάδες. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, η βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης, όταν το δεξιό μέλος ενός περιορισμού αυξηθεί κατά μία μονάδα, παραμένοντας όμως μέσα στο εύρος της ευαισθησίας του, δηλαδή η **οριακή αξία** μιας μονάδας του αντίστοιχου πόρου ονομάζεται **σκιώδης τιμή** ή **δυϊκή τιμή** του αντίστοιχου πόρου. Άρα, η σκιώδης τιμή του πόρου b_1 είναι $50/13$. Ας σημειωθεί ότι η σκιώδης τιμή ενός πόρου παραμένει σταθερή μέσα στα όρια της ευαισθησίας του, αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο έξω από αυτά.

Έχοντας ολοκληρώσει τη διερεύνηση για τον πρώτο περιορισμό, συνεχίζουμε με το δεύτερο δεσμευτικό περιορισμό $5x_1+25x_2 \geq 900$. Συμβολίζουμε με b_2 το δεξιό μέλος του, του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι: $b_2 = 900$.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι:

$$b_2 \in \left[\frac{4100}{6} = 683.33, 1875\right], \Delta b_2 \in \left[-216.67, 975\right] \text{ και } \Delta b_2(\%) \in \left[-24.11, 108.33\right] \tag{2.37}$$

Στη συνέχεια, εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης βρίσκουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής των δύο μεταβλητών απόφασης x_1 και x_2 και της αντικειμενικής συνάρτησης Z, όταν το b_1 κινείται μέσα στα όρια της ευαισθησίας του, δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_1 = 30 - \frac{4\Delta b_2}{130},\ x_2 = 30 + \frac{6\Delta b_2}{130},\ Z = 1200 + \frac{450\Delta b_2}{65} \qquad (2.38)$$

Όπως φαίνεται, για κάθε μεταβολή του τρίτου πόρου κατά Δb_2, η τιμή του x_1 μεταβάλλεται κατά $-4\Delta b_2/130$, η τιμή του **Σφάλμα! Τα αντικείμενα δεν μπορούν να δημιουργηθούν από την επεξεργασία κωδικών πεδίων.** μεταβάλλεται κατά $6\Delta b_2/130$ και η τιμή του Z μεταβάλλεται κατά $450\Delta b_2/65$. Άρα, η σκιώδης τιμή του πόρου b_2 είναι $450/65$.

Αφού ολοκληρώσουμε τη διερεύνηση των δεσμευτικών περιορισμών, θα προχωρήσουμε στη διερεύνηση του μη δεσμευτικού περιορισμού $(10x_2 \geq 200)$. Συμβολίζουμε με b_3 το δεξιό μέλος του, του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι: $b_3 = 200$.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι:

$$b_3 \in [0,300],\ \Delta b_3 \in [-200,100] \text{ και } \Delta b_3(\%) \in [-100,50] \qquad (2.39)$$

Τέλος, εργαζόμενοι όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, διαπιστώνουμε ότι, όταν η περιοριστική ευθεία μετατοπίζεται αλλά το b_3 διατηρείται στα όρια της ευαισθησίας του, η θέση του Θ δεν μεταβάλλεται και οι συντεταγμένες του παραμένουν σταθερές. Κατά συνέπεια, ο ρυθμός μεταβολής των x_1, x_2 και Z είναι μηδενικός και, επιπλέον, η σκιώδης τιμή του πόρου b_3 είναι 0.

Ολοκληρώνοντας την υποενότητα αυτή, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι επιβεβαιώνεται η σχέση της συμπληρωματικής χαλαρότητας που –όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην περίπτωση του προβλήματος της μεγιστοποίησης– συνδέει τις χαλαρές μεταβλητές των περιορισμών με τις σκιώδεις τιμές των αντίστοιχων πόρων τους. Πράγματι, σε κάθε περίπτωση το γινόμενο της χαλαρής μεταβλητής ενός περιορισμού επί τη σκιώδη τιμή του αντίστοιχου πόρου είναι μηδενικό.

2.4.4 Κόστος ευκαιρίας

Πολλές φορές, κατά την επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, διαπιστώνεται ότι η βέλτιστη λύση του περιέχει μεταβλητές απόφασης x_j με μηδενική τιμή ($x_j = 0$). Η είσοδος μιας τέτοιας, μη βασικής, μεταβλητής στη βάση και η παραγωγή μιας μονάδας της θα επιβαρύνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά ένα ποσό που ονομάζεται **κόστος ευκαιρίας** (*opportunity cost*) ή **μειωμένο κόστος** (*reduced cost*). **Με άλλα λόγια, το κόστος ευκαιρίας μιας μη βασικής μεταβλητής είναι το ποσό κατά το οποίο θα επιβαρυνθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αν η μεταβλητή αυτή καταστεί βασική και παραχθεί μία μονάδα της**. Η επιβάρυνση αυτή είναι η μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης στην περίπτωση της μεγιστοποίησης και η αύξηση της τιμής της στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης. Με βάση τα παραπάνω, για να καταστεί βασική μια μη βασική μεταβλητή, θα πρέπει να μηδενιστεί το κόστος ευκαιρίας της. Ο απλούστερος τρόπος για να γίνει αυτό είναι να μεταβληθεί ισόποσα ο αντικειμενικός συντελεστής της. Για το λόγο αυτόν, πολλές φορές αναφέρεται ότι **το κόστος ευκαιρίας μιας μη βασικής μεταβλητής είναι η τιμή κατά την οποία θα πρέπει να μεταβληθεί ο αντικειμενικός συντελεστής της ώστε να καταστεί βασική**. Προφανώς, το κόστος ευκαιρίας για τις βασικές μεταβλητές είναι μηδενικό.

Γενικά, το κόστος ευκαιρίας ($\text{o}c_j$) μιας μη βασικής μεταβλητής x_j δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\text{o}c_j = c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot m_i \tag{2.40}$$

όπου: c_j ο αντικειμενικός συντελεστής της

a_{ij} ο τεχνολογικός συντελεστής της στον περιορισμό *i*

m_i η σκιώδης τιμή του περιορισμού *i*

Η τιμή του κόστους ευκαιρίας μιας μη βασικής μεταβλητής μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Στην πράξη, όμως, αγνοούμε το πρόσημο του κόστους ευκαιρίας της μεταβλητής και θεωρούμε την απόλυτη τιμή του, η οποία εκφράζει τη βελτίωση που χρειάζεται ο αντικειμενικός συντελεστής της για να καταστεί η μεταβλητή αυτή βασική. Βελτίωση του αντικειμενικού συντελεστή θεωρείται εκείνη η μεταβολή του που αυξάνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στην περίπτωση ενός προβλήματος μεγιστοποίησης και τη μειώνει στην περίπτωση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Τα πακέτα λογισμικού για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού που θα παρουσιαστούν στο κεφάλαιο 5 δίνουν το κόστος ευκαιρίας για όλες τις μη βασικές μεταβλητές με μηδενική τιμή στη βέλτιστη λύση.