Μαθηματικά
Α΄ εξάμηνο

Παράγωγος

Μ. Μαύρη
m.mavri@ba.aegean.gr

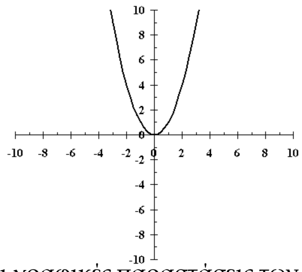
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Χειμερινό Εξάμηνο 2010-2011

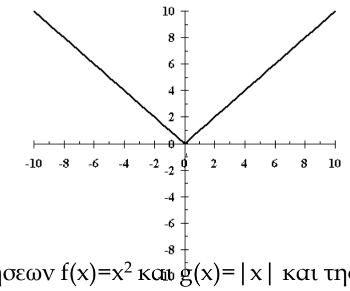
1

Περιεχόμενα

- **Απαραίτητες έννοιες για τον ορισμό της παραγώγου**
  (έννοια- ορισμός- πλευρικά όρια- παραδείγματα)
- **Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις & Παράγωγοι**
- **Βασικά Θεωρήματα**
  (Θ. Rolle, Θ. Μέσης Τιμής)
- **Κανόνας De l' Hospital**
- **Θεώρημα Fermat**
- **Κριτήριο 1ης παραγώγου**
- **Κριτήριο 2ης παραγώγου**

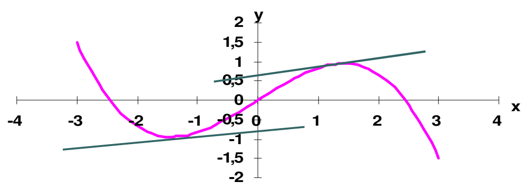
Βασικές Έννοιες για ορισμό της Παραγώγου 1





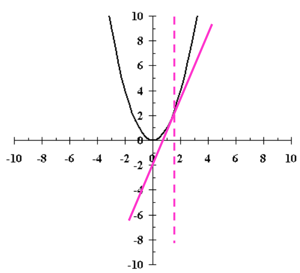
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=|x|$ και της $h(x)=x-x^3/6$

Οι f(x) και g(x) είναι παραδείγματα «κακής συμπεριφοράς» γιατί λυγίζουν γύρω από το μηδέν



Αντιθέτως ή συμπεριφορά της h(x) είναι διαφορετική. Μπορούμε να φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία σε σημεία της

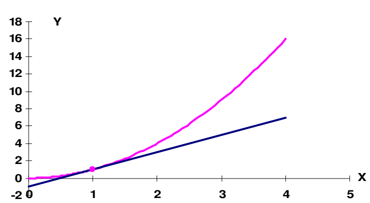
Βασικές Έννοιες για ορισμό της Παραγώγου 2



Σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι «εφαπτομένη» είναι η ευθεία που τέμνει την γραφική παράσταση μόνο μια φορά.
Δείτε τι συμβαίνει στην $f(x)=x^2$.
Οι ευθείες αυτές δεν είναι και οι δύο εφαπτόμενες, άρα χρειαζόμαστε μια **ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΣΥΝΘΗΚΗ**

Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο Α(1,1) πρέπει να είναι ίση με

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h^2+2h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2)=2$$



Η εφαπτόμενη ευθεία είναι η
$y-1=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-1$

Ορισμός Παραγώγου

Ορισμός: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν το $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

υπάρχει. Σ' αυτήν την περίπτωση το όριο συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και λέγεται

παράγωγος της f στο x_0

Ακόμη λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 για κάθε x_0

στο πεδίο ορισμού της f

Σχόλιο : Η προσθήκη στον ορισμό είναι η εξής: Ορίζουμε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι η ευθεία που περνάει από το $(x_0, f(x_0))$ και έχει κλίση $f'(x_0)$

Εναλλακτικά μπορούμε να έχουμε και τον επόμενο ορισμό

Ορισμός Παραγώγου

Ορισμός: Έστω f μια συνάρτηση τέτοια ώστε: $(x_0-h, x_0)\cup(x_0, x_0+h)\subseteq\Delta(f)$. Τότε η

συνάρτηση f θα λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 , αν το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει.

Ο αριθμός $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ λέγεται παράγωγος της f στο x_0. Η $f:A\to\Re$ θα

λέγεται παραγωγίσιμη στο A, αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.

Ορισμός Πλευρικών Ορίων

Μπορεί να μην υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ αλλά μπορεί να υπάρχουν τα πλευρικά

όρια, οπότε έχουμε

$$\left.\begin{aligned} f'_-(x_0)&=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \text{ή}\ f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ f'_+(x_0)&=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \text{ή}\ f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{aligned}\right\}$$

Αν ίσα τότε η f παραγωγίζεται στο x_0

Ορισμός Παραγώγου (2)

Αν η $f:A\to\Re$ είναι παραγωγίσιμη για όλα τα x_0 στο A, τότε ορίζεται μια καινούργια συνάρτηση $f':A\to\Re$ που θα την λέμε παράγωγο της f.

Η παράγωγος της f στο x_0 είναι πραγματικός αριθμός, ενώ η παράγωγος της f στο A είναι συνάρτηση.

Συνήθως χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό του Leibniz $\frac{d}{dx}f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{df}{dx}$

Παράδειγμα 1: $f(x)=x^2$

Παράδειγμα 2: $f(x)=|x-1|$

Σημείωση: Κάθε συνεχής συνάρτηση δεν είναι αναγκαστικά και παραγωγίσιμη. όμως κάθε παραγωγίσιμη είναι και συνεχής.

Θεώρημα: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0

Το αντίστροφο δεν ισχύει

Ισχύει: Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_0

Π.χ. $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ \sin\frac{1}{x}, x>0 \end{cases}$ Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού εκεί δεν είναι συνεχής

Κανόνες Παραγώγισης

Θεώρημα: Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και οι λf, $f \pm g$, $f \cdot g$, και f/g, $g(x_0) \pm 0$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0, και μάλιστα ισχύουν τα εξής:

(α) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

(β) $(f \pm g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(γ) $(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

(δ) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Θεώρημα (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης)

Αν η $f: \Delta(f) \to \Re$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η $g: R(f) \to \Re$ είναι παραγωγίσιμη στο $\beta=f(x_0)$ τότε και η gof είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(gof)'(x_0)=g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Θεώρημα (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)

Έστω $I\subseteq\Re$ ένα διάστημα και $f: I \to\Re$ μια γνήσια μονότονη και συνεχής συνάρτηση στο I. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha\in I$ και $f'(\alpha)\neq 0$, τότε η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}: f(I) \to\Re$ είναι παραγωγίσιμη στο $\beta=f(\alpha)$ και μάλιστα

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))} \text{Leibniz} \frac{dy}{dy} = \frac{1}{dy/dx}, x = f^{-1}(y)$$

Παράγωγοι Στοιχειωδών Συναρτήσεων

$$\left(\alpha^{x}\right)' = \alpha^{x}\log\alpha,\ x \in \Re, \alpha > 0$$

$$\left(\log|x|\right)' = \frac{1}{x},\ x \in \Re - \{0\}$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ x \in \Re$$

$$(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \Re$$

$$(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$(\text{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\pi, k \in Z$$

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

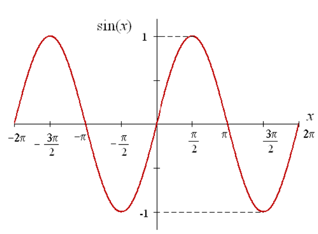
Επειδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι 1-1 πρέπει να τις περιορίσουμε σε κατάλληλα διαστήματα προκειμένου να βρούμε τις αντίστροφες τους. Το μεγαλύτερο δυνατό μήκος που παίρνουμε είναι π και συνήθως διαλέγουμε τα διαστήματα

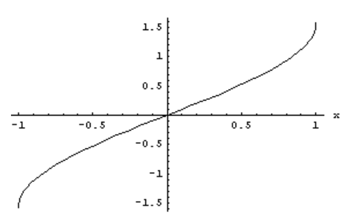
[-π/2,π/2] για sinx

[0,π] για cosx

(-π/2, π/2) για tan

Η αντίστροφη της f(x)=sinx, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ συμβολίζεται με **arcsin** και έχει πεδίο ορισμού το **[-1,1]**





Θεώρημα Rolle

Θεώρημα: (Θεώρημα Rolle) Υποθέτουμε ότι:

(1)Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]

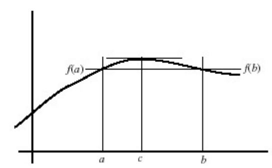
(2)Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β)

(3)f(α)=f(β)

τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(c)=0$

Προσοχή: Στην περίπτωση που f(α)=f(β)=0 τότε το θ. Rolle διατυπώνεται ως εξής: Μεταξύ δύο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, υπάρχει τουλάχιστο μια ρίζα της παραγώγου

Γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο c ∈(α,β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο x =c είναι παράλληλη προς τον άξονα των x .



Καμιά από τις υποθέσεις δεν μπορεί να παραληφθεί:

(1) Εστω $f:[0,1]\to\Re$

$$f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<1 \\ 0, x=1\end{cases}$$

Η f παραγωγισιμη στο $(0,1)$ με $f(0)=f(1)=0$. Ομως $f'(x)=1\ \forall x\in(0,1)$

Αυτο συμβαινει γιατι η f δεν ειναι συνεχης στο $[0,1]$, αφου $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)=1\neq f(1)=0$

Θεώρημα Rolle

(2)

Εστω $f:[0,1]\to\Re$ $f(x)=\begin{cases} x,\ 0\le x<\frac{1}{2} \\ 1-x, \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$

Η f ειναι συνεχης στο $[0,1]$ με $f(0)=f(1)=0$ αλλα δεν ειναι παραγωγισιμη στο $\frac{1}{2}\in(0,1)$ γιατι

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 1/2-}\frac{x-1/2}{x-1/2}=1\quad f'_+\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 1/2+}\frac{1-x-1/2}{x-1/2}=-1$$

Συνεπως δεν υπαρχει $\xi\in(0,1):f'(\xi)=0$

(3)

Εστω $f:[1,2]\to\Re$ $f(x)=x^2$

Η f ειναι συνεχης στο $[1,2]$, παραγωγισιμη στο $(1,2)$ αλλα η f' δεν μηδενιζεται στο $(1,2)$ γιατι $f(1)=1\neq 4=f(2)$

Παράδειγμα: Εστω $f:\left[0,\frac{1}{\pi}\right]\to\Re, f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0,\ x=0\end{cases}$

Νδο έχει μια ρίζα η $f'(x)$

Θεώρημα Rolle

Το αντίστροφο του θ.Rolle δεν ισχύει.

Δηλαδή η f′ μπορεί να μηδενίζεται χωρίς να ισχύουν οι τρεις συνθήκες. Άρα οι υποθέσεις του θ.Rolle είναι **ικανές** για τον μηδενισμό της παραγώγου σε κάποιο σημείο ξ σε ένα διάστημα (α,β) αλλά **όχι αναγκαίες**

Θεώρημα:Έστω f: [α,β] →ℜ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β). Αν η παράγωγος f′(x) δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β) τότε η f έχει το πολύ μια ρίζα σ′ αυτό το διάστημα.

Παρατήρηση: Με το **θ.Bolazano** εξασφαλίζουμε ότι έχει **τουλάχιστο μια** ρίζα
Με το παραπάνω **θεώρημα** ότι έχει **το πολύ μια** ρίζα.
Συνδυασμός αυτών δίνει ότι έχει **ακριβώς μια** ρίζα

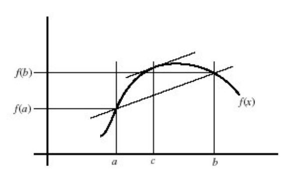
Γενίκευση του θεωρήματος: Αν η f′ έχει μια ρίζα τότε η f έχει το πολύ δύο ρίζες

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι η x-ksinx+1=0 με 0<k<1, έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θεώρημα: (Θεώρημα Μέσης Τιμής) Υποθέτουμε ότι:
(1)Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
(2)Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β)
τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα c∈(α,β) τέτοιο ώστε:

$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)\, f'(c)$$



Γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο c ∈(α,β) τέτοιο ώστε
η εφαπτομένη στο σημείο x =c είναι παράλλήλη στην χορδή AB.

Παράδειγμα:

$$\text{Εστω } f:\Re\to\Re, f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x<1\\[4pt] \dfrac{1}{x}, & x\ge 1\end{cases}$$

Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. Τι παρατηρείτε???

Θεώρημα: Έστω f: [α,β] →ℜ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β). Αν η παράγωγος f′(x)=0, ∀x∈ (α,β) τότε η f είναι σταθερή στο[α,β]

Πόρισμα: Έστω f και g: [α,β] →ℜ είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμες στο ανοιχτό διάστημα (α,β). Αν η παράγωγος f′(x)=g′(x), ∀x∈ (α,β) τότε υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε: f(x)=g(x)+c ∀x∈ [α,β]

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι $\sin^2 x=1/2(1-\cos 2x)$

Παράδειγμα: Ανισότητες

$$\text{Νδο } \frac{x-1}{x} < \log x < x-1, x > -1$$

Θεωρουμε $f(x) = \log x, x \geq 1$. Εφαρμοζουμε ΘΜΤ στο διαστημα $[1, x]$:

$$\log x - \log 1 = (x-1)\frac{1}{\xi}, 1 < \xi < x$$

$$\log x = \frac{x-1}{\xi}, 1 < \xi < x. \text{ Αλλα } 1 < \xi < x \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi} < 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x} < \frac{x-1}{\xi} < x-1$$

$$\frac{x-1}{x} < \log x < x-1, x > -1$$

Απροσδιόριστες Μορφές- Κανόνας De l' Hospital

Θεώρημα: Έστω f και g παραγωγίσιμες στο (α, β). Υποθέτουμε ότι:

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x) = 0 = \lim_{x\to\alpha+} g(x) \text{ η}$$

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to\alpha+} g(x)$$

$$\text{Αν το } \lim_{x\to\alpha+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \text{ τοτε και } \lim_{x\to\alpha+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Αν και τα όρια των f′ και g′ στο x_0 είναι 0 Τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα για τις δεύτερες παραγώγους

Παραδείγματα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log(x) = 0, \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{2x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} (1+x)^{1/x}$$

Μελέτη Συνάρτησης

<u>ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: I \to \Re$ είναι παραγωγίσιμη στο I, τότε:

1) η f είναι αύξουσα στο I αν και μόνο αν $f'(x) \geq 0, \ \forall \ x \in I$

2) η f είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο αν $f'(x) \leq 0, \ \forall \ x \in I$

3) Αν $f'(x) > 0$ (αντίστοιχα $f'(x) < 0$) $\forall \ x \in I$ τότε γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα, γνησίως φθίνουσα) χωρίς να ισχύει το αντίστροφο.

<u>Παράδειγμα</u> $e^x > 1 + x, \forall x > 0$ Κ μέθοδος του πρόσημου των παραγώγων Κ

Μελέτη Συνάρτησης

<u>ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

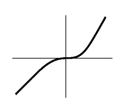
<u>Ορισμός</u> : Έστω $f: I \to \Re$. Θα λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο (αντ. τοπικό ελάχιστο) στο $\alpha \in I$, αν και μόνο αν, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(\alpha)$ (αντ. $f(x) \geq f(\alpha)$), $\forall \ x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap I$

<u>Θεώρημα: (</u>Θεώρημα Fermat)

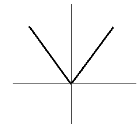
Έστω $f: I \to \Re$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $\alpha \in I$. Τότε αν υπάρχει η $f'(\alpha)$, αναγκαστικά θα πρέπει $f'(\alpha) = 0$.

Παρατήρηση

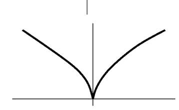
(1) Η συνθήκη $f'(\alpha) = 0$ είναι αναγκαία για την ύπαρξη ακροτάτου αλλά όχι ικανή, π.χ. $f(x) = x^5$



(2) Η f μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο στο α αλλά η $f'(\alpha)$ να μην υπάρχει. Π.χ. $f(x) = |x|$



(3) Η f' μπορεί να μην υπάρχει σε ένα σημείο και να μην παρουσιάζει και ακρότατο πχ.f(x)= $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in [-1, 1]$



Μελέτη Συνάρτησης

<u>ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

Πιθανά σημεία ακρότατων:

- Υπάρχει η παράγωγος και είναι μηδέν
- Δεν υπάρχει η παράγωγος

Αυτά λέγονται κρίσιμα σημεία

Π.χ. $f:\Re \to \Re \;\; f(x)=\begin{cases} x^3, x<1 \\ (x-2)^2, x \geq 1 \end{cases}$

<u>Θεώρημα: (</u>Κριτήριο $1^{ης}$ παραγώγου)

Έστω f: [α,β] $\to \Re$ μια συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στα (α,x_0) και (x_0,β). Τότε:

1. Αν υπάρχει μια περιοχή $(x_0-\delta, \; x_0+\delta) \subseteq [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f'(x) \geq 0$ για $x_0-\delta<x< \; x_0$ και $f'(x) \leq 0$ για $x_0 < x < x_0+\delta$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0
2. Αν υπάρχει μια περιοχή $(x_0-\delta, \; x_0+\delta) \subseteq [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f'(x) \leq 0$ για $x_0-\delta<x< \; x_0$ και $f'(x) \geq \; 0$ για $x_0 < x < x_0+\delta$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0

Παράδειγμα: $f:\Re \to \Re \;\; f(x)=\begin{cases} x^2, x \leq 1 \\ 2-x, x>1 \end{cases}$

Μελέτη Συνάρτησης

<u>ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

<u>Θεώρημα: (</u>Κριτήριο $2^{ης}$ παραγώγου)

Έστω f: (α,β) $\to \Re$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη και $f'(x_0)=0$ με $x_0 \in (\alpha,\beta)$

1. Αν $f''(x_0)>0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0
2. Αν $f''(x_0)<0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0

<u>Παράδειγμα:</u> Να εξεταστεί ως προς τα ακρότατα $f(x)=x+2\cos x, x \in [0,2\pi)$

<u>Ολικό Ελάχιστο και Ολικό Μέγιστο</u>

Βρίσκω τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης και συγκρίνουμε με τις τιμές της f στα άκρα του διαστήματος, αν αυτό είναι κλειστό, ή με τα όρια της f στα άκρα αν το διάστημα είναι ανοιχτό. Το μικρότερο είναι το ολικό ελάχιστο και το μεγαλύτερο το ολικό μέγιστο

Ορισμός Παραγώγου

Αναζήτηση ασύμπτωτων ευθειών

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν είναι συνεχής
- Στο $+\infty, -\infty$ εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής

  $(\alpha, +\infty), (-\infty, \alpha)$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{e^x}$

Παράδειγμα: Να μελετήσετε τη συνάρτηση f(x)=x + sinx στο διάστημα [-π,π]