ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

# Σημειώσεις Επιχειρησιακής Έρευνας

**Β.Αγγελής**

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Επίλυση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex

## Σκοπός

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η παρουσίαση μιας εναλλακτικής μεθόδου επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, η οποία ονομάζεται μέθοδος Simplex. Μετά την παρουσίαση των βασικών βημάτων της μεθόδου Simplex, ακολουθεί η αναλυτική εφαρμογή της σε διάφορες μορφές προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ανάλυση ευαισθησίας της λύσης τους.

## Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού, θα είστε σε θέση να:

- επιλύετε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex και να εντοπίζετε τη βέλτιστη λύση τους·
- αντιμετωπίζετε και να επιλύετε με τη μέθοδο Simplex ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων, όπως προβλήματα με άπειρες λύσεις, προβλήματα χωρίς εφικτή λύση και μη φραγμένα προβλήματα·
- προβαίνετε στην ανάλυση ευαισθησίας της λύσης τους, δηλαδή να εξετάζετε τις μεταβολές που επιφέρουν στη βέλτιστη λύση τους οι μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων τους και ειδικότερα στις τιμές των αντικειμενικών συντελεστών και των δεξιών μελών των περιορισμών τους.

## Έννοιες-Κλειδιά

- Αναθεωρημένος πίνακας Simplex
- Αλγόριθμος βελτιστοποίησης
- Ανάλυση ευαισθησίας
- Κανόνας ποσοστού 100%
- Κόστος ευκαιρίας/μειωμένο κόστος
- Κριτήριο

τερματισμού/βελτιστοποίησης

- Αντικειμενικός συντελεστής
- Αξονική γραμμή/γραμμή-οδηγός
- Αξονική στήλη/στήλη-οδηγός
- Αξονικό στοιχείο/στοιχείο-οδηγός
- Αρχική βασική εφικτή λύση
- Αρχικός πίνακας Simplex
- Βάση
- Βασική εφικτή λύση
- Βασική μεταβλητή
- Βέλτιστη βασική εφικτή λύση
- Βέλτιστη λύση
- Βελτιστοποίηση
- Γενική μορφή μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού
- Διαφορική απόδοση
- Εισερχόμενη μεταβλητή
- Εκφυλισμένη βασική λύση
- Εναλλακτική βέλτιστη λύση
- Εξερχόμενη/απερχόμενη μεταβλητή
- Επαναληπτική διαδικασία
- Επανάληψη
- Εύρος ευαισθησίας αντικειμενικού συντελεστή
- Εύρος ευαισθησίας δεξιού μέλους
- Εύρος ευαισθησίας
- Ισοβαθμία εισερχόμενης μεταβλητής
- Ισοβαθμία εξερχόμενης μεταβλητής
- Μέθοδος/αλγόριθμος Simplex
- Μέθοδος του μεγάλου Μ
- Μεταβλητή απόφασης
- Μεταβλητή περιθωρίου
- Μεταβλητή πλεονάσματος
- Μέτρο/κριτήριο απόδοσης
- Μη βασική μεταβλητή
- Μη φραγμένο πρόβλημα
- Μοναδιαίος πίνακας
- Οριακή αξία
- Δεσμευτικός/ενεργός περιορισμός
- Περιορισμός μη αρνητικότητας
- Μη δεσμευτικός/αδρανής περιορισμός
- Πίνακας Simplex
- Πλεονασματική μεταβλητή
- Πλήθος επαναλήψεων
- Σταθερά δεξιού μέλους
- Συνθήκη αριστότητας
- Σύνολο εφικτών λύσεων
- Συντελεστής ανταλλαγής/υποκατάστασης
- Συντελεστής απόδοσης
- Τελικός πίνακας Simplex
- Τεχνητή μεταβλητή
- Τεχνολογικός συντελεστής
- Τρέχουσα λύση

- Καθαρή συνεισφορά
- Κανόνας ελάχιστου πηλίκου/κριτήριο εφικτότητας
- Τυπική μορφή μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού
- Χαλαρή μεταβλητή

## Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται η μέθοδος Simplex, η οποία χρησιμοποιείται για την επίλυση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού με περισσότερες από δύο μεταβλητές αλλά και ως εναλλακτική της γραφικής μεθόδου για προβλήματα με δύο μεταβλητές.

Οι **δύο πρώτες ενότητες** αναφέρονται στις βασικές έννοιες της μεθόδου και στις προϋποθέσεις εφαρμογής της.

Στην **τρίτη ενότητα** περιγράφονται τα βασικά βήματα της μεθόδου Simplex και στη συνέχεια εφαρμόζονται για την επίλυση δύο προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, ενός μεγιστοποίησης και ενός ελαχιστοποίησης, και για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης τους.

Στην **τέταρτη ενότητα** το ενδιαφέρον εστιάζεται στην επίλυση, με τη μέθοδο Simplex, ειδικών προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού χωρίς μοναδική βέλτιστη λύση, τα οποία απαιτούν ιδιαίτερη αντιμετώπιση. Τέτοια είναι τα προβλήματα με άπειρες λύσεις, τα προβλήματα χωρίς εφικτή λύση και τα μη φραγμένα προβλήματα.

Τέλος, στην **πέμπτη ενότητα** διερευνάται η ευαισθησία της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, δηλαδή οι μεταβολές που παρατηρούνται σε αυτήν όταν συμβαίνουν μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων του και ειδικότερα στις τιμές των αντικειμενικών συντελεστών και των δεξιών μελών των περιορισμών του.

## Ενότητα 3.1

## Βασικές έννοιες

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε η μέθοδος γραφικής επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια ιδιαίτερα χρήσιμη εισαγωγή στη λογική του γραμμικού προγραμματισμού, αλλά η εφαρμογή της περιορίζεται ουσιαστικά στην επίλυση προβλημάτων με δύο μεταβλητές. Η χρήση της για την επίλυση προβλημάτων με τρεις μεταβλητές είναι θεωρητικά δυνατή αλλά στην πράξη σπάνια χρησιμοποιείται λόγω της δυσκολίας της γραφικής απεικόνισης των περιορισμών και της αντικειμενικής συνάρτησης στον τρισδιάστατο χώρο. Είναι λοιπόν προφανές ότι για την ευκολότερη αντιμετώπιση προβλημάτων με περισσότερες από τρεις μεταβλητές απαιτείται μια διαφορετική μέθοδος. Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιαστεί μια εναλλακτική μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων, η οποία ονομάζεται **μέθοδος Simplex** (*Simplex method/algorithm*).

Η μέθοδος Simplex είναι ένας **αλγόριθμος βελτιστοποίησης** (*optimization algorithm*) με μικρό αριθμό επαναλαμβανόμενων βημάτων, τα οποία μπορούν εύκολα να κωδικοποιηθούν και να προγραμματιστούν σε Η/Υ. Η ραγδαία εξέλιξη και διάδοση των υπολογιστών κατά τα τελευταία χρόνια έχει καταστήσει τη μέθοδο Simplex μια ευρύτατα χρησιμοποιούμενη και ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδο για την αντιμετώπιση πολλών επιχειρηματικών προβλημάτων και για την υποστήριξη της λήψης αντίστοιχων επιχειρηματικών αποφάσεων.

Με τη μέθοδο Simplex, το μοντέλο τού υπό μελέτη προβλήματος παριστάνεται αρχικά με τη μορφή ενός πίνακα, ο οποίος ονομάζεται **αρχικός Πίνακας Simplex** (*Initial Simplex Table/Tableau*) και εκφράζει την **αρχική βασική εφικτή λύση** (*initial basic feasible solution*). Η λύση αυτή αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων της γραφικής λύσης. Στη συνέχεια, με στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ των στοιχείων του αρχικού πίνακα Simplex, δημιουργούμε διαδοχικούς ενδιάμεσους πίνακες Simplex, οι οποίοι εκφράζουν διαρκώς βελτιούμενες βασικές εφικτές λύσεις που αντιστοιχούν σε διαδοχικές κορυφές της εφικτής περιοχής της γραφικής λύσης και τελικά καταλήγουμε στη **βέλτιστη βασική εφικτή λύση** (*best basic feasible solution*), που αντιστοιχεί στη βέλτιστη κορυφή της γραφικής λύσης.

## Ενότητα 3.2

## Γενική, κανονική και τυπική μορφή του μοντέλου

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού προϋποθέτει το μοντέλο του προβλήματος να έχει διατυπωθεί με μια συγκεκριμένη μορφή, η οποία ονομάζεται τυπική μορφή. Προτού λοιπόν προχωρήσουμε στην παρουσίαση της μεθόδου Simplex, θα αναφερθούμε στις τρεις μορφές του μοντέλου ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και συγκεκριμένα: α) στη **γενική μορφή** (*general form*), β) στην **κανονική μορφή** (*canonical form*) και γ) στην **τυπική μορφή** (*standard form*).

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να εμφανιστεί με μια ποικιλία διαφορετικών μορφών ως προς:

- το είδος της αντικειμενικής συνάρτησης (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση)·
- τον τύπο των περιορισμών δομής $(\leq, =, \geq)\cdot$
- το πεδίο ορισμού των μεταβλητών απόφασης (μη αρνητικές μεταβλητές, μη θετικές μεταβλητές, μεταβλητές χωρίς περιορισμό στο πρόσημο, άνω-κάτω φραγμένες μεταβλητές).

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης, με *n* μεταβλητές απόφασης (π.χ., διαφορετικές δραστηριότητες που μπορούν να υλοποιηθούν ή διαφορετικά προϊόντα που μπορούν να παραχθούν από την επιχείρηση) και *m* περιορισμούς (π.χ., διαθεσιμότητα των πόρων που θα χρησιμοποιηθούν, απαιτήσεις για την παραγωγή των προϊόντων). Στην περίπτωση αυτή, η **γενική μορφή** του μοντέλου είναι η ακόλουθη:

Μεγιστοποίηση/ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3.1)

$$\mathrm{Z} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

με περιορισμούς δομής:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq (=, \geq) b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq (=, \geq) b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m$$

και

$$x_j \in R,\ j = 1, \ldots, n$$

όπου:

$x_j,\ j = 1, \ldots, n$: Οι **μεταβλητές απόφασης**, δηλαδή τα επίπεδα των δραστηριοτήτων που θα υλοποιηθούν ή οι ποσότητες των προϊόντων που θα παραχθούν.

$c_j,\ j = 1, \ldots, n$: Οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στην αντικειμενική συνάρτηση. Οι συντελεστές αυτοί ονομάζονται **αντικειμενικοί συντελεστές** ή **συντελεστές απόδοσης**, επειδή εκφράζουν τη συνεισφορά των αντίστοιχων μεταβλητών απόφασης στη διαμόρφωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης.

$b_i, i = 1, \ldots, m$: Οι **σταθερές των δεξιών μελών των περιορισμών**. Στους περιορισμούς τύπου $\leq$ εκφράζουν τις μέγιστες διαθέσιμες ποσότητες των αντίστοιχων πόρων, ενώ στους περιορισμούς τύπου $\geq$ εκφράζουν τις ελάχιστες απαιτήσεις για την υλοποίηση των δραστηριοτήτων ή την παραγωγή των προϊόντων.

$a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\quad j = 1, \ldots, n$: Οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στους περιορισμούς. Οι συντελεστές αυτοί ονομάζονται και **τεχνολογικοί συντελεστές**, επειδή εκφράζουν τη συμβολή στην κατανάλωση του πόρου $i$ ή στην ικανοποίηση της απαίτησης $i$ της υλοποίησης μιας μονάδας δραστηριότητας $j$ ή της παραγωγής μιας μονάδας προϊόντος $j$.

Η γενική μορφή ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού μπορεί με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών να μετατραπεί στην **κανονική μορφή** του, η οποία διευκολύνει τη θεωρητική θεμελίωση της μεθοδολογίας Simplex. Η κανονική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού συνίσταται στη μεγιστοποίηση ή στην ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης μη αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων του τύπου $\leq$ ή $\geq$ αντίστοιχα.

Οι βασικοί μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή από τη γενική στην κανονική μορφή είναι οι ακόλουθοι:

- *Αλλαγή φοράς των περιορισμών*

  Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιοι περιορισμοί ενός προβλήματος έχουν φορά αντίθετη από αυτή που απαιτείται, δηλαδή είναι τύπου $\geq$ στην περίπτωση της μεγιστοποίησης και τύπου $\leq$ στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης. Οι περιορισμοί αυτοί πολλαπλασιάζονται επί (-1), οπότε η φορά τους αντιστρέφεται.

- *Μετατροπή περιορισμών ισότητας σε περιορισμούς ανισότητας*

  Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιοι περιορισμοί ενός προβλήματος είναι εξισώσεις και όχι ανισότητες, όπως απαιτείται. Κάθε περιορισμός ισότητας

  $$a_{\iota 1}x_1 + a_{\iota 2}x_2 + \ldots + a_{\iota n}x_n = b_\iota$$

  αντικαθίσταται από δύο περιορισμούς ανισότητας, τύπου $\geq$ και $\leq$ αντίστοιχα, οι οποίοι ισχύουν ταυτόχρονα:

  $$a_{\iota 1}x_1 + a_{\iota 2}x_2 + \ldots + a_{\iota n}x_n \leq b_\iota$$
  $$a_{\iota 1}x_1 + a_{\iota 2}x_2 + \ldots + a_{\iota n}x_n \geq b_\iota$$

  Προφανώς, το σύστημα των δύο αυτών ανισώσεων είναι ισοδύναμο με την αρχική εξίσωση.

- *Μετατροπή αρνητικών μεταβλητών απόφασης σε μη αρνητικές*

  Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιες μεταβλητές είναι αρνητικές, σε αντίθεση με αυτό που απαιτείται. Κάθε αρνητική μεταβλητή, $x_j \leq 0$, αντικαθίσταται από μια νέα $x_j' = -x_j$, η οποία είναι μη αρνητική ($x_j' \geq 0$).

- *Μετατροπή μεταβλητών απόφασης χωρίς περιορισμό ως προς το πρόσημο σε μη αρνητικές*

  Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιες μεταβλητές απόφασης σε αντίθεση με αυτό που απαιτείται, λαμβάνουν τιμές σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Κάθε τέτοια μεταβλητή (χωρίς περιορισμό ως προς το πρόσημο), $x_j \in R$, δηλαδή $x_j \in (-\infty, +\infty)$, αντικαθίσταται από τη διαφορά δύο άλλων, $x_j'$ και $x_j''$, οι οποίες είναι μη αρνητικές. Με άλλα λόγια, $x_j = x_j' - x_j''$, όπου $x_j' \geq 0$ και $x_j'' \geq 0$.

- *Μετατροπή φραγμένων μεταβλητών απόφασης σε μη αρνητικές*

Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιες μεταβλητές απόφασης, σε αντίθεση με αυτό που απαιτείται, είναι φραγμένες. Έστω $x_j$ μια άνω και κάτω φραγμένη μεταβλητή, για την οποία ισχύει: $l_j \leq x_j \leq u_j$. Παρατηρώντας ότι $0 \leq x_j - l_j \leq u_j - l_j$, η μεταβλητή $x_j$ αντικαθίσταται από μια νέα, $x_j' = x_j - l_j$, για την οποία ισχύει: $x_j' \geq 0$, δηλαδή είναι μη αρνητική, και $x_j' \leq u_j - l_j$.

Εφαρμόζοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς στη γενική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, καταλήγουμε στην ακόλουθη **κανονική μορφή** του για προβλήματα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης αντίστοιχα: .

Μεγιστοποίηση/ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3.2)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (\geq b_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad (\geq b_2) \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad (\geq b_m) \end{array}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Από την κανονική μορφή του μοντέλου που μόλις παρουσιάστηκε, μπορούμε εύκολα να περάσουμε στην **τυπική μορφή** του, όπου όλοι οι περιορισμοί είναι ισότητες με θετικά δεύτερα μέλη και όλες οι μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές.

**Στην περίπτωση προβλήματος μεγιστοποίησης**, όπου όλοι οι περιορισμοί είναι της μορφής $\leq$ και όλες οι μεταβλητές απόφασης πληρούν τη συνθήκη της μη αρνητικότητας, η **τυπική μορφή** του μοντέλου προκύπτει αν προσθέσουμε στο πρώτο μέλος κάθε περιορισμού την αντίστοιχη **χαλαρή μεταβλητή** ή **μεταβλητή περιθωρίου** (*slack variable*) $s_i$, μετατρέποντάς τον σε ισότητα, όπως φαίνεται παρακάτω. Όλες οι χαλαρές μεταβλητές προστίθενται και στην αντικειμενική συνάρτηση με μηδενικούς συντελεστές, μη μεταβάλλοντας με τον τρόπο αυτό την τιμή της.

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (3.3)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0s_1 + 0s_2 + \ldots 0s_m$$

με περιορισμούς δομής:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + s_1 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + s_2 = b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + s_m = b_m$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,\ \ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0, \ldots,\ s_m \geq 0$$

Αν μετά τη μετατροπή των ανισοτήτων σε ισότητες υπάρχουν κάποια αρνητικά δεύτερα μέλη ($b_i < 0$), τα μετατρέπουμε σε θετικά πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των αντίστοιχων εξισώσεων επί (-1).

Αντίστοιχα, **στην περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποίησης**, όπου όλοι οι περιορισμοί είναι της μορφής $\geq$ και όλες οι μεταβλητές απόφασης πληρούν τη συνθήκη της μη αρνητικότητας, η τυπική μορφή του μοντέλου προκύπτει αν αφαιρέσουμε από το πρώτο μέλος κάθε περιορισμού την αντίστοιχη **πλεονασματική μεταβλητή** ή **μεταβλητή πλεονάσματος** (*excess/surplus variable*) $e_i$, μετατρέποντάς τον σε ισότητα, όπως φαίνεται παρακάτω. Και στην περίπτωση αυτή, όλες οι πλεονασματικές μεταβλητές προστίθενται στην αντικειμενική συνάρτηση με μη μηδενικούς συντελεστές, μη μεταβάλλοντας με τον τρόπο αυτόν την τιμή της.

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3.4)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_m$$

με περιορισμούς δομής:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots. + a_{1n} x_n - e_1 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n - e_2 = b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n - e_m = b_m$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,\ \ e_1 \geq 0,\ \ e_2 \geq 0, \ldots, e_m \geq 0$$

Και στην περίπτωση αυτή, αν μετά τη μετατροπή των ανισοτήτων σε ισότητες υπάρχουν κάποια αρνητικά δεύτερα μέλη ($b_i < 0$), τα μετατρέπουμε σε θετικά πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των αντίστοιχων εξισώσεων επί (-1).

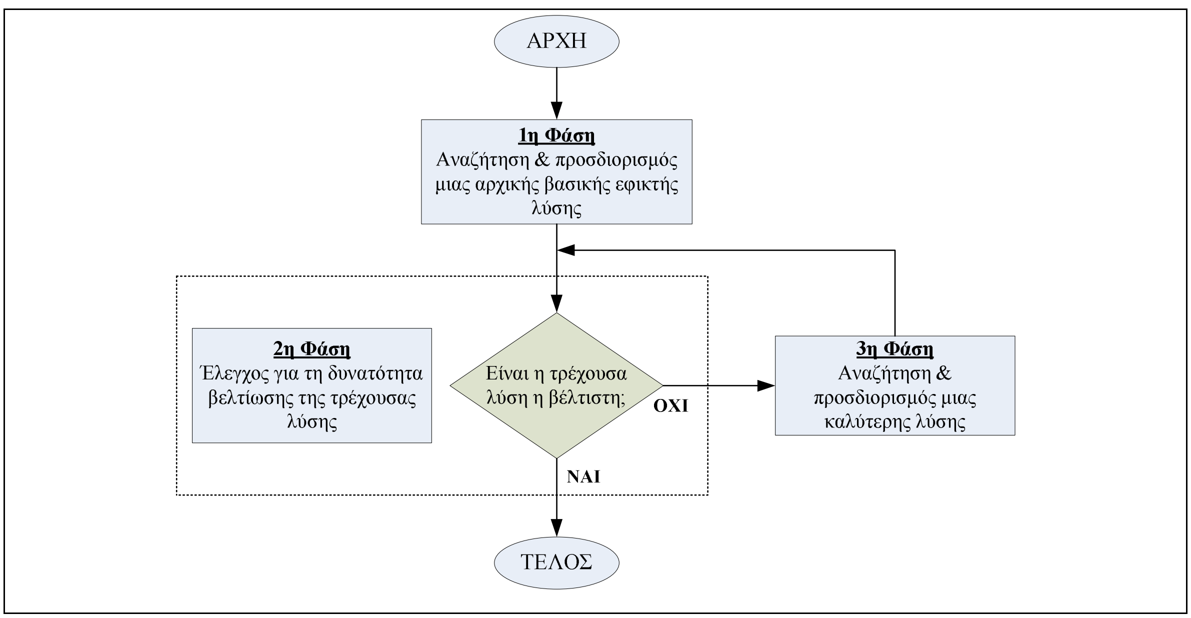
Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των τριών μορφών ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού, σημειώνουμε ότι **η διατύπωσή του στην τυπική μορφή είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την επίλυσή του με τη μέθοδο Simplex**.

## Ενότητα 3.3

## Παρουσίαση της μεθοδολογίας

### 3.3.1 Θεωρητικό πλαίσιο

Στην προηγούμενη ενότητα έγινε μια πρώτη σύντομη παρουσίαση της μεθόδου Simplex και, επιπλέον, αναφέρθηκε η μορφή που θα πρέπει να έχει το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για να μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο αυτή. Οι βασικές φάσεις επίλυσης ενός προβλήματος με τη μέθοδο αυτή παρουσιάζονται διαγραμματικά στο παρακάτω Σχήμα:




**Σχήμα 3.1**
Βασικές φάσεις επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex.
.

Στην παρούσα ενότητα, οι φάσεις επίλυσης θα περιγραφούν αναλυτικά τόσο για προβλήματα μεγιστοποίησης όσο και για προβλήματα ελαχιστοποίησης.

#### 3.3.1.1 Πρόβλημα μεγιστοποίησης

**Φάση 1η: Αναζήτηση και προσδιορισμός μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης.**

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, απαραίτητη προϋπόθεση για την έναρξη επίλυσης ενός προβλήματος με τη μέθοδο Simplex είναι η διατύπωσή του στην τυπική μορφή, η οποία για διευκόλυνση του αναγνώστη επαναλαμβάνεται εδώ:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (3.5)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0s_1 + 0s_2 + \ldots + 0s_m$$

με περιορισμούς δομής:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + 1s_1 + 0s_2 + \ldots + 0s_m = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + 0s_1 + 1s_2 + \ldots + 0s_m = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + 0s_1 + 1s_2 + \ldots + 1s_m = b_m$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \ldots, s_m \geq 0$$

Η φάση αυτή περιλαμβάνει τα παρακάτω τρία βήματα:

- Εντοπισμός των μεταβλητών που θα περιλαμβάνονται στην αρχική λύση.
- Δημιουργία του αρχικού πίνακα Simplex.
- Προσδιορισμός της αρχικής λύσης.

Τα βήματα αυτά θα παρουσιαστούν αναλυτικά στη συνέχεια:

*Βήμα 1ο: Εντοπισμός των μεταβλητών που αποτελούν την αρχική λύση.*

Όπως φαίνεται από την παρουσίαση του μοντέλου στην κανονική του μορφή, στην ουσία πρόκειται για ένα σύστημα $m$ εξισώσεων, όσοι δηλαδή είναι και οι περιορισμοί, και $n+m$ αγνώστων, όσες δηλαδή είναι συνολικά οι μεταβλητές απόφασης $(n)$ και οι χαλαρές μεταβλητές $(m)$. Ένα τέτοιο σύστημα, όπου ο αριθμός των αγνώστων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων, ονομάζεται «αόριστο» και έχει θεωρητικά άπειρες λύσεις. Για να λυθεί ένα τέτοιο σύστημα, θεωρούμε γνωστές $n$ από τις μεταβλητές του, τους δίνουμε αυθαίρετες τιμές και στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα ως προς τις υπόλοιπες $m$ μεταβλητές. Το ζητούμενο, λοιπόν, στο βήμα αυτό είναι να προσδιορίσουμε ποιες $n$ από τις μεταβλητές του θα θεωρήσουμε γνωστές και ποιες τιμές θα τους δώσουμε. Παρατηρώντας προσεκτικότερα το σύστημα των $m$ εξισώσεων, διαπιστώνουμε ότι κάθε χαλαρή μεταβλητή εμφανίζεται σε μία μόνο εξίσωση με συντελεστή τη μονάδα. Οι μοναδιαίοι συντελεστές κάθε μεταβλητής, μαζί με τους $(m-1)$ μηδενικούς συντελεστές της ίδιας μεταβλητής στις υπόλοιπες $(m-1)$ εξισώσεις/περιορισμούς, αποτελούν ένα διάνυσμα-στήλη. Τα $n$ διανύσματα-στήλες των χαλαρών μεταβλητών, που εμφανίζονται γραμμοσκιασμένα στο σύστημα των περιορισμών, συνιστούν ένα **μοναδιαίο πίνακα** (*unit matrix*). Η ύπαρξη του πίνακα αυτού αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την έναρξη της επίλυσης του συστήματος με τη μέθοδο Simplex.

Το γεγονός ότι στο σύστημα των περιορισμών κάθε χαλαρή μεταβλητή εμφανίζεται σε μία μόνο εξίσωση με συντελεστή τη μονάδα πρακτικά σημαίνει ότι, μηδενίζοντας όλες τις μεταβλητές απόφασης, καθορίζονται αυτόματα οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών, καθώς καθεμία από αυτές λαμβάνει την τιμή του δεύτερου μέλους της εξίσωσης στην οποία βρίσκεται. Συνοψίζοντας, λοιπόν, όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, σημειώνουμε ότι οι μεταβλητές που αποτελούν την αρχική λύση είναι οι χαλαρές μεταβλητές $s_1, s_2, ..., s_m$.

*Βήμα 2ο: Δημιουργία του αρχικού πίνακα Simplex.*

Έχοντας προσδιορίσει την αρχική βασική εφικτή λύση, μπορούμε να προχωρήσουμε στη δημιουργία του **αρχικού πίνακα Simplex** (*initial Simplex tableau*), που αποτυπώνει όσα αναφέρθηκαν παραπάνω (Πίνακας 3.1) Όπως φαίνεται, ο αρχικός πίνακας Simplex περιέχει $n+m$ στήλες, μία για κάθε μεταβλητή και τρεις ακόμη στήλες, με τις ενδείξεις «Βάση», «Δεξιό μέλος» και «Πηλίκο» αντίστοιχα.

**Πίνακας 3.1**
Αρχικός πίνακας Simplex

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $c_1$ | $c_2$ | | $c_n$ | 0 | 0 | | 0 | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | $s_1$ | $s_2$ | … | $s_m$ | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $s_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | | $a_{1n}$ | 1 | 0 | | 0 | $b_1$ | |
| 0 | $s_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | | $a_{2n}$ | 0 | 1 | | 0 | $b_2$ | |
| | … | | | | | | | | | | |
| 0 | $s_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | | $a_{mn}$ | 0 | 0 | | 1 | $b_m$ | |
| $z_j$ | | | | | | | | | | $Z =$ | |
| $c_j - z_j$ | | | | | | | | | | | |

Στην πρώτη στήλη, με την ένδειξη «Βάση», σημειώνονται οι βασικές μεταβλητές $(s_1, s_2, ..., s_m)$ και οι αντίστοιχοι αντικειμενικοί συντελεστές τους.

Οι επόμενες *n*+*m* στήλες αντιστοιχούν στις *n*+*m* μεταβλητές του προβλήματος, αρχίζοντας από τις μεταβλητές απόφασης και συνεχίζοντας με τις χαλαρές μεταβλητές. Στην κορυφή κάθε στήλης, σημειώνεται η μεταβλητή στην οποία αντιστοιχεί και πάνω από αυτήν ο αντικειμενικός συντελεστής της. Για παράδειγμα, στην πρώτη στήλη σημειώνεται η μεταβλητή $x_1$ και ο αντικειμενικός συντελεστής της $c_1$. Τέλος, παρατηρούμε ότι οι στήλες των χαλαρών μεταβλητών $s_1, s_2, ..., s_m$ συνιστούν ένα μοναδιαίο πίνακα, η ύπαρξη του οποίου, όπως ήδη αναφέρθηκε, αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την έναρξη επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο Simplex.

Στην προτελευταία στήλη, με την ένδειξη «Δεξιό Μέλος», εμφανίζονται οι τιμές των δεξιών μελών των *m* περιορισμών, ενώ στο περιεχόμενο και στη χρήση της τελευταίας στήλης, με την ένδειξη «Πηλίκο», θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Για κάθε βασική μεταβλητή, που σημειώνεται στην πρώτη στήλη, υπάρχει μία γραμμή που ουσιαστικά αντιστοιχεί στον περιορισμό στον οποίο εμφανίζεται η βασική αυτή μεταβλητή. Έτσι, στην πρώτη γραμμή εμφανίζονται οι συντελεστές των μεταβλητών (βασικών και μη) του πρώτου περιορισμού (κάθε συντελεστής στην αντίστοιχη από τις $n+m$ στήλες), καθώς και το δεξιό μέλος του περιορισμού αυτού.

Τέλος, εκτός από τις *m* αυτές γραμμές, ο αρχικός πίνακας Simplex περιέχει δύο πρόσθετες τελευταίες γραμμές και μία θέση για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $Z$. Στο περιεχόμενο και στη χρήση των δύο τελευταίων γραμμών, με τις ενδείξεις "$z_j$" και "$c_j - z_j$" αντίστοιχα, θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

*Βήμα 3ο: Εύρεση της αρχικής λύσης*

Έχοντας δημιουργήσει τον αρχικό πίνακα Simplex, μπορούμε άμεσα να προσδιορίσουμε την πρώτη βασική εφικτή λύση του προβλήματος.

Οι τιμές των βασικών μεταβλητών $s_1, s_2, ..., s_m$, οι οποίες σημειώνονται στην πρώτη στήλη του πίνακα, είναι ίσες με τις αντίστοιχες τιμές των δεξιών μελών των περιορισμών στους οποίους ανήκουν και οι οποίες εμφανίζονται στην προτελευταία στήλη του πίνακα. Οι τιμές των υπόλοιπων, μη βασικών, μεταβλητών είναι μηδενικές. Αντικαθιστώντας τις τιμές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση, έχουμε:

$$Z = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + ... + c_n \cdot 0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + ... + 0 \cdot b_m \rightarrow Z = 0 \tag{3.6}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, σημειώνουμε καταληκτικά ότι η αρχική βασική εφικτή λύση, η οποία προκύπτει από τον αρχικό πίνακα Simplex, είναι:

$$\left( x_1 = 0,\ x_2 = 0, ..., x_n = 0,\ s_1 = b_1,\ s_2 = b_2, ..., s_m = b_m \right)$$

και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι: $Z = 0$.

**Φάση 2η: Έλεγχος για τη δυνατότητα βελτίωσης της τρέχουσας λύσης**

Στη φάση αυτή, ελέγχεται αν η λύση που προσδιορίστηκε παραπάνω είναι η καλύτερη δυνατή ή αν μπορεί να βελτιωθεί, αντικαθιστώντας μία από τις βασικές μεταβλητές της με μία, μέχρι τώρα, μη βασική. Με άλλα λόγια, ελέγχεται αν υπάρχει έστω και μία μη βασική μεταβλητή, η είσοδος της οποίας στο σύνολο των βασικών μεταβλητών, με ταυτόχρονη έξοδο από αυτό μίας ήδη βασικής μεταβλητής, θα βελτιώσει τη λύση που έχει προσδιοριστεί.

Η είσοδος μιας νέας μεταβλητής στο σύνολο των βασικών μεταβλητών θα επηρεάσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης, τόσο θετικά όσο και αρνητικά.

Η **θετική επίδραση** από την είσοδο μιας νέας μεταβλητής οφείλεται στα έσοδα που θα προέλθουν από την πώληση των μονάδων της μεταβλητής αυτής που θα παραχθούν.

Η **αρνητική επίδραση** από την είσοδο μιας νέας μεταβλητής οφείλεται στη χρήση πόρων για την παραγωγή μονάδων της νέας μεταβλητής, οι οποίοι δεν θα είναι πλέον διαθέσιμοι για την παραγωγή μονάδων των ήδη βασικών μεταβλητών, με αποτέλεσμα να μειωθεί η συνολική παραγωγή τους και αντίστοιχα τα έσοδα από την πώλησή τους.

Η **καθαρή συνεισφορά** από την είσοδο μιας νέας μεταβλητής θα είναι η διαφορά της αρνητικής από τη θετική επίδρασή της στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης.

**Για τον υπολογισμό της θετικής επίδρασης**, παρατηρούμε ότι η παραγωγή μιας μονάδας από τη νέα μεταβλητή θα αποφέρει έσοδα ίσα με τον αντικειμενικό συντελεστή της. Έτσι, αν, για παράδειγμα, εισέλθει στο σύνολο των βασικών μεταβλητών η μεταβλητή $x_1$, για κάθε μονάδα παραγωγής της τα έσοδα της επιχείρησης θα αυξηθούν κατά $c_1$. Αντίστοιχες αυξήσεις θα έχουμε αν θεωρήσουμε ότι αντί της $x_1$ εισέρχεται στη βάση μια άλλη μη βασική μεταβλητή.

**Για τον υπολογισμό της αρνητικής επίδρασης**, παρατηρούμε ότι η παραγωγή μιας μονάδας από τη νέα μεταβλητή θα μειώσει:

- Κάθε διαθέσιμο πόρο για την παραγωγή των ήδη παραγόμενων προϊόντων και, συνεπώς, τον όγκο της παραγωγής τους κατά την ποσότητα του πόρου που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας του νέου προϊόντος, δηλαδή κατά την τιμή του τεχνολογικού συντελεστή της νέας μεταβλητής στον αντίστοιχο περιορισμό.
- Τα έσοδα από τη διάθεση των ήδη παραγόμενων προϊόντων κατά το γινόμενο της μείωσης του όγκου παραγωγής τους επί την αντίστοιχη τιμή πώλησής τους, δηλαδή την τιμή του αντικειμενικού συντελεστή τους.

**Για τον υπολογισμό της καθαρής συνεισφοράς** μιας νέας μεταβλητής, αφαιρούμε την αρνητική επίδρασή της στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης από την αντίστοιχη θετική επίδρασή της.

Έτσι, αν, συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα, εισέλθει στο σύνολο των βασικών μεταβλητών η μεταβλητή $x_1$, τότε για κάθε μονάδα παραγωγής της:

- Η θετική επίδραση θα είναι η αύξηση των συνολικών εσόδων της επιχείρησης κατά τον αντικειμενικό συντελεστή της $c_1$.
- Η αρνητική επίδραση θα είναι η μείωση του όγκου παραγωγής καθεμίας από τις ήδη υπάρχουσες βασικές μεταβλητές και η συνεπακόλουθη μείωση των εσόδων από την πώλησή τους, όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 3.2.

**Πίνακας 3.2**

Αρνητική επίδραση από την είσοδο στη βάση της μεταβλητής $x_1$
και την παραγωγή μιας μονάδας της

| **Υπάρχουσες βασικές μεταβλητές** | **Μείωση όγκου παραγωγής βασικών μεταβλητών** | **Μείωση εσόδων πώλησης βασικών μεταβλητών** |
|---|---|---|
| $s_1$ | $a_{11}$ | $0 \cdot a_{11} = 0$ |
| $s_2$ | $a_{21}$ | $0 \cdot a_{21} = 0$ |
| … | ... | ... |
| $s_m$ | $a_{m1}$ | $0 \cdot a_{m1} = 0$ |
| **Σύνολο** | | $z_1 = 0$ |

- Η **καθαρή συνεισφορά** θα είναι $\delta_1 = c_1 - z_1$ και εκφράζει την καθαρή αύξηση ή μείωση που θα επιφέρει στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή στα κέρδη της επιχείρησης, η είσοδος της μεταβλητής $x_1$ στο σύνολο των βασικών μεταβλητών και η παραγωγή μιας μονάδας της. Η καθαρή συνεισφορά ονομάζεται και **διαφορική απόδοση** της μεταβλητής $x_1$. Η μείωση του όγκου παραγωγής των βασικών μεταβλητών εκφράζει την **ανταλλαγή** (*exchange*) ή την **υποκατάσταση** (*substitution*) που πρέπει να γίνει στη χρήση των πόρων μεταξύ αυτών και της εισερχόμενης στη βάση μη βασικής μεταβλητής, η οποία θα απορροφήσει κάποιους από τους υπάρχοντες πόρους για την παραγωγή της. Για το λόγο αυτόν, οι τεχνολογικοί συντελεστές, οι οποίοι, όπως φαίνεται από τον παραπάνω Πίνακα, εκφράζουν τη μείωση του όγκου παραγωγής των βασικών μεταβλητών, ονομάζονται και **συντελεστές ανταλλαγής** ή **υποκατάστασης** (*exchange/substitution coefficients*).

Αντίστοιχοι υπολογισμοί θα γίνουν και για την περίπτωση εισόδου στη βάση καθεμιάς από τις υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές. Οι υπολογισμοί αυτοί θα οδηγήσουν στον υπολογισμό των διαφορικών αποδόσεων $\delta_j$ για καθεμία από αυτές και τελικά στην επιλογή αυτής που θα εισέλθει στη βάση.

Στην πράξη, η διαδικασία υπολογισμού των διαφορικών αποδόσεων μπορεί να απλοποιηθεί και να υπολογιστούν απευθείας οι διαφορικές αποδόσεις των μη βασικών μεταβλητών μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$\delta_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{\substack{i=1 \\ j^*=m+1\ldots n}}^{m} a_{ij} c_{j^*} \tag{3.7}$$

όπου:

| |
|---|
| $a_{ij},\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$ οι τεχνολογικοί συντελεστές |
| $c_j,\ j=1,\ldots,m$ οι αντικειμενικοί συντελεστές των $m$ μη βασικών μεταβλητών $x_j$ |
| $c_{j^*},\ j^*=m+1,\ldots,n$ οι αντικειμενικοί συντελεστές των $n$ βασικών μεταβλητών $x_j$ |

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, προκύπτει ότι οι τιμές των διαφορικών αποδόσεων των μη βασικών μεταβλητών ενός πίνακα Simplex αποτελούν τη βάση του κριτηρίου ελέγχου της δυνατότητας βελτίωσης της τρέχουσας λύσης και, κατά συνέπεια, του τερματισμού της διαδικασίας αναζήτησης μιας καλύτερης, από την τρέχουσα, λύσης. Το κριτήριο αυτό, το οποίο είναι γνωστό ως **κριτήριο βελτιστοποίησης** (*optimality criterion*) ή **συνθήκη αριστότητας** (*optimality condition*) ή **κριτήριο τερματισμού** (*termination criterion*), έχει ως εξής:

- Αν όλες οι μη βασικές μεταβλητές εμφανίζουν $\delta_j < 0$, τότε η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη, καθώς η εισαγωγή οποιασδήποτε άλλης μη βασικής μεταβλητής στο σύνολο των βασικών μεταβλητών θα μειώσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Αν όλες οι μη βασικές μεταβλητές εμφανίζουν $\delta_j \leq 0$ και τουλάχιστον μία $\delta_j = 0$, τότε είναι στη διακριτική ευχέρεια του λήπτη της απόφασης να επιλέξει:
    - Να μην εισαχθεί στη βάση μεταβλητή με $\delta_j = 0$, οπότε η διερεύνηση του προβλήματος ολοκληρώνεται και η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη.
    - Να εισαχθεί στη βάση μεταβλητή με $\delta_j = 0$, οπότε η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη και η διερεύνηση θα πρέπει να συνεχιστεί με την είσοδο στη βάση μιας νέας μεταβλητής. Η μεταβλητή που θα εισέλθει

στη βάση είναι αυτή για την οποία $\delta_j = 0$, αν υπάρχει μόνο μία, ή μία αυθαίρετα επιλεγμένη μεταξύ αυτών για τις οποίες $\delta_j = 0$, αν υπάρχουν περισσότερες από μία. Ας σημειωθεί ότι η επιλογή της μεταβλητής με $\delta_j = 0$, που θα εισαχθεί στη βάση, δεν επηρεάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά μόνο το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής.

- Αν τουλάχιστον μία από τις μη βασικές μεταβλητές εμφανίζει $\delta_j > 0$, τότε η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη και η διερεύνηση θα πρέπει να συνεχιστεί με την εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής στη βάση. Ως **εισερχόμενη μεταβλητή** (*entering variable*) θα επιλεγεί αυτή για την οποία $\delta_j > 0$, αν υπάρχει μόνο μία, ή αυτή με το μεγαλύτερο $\delta_j$, αν υπάρχουν περισσότερες από μία. Επιπλέον, στην περίπτωση όπου η μέγιστη τιμή $\delta_j$ αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία μεταβλητές, δηλαδή όταν έχουμε **ισοβαθμία εισερχόμενης μεταβλητής** (*entering variable tie*), τότε επιλέγεται μία από αυτές αυθαίρετα. Ας σημειωθεί, πάντως, ότι, ανεξάρτητα από την επιλογή της μεταβλητής με $\delta_j > 0$ που θα εισέλθει στη βάση, η μέθοδος Simplex θα συγκλίνει στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα, δηλαδή στην ίδια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά με διαφορετική σύνθεση παραγωγής. Όμως, το **πλήθος των επαναλήψεων** (*number of iterations*) που θα απαιτηθούν μέχρι τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης θα διαφέρει ανάλογα με την επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής.

Για τις ανάγκες μιας ολοκληρωμένης παρουσίασης της μεθοδολογίας, υποθέτουμε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν δύο μεταβλητές $x_1$ και $x_2$ με θετική διαφορική απόδοση $\delta_j \geq 0$, $j = 1, 2$ και επιπλέον ότι: $\delta_1 > \delta_2$. Τότε η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη και η διερεύνηση θα πρέπει να συνεχιστεί με τη διαδικασία της αναζήτησης μιας καλύτερης λύσης, όπως αυτή περιγράφεται στην επόμενη φάση.

**Φάση 3η: Αναζήτηση και προσδιορισμός μιας καλύτερης λύσης**

Στην προηγούμενη φάση, διαπιστώθηκε ότι η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, καθώς υπάρχουν δύο μη βασικές μεταβλητές με θετική διαφορική απόδοση. Στην παρούσα φάση, η οποία περιλαμβάνει τα τέσσερα παρακάτω βήματα, θα αναζητηθεί μια καλύτερη λύση:

*Βήμα 1ο: Εντοπισμός της εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής.*

*Βήμα 2ο: Εντοπισμός της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής.*

*Βήμα 3ο: Δημιουργία του νέου πίνακα Simplex.*

*Βήμα 4ο: Προσδιορισμός της νέας λύσης.*

Τα βήματα αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά στη συνέχεια.

***Βήμα 1ο: Εντοπισμός της εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής.***

Επειδή, όπως ήδη αναφέρθηκε, $\delta_1 > \delta_2$, η μεταβλητή $x_1$ θα είναι η νέα εισερχόμενη μη βασική μεταβλητή, καθώς η είσοδός της στη βάση θα προκαλέσει τη μέγιστη δυνατή αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Η στήλη της μεταβλητής $x_1$ στον πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική στήλη** ή **στήλη οδηγός** (*pivot column*).

***Βήμα 2ο: Εντοπισμός της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής.***

Μετά την επιλογή της μεταβλητής $x_1$ ως εισερχόμενης στη βάση, θα προχωρήσουμε στο δεύτερο βήμα της φάσης αυτής, όπου θα εντοπίσουμε την **εξερχόμενη μεταβλητή** (*leaving variable*), δηλαδή αυτή που θα αντικατασταθεί στη βάση από τη μεταβλητή $x_1$. Υποψήφιες προς αντικατάσταση βασικές μεταβλητές είναι οι *m* χαλαρές μεταβλητές, οι οποίες αποτελούν το σύνολο των βασικών μεταβλητών. Κριτήριο για την επιλογή, μεταξύ αυτών, της εξερχόμενης μεταβλητής αποτελούν οι τιμές στη στήλη «Πηλίκο», όπου τοποθετούνται οι λόγοι $b_i/a_{1i}$, $i = 1,...,n$, δηλαδή **οι λόγοι των τιμών των πόρων ή των δεξιών μελών των περιορισμών** $b_i$, $i = 1,...,n$, όπως εμφανίζονται στη σχετική στήλη, **προς τους αντίστοιχους τεχνολογικούς συντελεστές** $a_{1i}$, $i = 1,...,n$ της εισερχόμενης μεταβλητής $x_1$, όπως αυτοί εμφανίζονται στην **αξονική στήλη**.

Καθένας από τους λόγους αυτούς $b_i/a_{1i}$, $i = 1,...,n$ εκφράζει την ποσότητα της μεταβλητής $x_1$ που θα μπορούσε να παραχθεί, αν το σύνολο του αντίστοιχου πόρου χρησιμοποιούνταν για το σκοπό αυτό. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, το οποίο ονομάζεται **κριτήριο εφικτότητας** (*feasibility criterion*) ή **κανόνας ελάχιστου πηλίκου** (*minimum ratio rule*), **ως εξερχόμενη βασική μεταβλητή επιλέγεται αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο θετικό λόγο**. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η παραγωγή της μέγιστης δυνατής ποσότητας από την $x_1$, γεγονός που μεγιστοποιεί τη συνεισφορά της στα συνολικά κέρδη, αλλά παράλληλα διασφαλίζεται και η ικανοποίηση των περιορισμών σε ό,τι αφορά τους πόρους. Αν, για παράδειγμα, είχε επιλεγεί ως εξερχόμενη μεταβλητή αυτή που αντιστοιχεί στο μέγιστο λόγο, τότε η παραγωγή τής θεωρητικά μέγιστης ποσότητας από την $x_1$ δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί, διότι δεν θα επαρκούσαν κάποιοι από τους υπόλοιπους απαιτούμενους πόρους. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι, αν σε κάποιον από τους λόγους $b_i/a_{1i}$, $i=1,...,n$, το $b_i=0$, θέτουμε $b_i=0+\varepsilon$, όπου ε ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός, ώστε να μπορούν να γίνουν οι πράξεις. Επίσης, αν $a_{1i}=0$, το πηλίκο $b_i/a_{1i}$ δεν ορίζεται. Ακόμη, αν $a_{1i}<0$, το πηλίκο είναι αρνητικό και δεν έχει νόημα ο υπολογισμός του. Τέλος, σημειώνεται αν στην τελική λύση του προβλήματος ο αριθμός ε παραμένει στην αντικειμενική συνάρτηση τον θέτουμε ίσο με μηδέν ($\varepsilon = 0$).

Στην περίπτωση όπου το ελάχιστο πηλίκο αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία μεταβλητές, δηλαδή όταν έχουμε **ισοβαθμία εξερχόμενης μεταβλητής** (*leaving variable tie*), τότε, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση ισοβαθμίας εισερχόμενης μεταβλητής, επιλέγεται και πάλι αυθαίρετα μία από τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στο ελάχιστο πηλίκο ως εξερχόμενη. Αντίθετα, όμως, από την ισοβαθμία εισερχόμενης μεταβλητής, όπου μετά την επιλογή η λύση συνεχίζεται κανονικά, στην ισοβαθμία εξερχόμενης μεταβλητής, μετά την επιλογή οδηγούμαστε στην εμφάνιση μηδενικής βασικής μεταβλητής στον επόμενο πίνακα Simplex. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, αν σκεφτεί κανείς ότι η τιμή που λαμβάνει η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η τιμή του ελάχιστου πηλίκου, η οποία μηδενίζει την εξερχόμενη μεταβλητή και την καθιστά μη βασική. Όταν, όμως, το ελάχιστο πηλίκο αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία βασικές μεταβλητές, τότε ταυτόχρονα με το μηδενισμό της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής, η οποία μετατρέπεται σε μη βασική, μηδενίζονται και όλες οι άλλες μη βασικές μεταβλητές με το ίδιο πηλίκο. Κατά συνέπεια, στον επόμενο πίνακα Simplex όλες αυτές οι βασικές μεταβλητές είναι μηδενικές και ονομάζονται «εκφυλισμένες».

Όταν μια βασική εφικτή λύση ενός προβλήματος περιέχει τουλάχιστον μία μηδενική βασική μεταβλητή, τότε η λύση αυτή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (*degenerate*). Μια τέτοια λύση μπορεί να εμφανιστεί είτε στον τελικό είτε σε έναν ενδιάμεσο πίνακα Simplex. Αν εμφανιστεί στον τελικό πίνακα, τότε απλώς έχουμε μία βασική μεταβλητή ίση με το μηδέν (0). Αν, όμως, εμφανιστεί σε έναν ενδιάμεσο πίνακα Simplex, αυτό είναι πιθανό να οδηγήσει σε έναν κύκλο επαναλαμβανόμενων λύσεων, χωρίς τη δυνατότητα εντοπισμού της βέλτιστης λύσης. Πάντως, η περίπτωση αυτή σπάνια εμφανίζεται και τα διάφορα πακέτα λογισμικού για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού έχουν τη δυνατότητα να ξεπεράσουν το πρόβλημα και να φτάσουν στη βέλτιστη λύση.

Για τις ανάγκες της παρουσίασης, υποθέτουμε ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο λόγος $b_1/a_{11}$ είναι ο μικρότερος θετικός λόγος μεταξύ των αντίστοιχων λόγων των υπόλοιπων βασικών μεταβλητών και, κατά συνέπεια, η εξερχόμενη βασική μεταβλητή είναι η $s_1$. Η γραμμή της μεταβλητής $s_1$ στον αρχικό πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική γραμμή** ή **γραμμή-οδηγός** (*pivot row*) και το σημείο τομής της με την αξονική στήλη ονομάζεται **αξονικό στοιχείο** ή **στοιχείο-οδηγός** (*pivot point*).

***Βήμα 3ο: Δημιουργία του νέου πίνακα Simplex.***

Μετά τον εντοπισμό της εισερχόμενης στη βάση και της εξερχόμενης από αυτή μεταβλητής, προχωρούμε στη δημιουργία του δεύτερου πίνακα Simplex. Ο δεύτερος πίνακας Simplex περιέχει ακριβώς τις ίδιες γραμμές και στήλες με τον αρχικό και έχει την ίδια μορφή με αυτόν. Οι βασικές μεταβλητές στο δεύτερο πίνακα είναι $x_1, s_2, ..., s_m$, καθώς η $x_1$ έχει αντικαταστήσει την $s_1$, ενώ οι μη βασικές είναι $s_1, x_2, ..., x_n$. Ο τρόπος συμπλήρωσης των διαφόρων κελιών του πίνακα θα περιγραφεί αναλυτικά στη συνέχεια.

**Πίνακας 3.3**
Δεύτερος πίνακας Simplex

<table>
<tr><td colspan="2">Βάση</td><td colspan="8">Μεταβλητές</td><td rowspan="3">Δεξιό μέλος</td><td rowspan="3">Πηλίκο</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Αντικειμενικοί Συντελεστές</td><td rowspan="2">Βασικές Μεταβλητές</td><td>$c_1$</td><td>$c_2$</td><td></td><td>$c_n$</td><td>0</td><td>0</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>…</td><td>$x_n$</td><td>$s_1$</td><td>$s_2$</td><td>…</td><td>$s_m$</td></tr>
</table>

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_1$ | $x_1$ | 1 | $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ | | $\frac{a_{1n}}{a_{11}}$ | $\frac{1}{a_{11}}$ | 0 | | 0 | $\frac{b_1}{a_{11}}$ | |
| 0 | $s_2$ | 0 | $a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}$ | | $a_{2n}-\frac{a_{2n}a_{1n}}{a_{11}}$ | $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ | 1 | | 0 | $b_2-\frac{a_{21}b_1}{a_{11}}$ | |
| | … | | | | | | | | | | |
| 0 | $s_m$ | 0 | $a_{m2}-\frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}$ | | $a_{mn}-\frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}}$ | $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ | 0 | | 1 | $b_m-\frac{a_{m1}b_1}{a_{11}}$ | |
| $z_j$ | | | | | | | | | | $Z$ | |
| $c_j-z_j$ | | | | | | | | | | | |

- Στην πρώτη στήλη, με την ένδειξη «Βάση», η μεταβλητή $s_1$ έχει αντικατασταθεί από τη $x_1$.
- Οι στήλες των βασικών μεταβλητών που εξακολουθούν να είναι βασικές $(s_2,...,s_m)$ παραμένουν ως έχουν.
- Η στήλη της $x_1$, που εισήλθε στο σύνολο των βασικών μεταβλητών, αντικαθιστώντας τη $s_1$, ταυτίζεται με τη στήλη $s_1$ όπως αυτή ήταν στον αρχικό Πίνακα.
- Η σειρά του δεύτερου πίνακα Simplex που βρίσκεται στη θέση της αξονικής σειράς του αρχικού πίνακα Simplex προκύπτει αν διαιρέσουμε τα στοιχεία της αξονικής σειράς με το αξονικό στοιχείο.
- Όλες οι υπόλοιπες σειρές του δεύτερου πίνακα Simplex προκύπτουν από τις αντίστοιχες του αρχικού με βάση τον ακόλουθο γενικό κανόνα:

| |
|---|
| Σειρά $i$ νέου Πίνακα Simplex = Σειρά $i$ προηγούμενου Πίνακα Simplex - (Συντελεστής, στη σειρά $i$ του προηγούμενου πίνακα, της εισερχόμενης στο νέο πίνακα μεταβλητής) × (Σειρά του νέου πίνακα που βρίσκεται στη θέση της αξονικής σειράς του προηγούμενου πίνακα) |

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, νέος πίνακας είναι ο δεύτερος πίνακας Simplex και προηγούμενος ο αρχικός.

Με βάση τα παραπάνω, η σειρά της μεταβλητής $s_2$ του δεύτερου πίνακα είναι:

$$\left(a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, 0, 1, ..., 0, b_2\right) - a_{21}\left(1, a_{12}/a_{11}, ..., a_{1n}/a_{11}, 1/a_{11}, 0, ...0, b_1/a_{11}\right) =$$

$$\left(0, a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}, ..., a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}, -a_{21}/a_{11}, 1, ..., 0, b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}\right)$$

Αντίστοιχα, η σειρά της μεταβλητής $s_m$ του δεύτερου πίνακα είναι:

$$\left(a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}, 0, 0, ..., 1, b_m\right) - a_{m1}\left(1, a_{12}/a_{11}, ..., a_{1n}/a_{11}, 1/a_{11}, 0, ...0, b_1/a_{11}\right) =$$

$$\left(0, a_{m2} - \frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}, ..., a_{mn} - \frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}}, -a_{m1}/a_{11}, 0, ..., 1, b_m - \frac{a_{m1}b_{m1}}{a_{11}}\right)$$

***Βήμα 4ο: Προσδιορισμός της νέας λύσης.***

Έχοντας συμπληρώσει όλα τα απαραίτητα κελιά του δεύτερου πίνακα Simplex, μπορούμε άμεσα να προχωρήσουμε στο τελευταίο βήμα της φάσης αυτής, που είναι ο εντοπισμός της νέας βελτιωμένης λύσης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι τιμές των βασικών μεταβλητών που σημειώνονται στην πρώτη στήλη του πίνακα με την ένδειξη «Βάση» ισούνται με τις αντίστοιχες τιμές που εμφανίζονται στην προτελευταία στήλη του με την ένδειξη «Δεξιό μέλος». Οι τιμές των υπόλοιπων, μη βασικών, μεταβλητών είναι μηδενικές. Αντικαθιστώντας τις τιμές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση έχουμε:

$$Z = c_1 \frac{b_1}{a_{11}} + c_2 \cdot 0 + ... + c_n \cdot 0 + 0 \cdot \left(b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}\right) + \ldots + 0 \cdot (b_m - \frac{a_{m1}b_1}{a_{11}}) \rightarrow Z = c_1\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right) \qquad (3.8)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, σημειώνουμε καταληκτικά ότι η νέα βασική εφικτή λύση, η οποία προκύπτει από το δεύτερο πίνακα Simplex, είναι η εξής:

$$(x_1 = c_1 \frac{b_1}{a_{11}}, x_2 = 0, ..., \ x_n = 0, \ s_1 = 0, \ s_2 = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}, ..., \ s_m = b_m - \frac{a_{m1}b_1}{a_{11}})$$

και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $Z = 0$.

Μετά τον προσδιορισμό της δεύτερης βελτιωμένης λύσης του προβλήματος (3η φάση), επιστρέφουμε στη 2η φάση, όπου διερευνούμε κατά τα γνωστά αν η νέα λύση είναι η βέλτιστη ή επιδέχεται περαιτέρω βελτίωση. Σε περίπτωση όπου η λύση είναι η βέλτιστη, η διαδικασία επίλυσης έχει ολοκληρωθεί. Διαφορετικά, επιστρέφουμε στην 3η φάση, όπου κατά τα γνωστά προχωρούμε στον προσδιορισμό μιας νέας λύσης. Η διαδοχική αυτή εφαρμογή της 2ης και της 3ης φάσης επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσες απαιτούνται για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης.

### 3.3.1.2 Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Η γενική μεθοδολογία επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 3.3.1 και εφαρμόστηκε στην περίπτωση ενός προβλήματος μεγιστοποίησης στην υποενότητα 3.3.1.1 μπορεί να εφαρμοστεί με δύο μικρές διαφοροποιήσεις και στην περίπτωση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης. Οι δύο διαφοροποιήσεις αφορούν τον εντοπισμό των μεταβλητών που αποτελούν την αρχική βασική εφικτή λύση και το **κριτήριο βελτιστοποίησης** ή, όπως επίσης αναφέρεται, **κριτήριο τερματισμού** της διαδικασίας αναζήτησης μιας καλύτερης, από την τρέχουσα, λύσης.

Για τη διευκόλυνση του αναγνώστη, θα επαναληφθούν στα επόμενα συνοπτικά όλες οι φάσεις και τα βήματα της μεθοδολογίας επίλυσης του προβλήματος, αλλά η έμφαση θα δοθεί στα δύο σημεία διαφοροποίησης.

**Φάση 1η: Αναζήτηση και προσδιορισμός μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης.**

Όπως και στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, απαραίτητη προϋπόθεση για την έναρξη της επίλυσης ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης με τη μέθοδο Simplex είναι η διατύπωσή του στην κανονική μορφή, η οποία, για διευκόλυνση του αναγνώστη, επαναλαμβάνεται εδώ.

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3.9)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_m$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &- 1\,e_1 + 0\,e_2 + \ldots + 0\,e_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &+ 0\,e_1 - 1\,e_2 + \ldots + 0\,e_m = b_2 \\
&\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &+ 0\,e_1 + 0\,e_2 + \ldots - 1\,e_m = b_m
\end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0 \ldots e_m \geq 0$$

Η φάση αυτή περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα, που θα παρουσιαστούν αναλυτικά στην συνέχεια:

- Εντοπισμός των μεταβλητών που αποτελούν την αρχική λύση.
- Δημιουργία του αρχικού πίνακα Simplex.
- Προσδιορισμός της αρχικής λύσης.

***Βήμα 1ο: Εντοπισμός των μεταβλητών που αποτελούν την αρχική λύση.***

Όπως φαίνεται από την παρουσίαση του μοντέλου στην κανονική του μορφή, στην ουσία πρόκειται για ένα σύστημα $m$ εξισώσεων, όσοι δηλαδή είναι και οι περιορισμοί, και $m+n$ αγνώστων, όσες δηλαδή είναι συνολικά οι μεταβλητές απόφασης $(n)$ και οι χαλαρές μεταβλητές $(m)$. Ένα τέτοιο σύστημα, όπου ο αριθμός των αγνώστων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων, ονομάζεται «αόριστο» και έχει θεωρητικά άπειρες λύσεις. Για να λυθεί ένα τέτοιο σύστημα, θεωρούμε γνωστές $n$ από τις μεταβλητές του, τους δίνουμε αυθαίρετες τιμές και στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα ως προς τις υπόλοιπες $m$ μεταβλητές. Το ζητούμενο, λοιπόν, στο βήμα αυτό είναι να προσδιορίσουμε ποιες $n$ από τις μεταβλητές του θα θεωρήσουμε γνωστές και ποιες τιμές θα τους δώσουμε. Παρατηρώντας προσεκτικότερα το σύστημα των $m$ εξισώσεων, διαπιστώνουμε ότι κάθε πλεονασματική μεταβλητή εμφανίζεται σε μία μόνο εξίσωση με συντελεστή όχι τη μονάδα, όπως στην περίπτωση της μεγιστοποίησης, αλλά (-1). Κατά συνέπεια, τα $n$ διανύσματα - στήλες των πλεονασματικών μεταβλητών, που εμφανίζονται γραμμοσκιασμένα στο σύστημα των περιορισμών, δεν αποτελούν μοναδιαίο πίνακα, η ύπαρξη του οποίου είναι απαραίτητη για την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος.

Το γεγονός ότι στο σύστημα των περιορισμών κάθε πλεονασματική μεταβλητή εμφανίζεται σε μία μόνο εξίσωση με συντελεστή (-1) πρακτικά σημαίνει ότι, μηδενίζοντας όλες τις μεταβλητές απόφασης, καθορίζονται αυτόματα οι τιμές των πλεονασματικών μεταβλητών, καθώς καθεμία από αυτές λαμβάνει την αντίθετη τιμή του δεύτερου μέλους της εξίσωσης στην οποία βρίσκεται. Η τιμή, όμως, αυτή είναι αρνητική, γεγονός που παραβιάζει τη συνθήκη μη αρνητικότητας, αλλά και δεν συνάδει με το φυσικό νόημα της μεταβλητής.

Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα των αρνητικών μεταβλητών αλλά και της έλλειψης του μοναδιαίου πίνακα και για να προχωρήσουμε στην αναζήτηση της αρχικής λύσης, εισάγουμε στο μοντέλο **τεχνητές μεταβλητές** (*artificial variables*). Συγκεκριμένα, σε κάθε περιορισμό στον οποίο υπάρχει πλεονασματική μεταβλητή $(e_i)$ προσθέτουμε μία τεχνητή μεταβλητή $(a_i)$. Οι μεταβλητές αυτές δε συνδέονται λογικά ή οργανικά με το πρόβλημα και μάλιστα, αν μετά την επίλυση του προβλήματος κάποια από αυτές παραμένει στη βέλτιστη λύση, το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση. Παρά ταύτα, χρησιμοποιούνται γιατί δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας του αρχικού πίνακα Simplex. Είναι προφανές ότι η ύπαρξη τεχνητής μεταβλητής σε έναν περιορισμό που είναι ήδη σε μορφή ισότητας έχει νόημα μόνο αν η τεχνητή αυτή μεταβλητή έχει τιμή μηδέν (0) στη βέλτιστη λύση.

Τέλος, σημειώνεται ότι, για να μην παραμένουν τεχνητές μεταβλητές στη βέλτιστη λύση (εκτός φυσικά από την περίπτωση όπου το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση), καθεμία από αυτές προστίθεται στην αντικειμενική συνάρτηση πολλαπλασιαζόμενη με έναν πολύ μεγάλο θετικό συντελεστή Μ. Ο συντελεστής αυτός εκφράζει τη μοναδιαία συνεισφορά της στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και μπορεί να θεωρηθεί ποινή για την είσοδό της στη βάση. Με τον τρόπο αυτόν, κάθε φορά που μια τεχνητή μεταβλητή εισάγεται στη βάση, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή το κόστος, αυξάνεται υπερβολικά, με αποτέλεσμα την άμεση απομάκρυνση της. Η προσθήκη των τεχνητών μεταβλητών στους περιορισμούς και η εισαγωγή τους στην αντικειμενική συνάρτηση με έναν πολύ μεγάλο θετικό συντελεστή είναι γνωστές και ως **μέθοδος του μεγάλου Μ** (*big M method*). Τεχνητές μεταβλητές μπορούν να παρουσιαστούν και σε προβλήματα μεγιστοποίησης εκφρασμένα στη γενική τους μορφή, οπότε θα υπάρχουν και περιορισμοί τύπου $\geq$. Στην περίπτωση αυτή, η τεχνητή μεταβλητή θα πρέπει να αφαιρείται από την αντικειμενική συνάρτηση πολλαπλασιαζόμενη με έναν πολύ μεγάλο θετικό συντελεστή Μ. Ο συντελεστής αυτός εκφράζει τη μοναδιαία συνεισφορά της στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και μπορεί να θεωρηθεί ποινή για την είσοδό της στη βάση. Με τον τρόπο αυτόν, κάθε φορά που μια τεχνητή μεταβλητή εισάγεται στη βάση, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή το κέρδος, μειώνεται υπερβολικά, με αποτέλεσμα την άμεση απομάκρυνσή της. Μια τέτοια περίπτωση προβλήματος μεγιστοποίησης, εκφρασμένου στη γενική του μορφή, για την επίλυση του οποίου χρησιμοποιούνται τεχνητές μεταβλητές, παρουσιάζεται στην Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5 του κεφαλαίου 4.

Μετά την εισαγωγή των τεχνητών μεταβλητών, το μοντέλο του προβλήματος, στην τυπική του μορφή, διαμορφώνεται ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3.10)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n + 0e_1 + 0e_2 + ... + 0e_n + \mathrm{M}a_1 + \mathrm{M}a_2 + ... + \mathrm{M}a_n$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12}\ x_2 + ... + a_{1n}\ x_n - 1e_1 + 0e_2 + ... + 0e_m + 1a_1 + 0\ a_2 + ... + 0\ a_m &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22}\ x_2 + ... + a_2\ \ x_n + 0e_1 - 1e_2 + ... + 0e_m + 0a_1 + 1\ a_2 + ... + 0\ a_m &= b_2 \\ \cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n + 0e_1 + 0e_m + ... - 1e_m + 0a_1 + 1\ a_2 + ... + 1\ a_m &= b_m \end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0, e_1 \geq 0, ..., e_m \geq o,\ \ a_1 \geq 0, ...,\ a_m \geq 0$$

Οι περιορισμοί δομής του προβλήματος, όπως έχουν πλέον εκφραστεί, αποτελούν ένα σύστημα $m$ εξισώσεων με $n+2m$ αγνώστους. Παρατηρώντας το σύστημα των εξισώσεων, σημειώνουμε ότι τα διανύσματα - στήλες των $m$ τεχνητών μεταβλητών που εμφανίζονται γραμμοσκιασμένα αποτελούν μοναδιαίο πίνακα, γεγονός που επιτρέπει την έναρξη επίλυσης του προβλήματος. Επιπλέον, μηδενίζοντας όλες τις μεταβλητές απόφασης και τις πλεονασματικές μεταβλητές, καθορίζονται αυτόματα οι τιμές των τεχνητών μεταβλητών, καθώς καθεμία από αυτές λαμβάνει τη θετική τιμή του δεύτερου μέλους της εξίσωσης στην οποία βρίσκεται. Συνοψίζοντας, λοιπόν, όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, σημειώνουμε ότι οι μεταβλητές που αποτελούν την αρχική λύση είναι οι τεχνητές μεταβλητές: $a_1,\ a_2, ..., a_m$.

Έχοντας εντοπίσει τις μεταβλητές που αποτελούν τη βασική λύση, μπορούμε να ολοκληρώσουμε, κατά τα γνωστά., τα δύο επόμενα βήματα της 1ης φάσης και συγκεκριμένα τη δημιουργία του αρχικού πίνακα Simplex (βήμα 2ο) και τον προσδιορισμό της αρχικής λύσης (βήμα 3ο) και στη συνέχεια να προχωρήσουμε στη 2η φάση.

**Φάση 2η: Έλεγχος για τη δυνατότητα βελτίωσης της τρέχουσας λύσης**.

Στη φάση αυτή, ελέγχεται αν η λύση που προσδιορίστηκε στην προηγούμενη φάση είναι η καλύτερη δυνατή ή αν μπορεί να βελτιωθεί, αντικαθιστώντας μία από τις βασικές μεταβλητές της με μία, μέχρι τώρα, μη βασική. Με άλλα λόγια, ελέγχεται αν υπάρχει έστω μία μη βασική μεταβλητή, η είσοδος της οποίας στο σύνολο των βασικών μεταβλητών, με ταυτόχρονη έξοδο από αυτό μιας ήδη βασικής μεταβλητής, θα βελτιώσει τη λύση που έχει προσδιοριστεί.

Η είσοδος μιας νέας μεταβλητής στο σύνολο των βασικών μεταβλητών θα επηρεάσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης τόσο θετικά $(c_j)$ όσο και αρνητικά $(z_j)$. Η καθαρή μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από την είσοδο στη βάση μιας νέας μεταβλητής ονομάζεται «διαφορική απόδοση» $\left(\delta_j = c_j - z_j\right)$.

Για τη διενέργεια του συγκεκριμένου ελέγχου, υπολογίζεται για κάθε υποψήφια προς είσοδο μεταβλητή η διαφορική της απόδοση $\delta_j$ σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

$$\delta_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{\substack{i=1 \\ j^*=m+1\ldots n}}^{m} a_{ij} c_{j^*} \tag{3.11}$$

όπου:

| |
|---|
| $a_{ij},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$ οι τεχνολογικοί συντελεστές |
| $c_j,\ j = 1,\ldots,m$ οι αντικειμενικοί συντελεστές των $m$ μη βασικών μεταβλητών $x_j$ |
| $c_{j*},\ j* = m+1,\ldots,n$ οι αντικειμενικοί συντελεστές των $n$ βασικών μεταβλητών $x_j$ |

Σε αντίθεση, όμως, με το πρόβλημα της μεγιστοποίησης, όπου το ζητούμενο ήταν η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης και όπου θεωρούσαμε ότι η λύση επιδέχεται βελτίωση όταν υπήρχαν θετικές διαφορικές αποδόσεις, στην παρούσα περίπτωση, όπου το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, θεωρούμε ότι η λύση επιδέχεται βελτίωση όταν υπάρχουν αρνητικές διαφορικές αποδόσεις. Ειδικότερα, στην περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποίησης, το κριτήριο βελτιστοποίησης ή τερματισμού έχει ως εξής:

- Αν όλες οι μη βασικές μεταβλητές εμφανίζουν $\delta_j > 0$, τότε η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη, καθώς η εισαγωγή οποιασδήποτε άλλης μη βασικής μεταβλητής στο σύνολο των βασικών μεταβλητών θα μειώσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

- Αν όλες οι μη βασικές μεταβλητές εμφανίζουν $\delta_j \geq 0$ και τουλάχιστον μία $\delta_j = 0$, τότε είναι στη διακριτική ευχέρεια του λήπτη της απόφασης να επιλέξει:
    - Να μην εισαχθεί στη βάση μεταβλητή με $\delta_j = 0$, οπότε η διερεύνηση του προβλήματος ολοκληρώνεται και η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη.
    - Να εισαχθεί στη βάση μεταβλητή με $\delta_j = 0$, οπότε η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη και η διερεύνηση θα πρέπει να συνεχιστεί με την είσοδο στη βάση μιας νέας μεταβλητής. Η μεταβλητή που θα εισέλθει στη βάση θα είναι αυτή για την οποία $\delta_j = 0$, αν υπάρχει μόνο μία, ή μία αυθαίρετα επιλεγμένη μεταξύ αυτών για τις οποίες $\delta_j = 0$, αν υπάρχουν περισσότερες από μία. Σημειώνεται ότι η επιλογή της μεταβλητής με $\delta_j = 0$, που θα εισαχθεί στη βάση, δεν επηρεάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά μόνο το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής.
- Αν τουλάχιστον μία από τις μη βασικές μεταβλητές εμφανίζει $\delta_j < 0$, τότε η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη και η διερεύνηση θα πρέπει να συνεχιστεί με την εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής στη βάση. Ως **εισερχόμενη μεταβλητή** θα επιλεγεί αυτή για την οποία $\delta_j < 0$, αν υπάρχει μόνο μία, ή αυτή με το μεγαλύτερο σε απόλυτη τιμή $\delta_j$, αν υπάρχουν περισσότερες από μία. Επιπλέον, στην περίπτωση όπου το μέγιστο, σε απόλυτη τιμή, $\delta_j$ αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία μεταβλητές, δηλαδή έχουμε **ισοβαθμία εισερχόμενης μεταβλητής**, τότε επιλέγεται μία από αυτές αυθαίρετα. Πάντως, ανεξάρτητα από την επιλογή της μεταβλητής με $\delta_j < 0$ που θα εισέλθει στη βάση, η μέθοδος Simplex θα συγκλίνει στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα, δηλαδή στην ίδια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά με διαφορετικό σχέδιο παραγωγής. Το **πλήθος**

**των επαναλήψεων**, όμως, που θα απαιτηθούν μέχρι τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης θα διαφέρει ανάλογα με την επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής.

**Φάση 3η: Αναζήτηση μιας καλύτερης λύσης.**

Στη φάση αυτή, εφόσον βέβαια στην προηγούμενη διαπιστώθηκε ότι η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, αναζητούμε μια καλύτερη λύση. Προς το σκοπό αυτόν, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

*Βήμα 1ο: Εντοπισμός της εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής.*

*Βήμα 2ο: Εντοπισμός της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής.*

*Βήμα 3ο: Δημιουργία του νέου πίνακα Simplex.*

*Βήμα 4ο: Προσδιορισμός της νέας λύσης.*

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στη 2η φάση, ως νέα εισερχόμενη μεταβλητή επιλέγεται αυτή που παρουσιάζει τη μικρότερη διαφορική απόδοση. Η είσοδος της μεταβλητής αυτής στη βάση θα προκαλέσει τη μέγιστη δυνατή μείωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Έχοντας εντοπίσει την εισερχόμενη μη βασική μεταβλητή, μπορούμε να ολοκληρώσουμε, κατά τα γνωστά, τα τρία επόμενα βήματα της 3ης φάσης και να προσδιορίσουμε τη νέα λύση. Μετά τον προσδιορισμό της νέας λύσης, επιστρέφουμε στη 2η φάση, όπου διερευνούμε, κατά τα γνωστά, αν η νέα λύση είναι η βέλτιστη ή επιδέχεται βελτίωση. Η διαδοχική αυτή εφαρμογή της 3ης και της 2ης φάσης επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσες απαιτούνται για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης.

### 3.3.2 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης

Η μέθοδος Simplex που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 3.3.1.1 θα εφαρμοστεί εδώ σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Το πρόβλημα που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτό που διατυπώθηκε στην υποενότητα 1.4.1, εκφράστηκε ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού και διαπιστώθηκε ότι πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις για την επίλυσή του ως μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Κατά συνέπεια, μπορούμε να προχωρήσουμε στη λύση του με τη μέθοδο Simplex.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο Simplex προϋποθέτει ότι αυτό είναι εκφρασμένο στην τυπική του μορφή. Για το λόγο αυτόν, επαναδιατυπώνουμε το παραπάνω μοντέλο από την κανονική μορφή, στην οποία είναι διατυπωμένο, στην τυπική του μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται αν προσθέσουμε στο πρώτο μέλος κάθε περιορισμού δομής μια χαλαρή μεταβλητή $(s_i)$, μετατρέποντας έτσι τους περιορισμούς από ανισότητες του τύπου $\leq$ σε ισότητες. Σημειώνεται ότι οι χαλαρές μεταβλητές προστίθενται και στην αντικειμενική συνάρτηση, αλλά με μηδενικούς συντελεστές, χωρίς να επηρεάζουν την τιμή της.

Με βάση τα παραπάνω, το μοντέλο του προβλήματος, εκφρασμένο στην τυπική του μορφή, έχει ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (3.12)

$$Z = 3x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 &= 1600 \\ 6x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 &= 1800 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 &= 350 \end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0$$

Όπως φαίνεται από τη μορφή του μοντέλου, στην ουσία πρόκειται για ένα σύστημα $m = 3$ εξισώσεων, όσοι δηλαδή είναι και οι περιορισμοί, και $n + m = 2 + 3 = 5$ αγνώστων, όσες δηλαδή είναι συνολικά οι μεταβλητές απόφασης $(x_1,\ x_2)$ και οι χαλαρές μεταβλητές $(s_1,\ s_2,\ s_3)$. Όπως φαίνεται, κάθε χαλαρή μεταβλητή εμφανίζεται σε μία μόνο εξίσωση με συντελεστή τη μονάδα. Οι μοναδιαίοι αυτοί συντελεστές αποτελούν το μοναδιαίο πίνακα, η ύπαρξη του οποίου είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο Simplex. Οι στήλες του πίνακα αυτού εμφανίζονται γραμμοσκιασμένες στο σύστημα των περιορισμών δομής.

Έχοντας εκφράσει το αρχικό μοντέλο στην τυπική του μορφή και αφού διαπιστώσουμε την ύπαρξη μοναδιαίου πίνακα συντελεστών στους περιορισμούς δομής, προχωρούμε στην επίλυση του μοντέλου με τη μέθοδο Simplex. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην υποενότητα 3.3.1.1, η μέθοδος Simplex αποτελείται από 3 φάσεις, καθεμία από τις οποίες περιλαμβάνει επιμέρους βήματα.

**Φάση 1η: Αναζήτηση μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης.**

Στη φάση αυτή, προσδιορίζεται μια αρχική βασική εφικτή λύση του προβλήματος. Τα επιμέρους βήματά της περιγράφονται αναλυτικά στη συνέχεια:

***Βήμα 1ο: Εντοπισμός των μεταβλητών που περιλαμβάνονται στην αρχική λύση.***

Σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί παραπάνω, οι μεταβλητές που θα περιλαμβάνονται στην αρχική λύση είναι οι χαλαρές μεταβλητές $s_1$, $s_2$ και $s_3$.

***Βήμα 2ο: Δημιουργία του αρχικού πίνακα Simplex.***

Έχοντας προσδιορίσει την αρχική βασική εφικτή λύση του προβλήματος, μπορούμε να προχωρήσουμε στη δημιουργία του **αρχικού πίνακα Simplex** που αποτυπώνει όσα αναφέρθηκαν παραπάνω (Πίνακας 3.4). Όπως φαίνεται, ο αρχικός πίνακας Simplex περιέχει 5 στήλες, μία για κάθε μεταβλητή και τρεις ακόμη πρόσθετες στήλες με τις ενδείξεις «Βάση», «Δεξιό Μέλος» και «Πηλίκο» αντίστοιχα, από τις οποίες η τελευταία δεν έχει προς το παρόν συμπληρωθεί.

**Πίνακας 3.4**
Αρχικός Πίνακας Simplex (α)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Μεταβλητές | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 0 | $s_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1600 | |
| 0 | $s_2$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1800 | |
| 0 | $s_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | |
| $z_j$ | | | | | | | $Z =$ | |
| $c_j - z_j$ | | | | | | | | |

Για καθεμία από τις βασικές μεταβλητές που σημειώνονται στην πρώτη στήλη («Βάση»), υπάρχει μια γραμμή που ουσιαστικά αντιστοιχεί στον περιορισμό στον οποίο εμφανίζεται η βασική αυτή μεταβλητή.

Τέλος, εκτός από τις τρεις αυτές γραμμές, ο αρχικός πίνακας Simplex περιέχει δύο ακόμη τελευταίες γραμμές και μία θέση για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $Z$, οι οποίες δεν έχουν προς το παρόν συμπληρωθεί. Στο περιεχόμενο και στη χρήση των δύο τελευταίων γραμμών με τις ενδείξεις «$z_j$» και «$c_j - z_j$» αντίστοιχα θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι ο Πίνακας 3.4 αναφέρεται ως αρχικός πίνακας Simplex (α), σε αντιδιαστολή με τους αντίστοιχους πίνακες (β) και (γ) που ακολουθούν και έχουν: ο μεν πίνακας (β) συμπληρωμένα και τα κελιά των δύο τελευταίων γραμμών, καθώς και αυτό της τιμής του Z, ενώ ο πίνακας (γ) όλα ανεξαιρέτως τα κελιά. Η ίδια προσέγγιση ακολουθείται και για τους επόμενους πίνακες Simplex.

***Βήμα 3ο: Προσδιορισμός της αρχικής λύσης.***

Έχοντας δημιουργήσει τον αρχικό πίνακα Simplex, μπορούμε άμεσα να προσδιορίσουμε την πρώτη βασική εφικτή λύση του προβλήματος.

$$\left(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ s_1 = 1600,\ s_2 = 1800,\ s_3 = 350\right)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση, έχουμε:

$$Z = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 1600 + 0 \cdot 1800 + 0 \cdot 350 \to Z = 0 \qquad (3.13)$$

**Φάση 2η: Έλεγχος για τη δυνατότητα βελτίωσης της τρέχουσας λύσης.**

Στη φάση αυτή, ελέγχεται αν η λύση που προσδιορίστηκε στην προηγούμενη φάση είναι η βέλτιστη ή αν υπάρχει έστω και μία μη βασική μεταβλητή με θετική διαφορική απόδοση που εισερχόμενη στη βάση θα αυξήσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι βασικές μεταβλητές είναι οι $s_1$, $\mathrm{s}_2$, $\mathrm{s}_3$ και οι μη βασικές οι $x_1$, $x_2$. Οι διαφορικές αποδόσεις $\left(\delta_1, \delta_2\right)$ των μη βασικών μεταβλητών ( $x_1$, $x_2$) υπολογίζονται, κατά τα γνωστά, και έχουν ως εξής:

$$\delta_1 = c_1 - z_1 = c_1 - (a_{11}c_3 + a_{21}c_4 + a_{31}c_5) = 3 - (2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 3 - 0 \Rightarrow \delta_1 = 3$$

$$\delta_2 = c_2 - z_2 = c_2 - (a_{12}c_3 + a_{22}c_4 + a_{32}c_5) = 8 - (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 8 - 0 \Rightarrow \delta_2 = 8$$

Για τις μεταβλητές που είναι ήδη βασικές (σε αυτό το στάδιο οι $s_1$, $s_2$, $s_3$), η είσοδός τους στη βάση δεν έχει νόημα και, προφανώς, η καθαρή συνεισφορά τους στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μηδενική. Κατά συνέπεια, μπορούμε απευθείας να θέσουμε τις τιμές $z_j$, για τις βασικές μεταβλητές, ίσες με τους αντίστοιχους αντικειμενικούς συντελεστές ($c_j$), οπότε οι συνεισφορές τους $\left(\delta_j = c_j - z_j\right)$ είναι μηδενικές. Πάντως, ανεξαρτήτως της απευθείας αυτής εκτίμησης των τιμών $z_j, \delta_j$ για τις βασικές μεταβλητές, οι τιμές αυτές μπορούν εναλλακτικά να υπολογιστούν, όπως και οι αντίστοιχες για τις υποψήφιες προς είσοδο μη βασικές μεταβλητές, σύμφωνα με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω. Συγκεκριμένα:

Για τη μεταβλητή $s_1$ έχουμε:

$$\delta_3 = c_3 - z_3 = c_3 - (a_{13}c_3 + a_{23}c_4 + a_{33}c_5) = 0 - (1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0) \rightarrow \delta_3 = 0$$

Αντίστοιχα, για τη μεταβλητή $s_2$ έχουμε:

$$\delta_4 = c_4 - z_4 = c_4 - (a_{14}c_3 + a_{24}c_4 + a_{34}c_5) = 0 - (0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0) \rightarrow \delta_4 = 0$$

Τέλος, για τη μεταβλητή $s_3$ έχουμε:

$$\delta_5 = c_5 - z_5 = c_5 - (a_{15}c_3 + a_{25}c_4 + a_{35}c_5) = 0 - (0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0) \rightarrow \delta_5 = 0$$

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε πλέον να συμπληρώσουμε τις γραμμές «$z_j$» και «$c_j - z_j$» του αρχικού πίνακα Simplex (Πίνακας 3.5).

**Πίνακας 3.5**
Αρχικός πίνακας Simplex (β)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 0 | $s_1$ | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1600 | |
| 0 | $s_2$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1800 | |
| 0 | $s_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $Z = 0$ | |
| $c_j - z_j$ | | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |

Παρατηρώντας την τελευταία γραμμή του Πίνακα 3.5, σημειώνουμε ότι και οι δύο μη βασικές μεταβλητές $x_1$ και $x_2$ παρουσιάζουν θετικές διαφορικές αποδόσεις $\left(\delta_j \geq 0\right)$ και συγκεκριμένα $\delta_1 = 3 > 0$ και $\delta_2 = 8 > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η παρούσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, καθώς και οι δύο αυτές μεταβλητές, αν γίνουν βασικές, θα έχουν θετική συνεισφορά στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης. Κατά συνέπεια, η διερεύνηση θα συνεχιστεί με τη διαδικασία αναζήτησης μιας καλύτερης λύσης στην επόμενη φάση.

**Φάση 3η: Αναζήτηση μιας καλύτερης λύσης.**

Στην προηγούμενη φάση διαπιστώθηκε ότι η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, καθώς υπάρχουν δύο μη βασικές μεταβλητές $x_1$ και $x_2$ με θετική διαφορική απόδοση $\delta_1 = 3$ και $\delta_2 = 8$ αντίστοιχα. Στην παρούσα φάση, θα αναζητηθεί μια καλύτερη λύση.

***Βήμα 1ο: Εντοπισμός της εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής.***

Επειδή, όπως είναι προφανές, $\delta_1 < \delta_2$, η μεταβλητή $x_2$ θα είναι η νέα εισερχόμενη μη βασική μεταβλητή, καθώς η είσοδός της στη βάση θα προκαλέσει τη μέγιστη δυνατή αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Η στήλη της $x_2$ στον αρχικό πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική στήλη** ή **στήλη-οδηγός**.

***Βήμα 2ο: Εντοπισμός της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής.***

Μετά την επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής $x_2$, θα προχωρήσουμε στο δεύτερο βήμα της φάσης αυτής, όπου θα εντοπίσουμε την εξερχόμενη μεταβλητή, δηλαδή αυτή που θα αντικατασταθεί στη βάση από τη $x_2$. Υποψήφιες προς αντικατάσταση μεταβλητές σε αυτό το στάδιο είναι οι τρεις χαλαρές μεταβλητές $s_1$, $s_2$ και $s_3$.

Βάση για την επιλογή, μεταξύ αυτών, της εξερχόμενης μεταβλητής αποτελούν οι λόγοι $\frac{b_i}{a_{i2}}, i = 1,...,3$ και ως εξερχόμενη βασική μεταβλητή επιλέγεται αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο θετικό λόγο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι τρεις λόγοι είναι οι εξής:

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{1600}{4} = 400, \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{1800}{2} = 900, \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{350}{1} = 350$$

και με αυτούς συμπληρώνονται και τα τελευταία κενά κελιά της στήλης «Πηλίκο» του αρχικού πίνακα Simplex (Πίνακας 3.6).

**Πίνακας 3.6**
Αρχικός πίνακας Simplex (γ)

<table>
<tr><td colspan="2">Βάση</td><td colspan="5">Μεταβλητές</td><td rowspan="3">Δεξιό Μέλος</td><td rowspan="3">Πηλίκο</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Αντικειμενικοί Συντελεστές</td><td rowspan="2">Βασικές Μεταβλητές</td><td>3</td><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>$s_1$</td><td>$s_2$</td><td>$s_3$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$s_1$</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1600</td><td>400</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$s_2$</td><td>6</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1800</td><td>900</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$s_3$</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>350</td><td>350</td></tr>
<tr><td colspan="2">$z_j$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td colspan="2" rowspan="2">$Z = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c_j - z_j$</td><td>3</td><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Κατά συνέπεια, σύμφωνα με τον κανόνα του ελάχιστου πηλίκου, ως εξερχόμενη μεταβλητή επιλέγεται η μεταβλητή με το μικρότερο θετικό λόγο, δηλαδή η $s_3$, που αντιστοιχεί στον πόρο $b_3$. Η γραμμή της $s_3$ στον αρχικό πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική γραμμή** ή **γραμμή-οδηγός** και το σημείο τομής της με την αξονική στήλη ονομάζεται **αξονικό στοιχείο** ή **στοιχείο-οδηγός**. Η αξονική γραμμή και η αξονική στήλη εμφανίζονται γραμμοσκιασμένες αναδεικνύοντας έτσι το αξονικό σημείο $a_{32} = 1$, το οποίο, όπως θα δούμε, θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη φάση για τη μετάβαση στο δεύτερο πίνακα Simplex.

***Βήμα 3ο: Δημιουργία του δεύτερου πίνακα Simplex.***

Με τον εντοπισμό της εισερχόμενης στη βάση μη βασικής μεταβλητής και της εξερχόμενης από αυτή βασικής μεταβλητής, προχωρούμε στη δημιουργία του δεύτερου πίνακα Simplex. Ο πίνακας αυτός (Πίνακας 3.7) έχει την ίδια μορφή με τον αρχικό, αλλά και μία ουσιαστική διαφορά. Οι βασικές μεταβλητές του δεύτερου πίνακα είναι οι $s_1$, $s_2$, $x_2$, καθώς η μη βασική μεταβλητή $x_2$ που εισήλθε στη βάση αντικατέστησε τη βασική μεταβλητή $s_3$ του αρχικού πίνακα. Αντίστοιχα, οι μη βασικές μεταβλητές του δεύτερου πίνακα είναι οι $x_1$, $s_3$.

**Πίνακας 3.7**

Δεύτερος πίνακας Simplex (α)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 0 | $s_1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | -4 | 200 | |
| 0 | $s_2$ | 6 | 0 | 0 | 1 | -2 | 1100 | |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | |
| $z_j$ | | | | | | | $Z =$ | |
| $c_j - z_j$ | | | | | | | | |

Ο τρόπος συμπλήρωσης των κελιών του δεύτερου πίνακα, με βάση τα αντίστοιχα του πρώτου, περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια.

- Στην πρώτη στήλη με την ένδειξη «Βάση», η βασική μεταβλητή $s_3$ του αρχικού πίνακα έχει αντικατασταθεί από τη $x_2$ με συντελεστή το 8.
- Οι στήλες των βασικών μεταβλητών $s_1$ και $s_2$ του αρχικού πίνακα, που εξακολουθούν να είναι βασικές και στο δεύτερο πίνακα, παραμένουν ως έχουν.
- Η στήλη της μεταβλητής $x_2$, που έγινε βασική αντικαθιστώντας τη $s_3$, ταυτίζεται με τη στήλη $s_3$, όπως αυτή ήταν στον αρχικό πίνακα.
- Η σειρά της $x_2$ στο δεύτερο πίνακα, η οποία βρίσκεται στη θέση της αξονικής σειράς του αρχικού πίνακα, προκύπτει από αυτήν αν διαιρέσουμε όλα τα στοιχεία

της (0,1,0,0,1,350) με το αξονικό στοιχείο (1). Άρα η σειρά της $x_2$ στο δεύτερο πίνακα είναι:

$$\left(0/1, 1/1, 0/1, 0/1, 1/1, 350/1\right) = \left(0, 1, 0, 0, 1, 350\right)$$

- Όλες οι υπόλοιπες σειρές του δεύτερου πίνακα προκύπτουν από τις αντίστοιχες του αρχικού με βάση τον ακόλουθο γενικό κανόνα:

| |
|---|
| Σειρά $i$ νέου πίνακα Simplex = Σειρά $i$ προηγούμενου πίνακα Simplex - (Συντελεστής, στη σειρά $i$ του προηγούμενου πίνακα, της εισερχόμενης στο νέο πίνακα μεταβλητής) × (Σειρά του νέου πίνακα που βρίσκεται στη θέση της αξονικής σειράς του προηγούμενου πίνακα) |

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, νέος είναι ο δεύτερος πίνακας Simplex και προηγούμενος ο αρχικός.

Με βάση τα παραπάνω, η σειρά της μεταβλητής $s_1$ του δεύτερου πίνακα είναι η εξής:

$$\left(2, 4, 1, 0, 0, 1600\right) - 4\left(0, 1, 0, 0, 1, 350\right) = \left(2, 4, 1, 0, 0, 1600\right) - \left(0, 4, 0, 0, 4, 1400\right) =$$
$$\left(2-0, 4-4, 1-0, 0-0, 0-4, 1600-1400\right) = \left(2, 0, 1, 0, -4, 200\right)$$

Αντίστοιχα, η σειρά της μεταβλητής $s_2$ του δεύτερου πίνακα είναι η εξής:

$$\left(6, 2, 0, 1, 0, 1800\right) - 2\left(0, 1, 0, 0, 1, 350\right) = \left(6, 2, 0, 1, 0, 1800\right) - \left(0, 2, 0, 0, 2, 700\right) =$$
$$\left(6-0, 2-2, 0-0, 1-0, 0-2, 1800-700\right) = \left(6, 0, 0, 1, -2, 1100\right)$$

***Βήμα 4ο: Προσδιορισμός της δεύτερης λύσης.***

Έχοντας δημιουργήσει το δεύτερο πίνακα Simplex και έχοντας συμπληρώσει τα απαραίτητα κελιά του, μπορούμε άμεσα να προσδιορίσουμε τη νέα βελτιωμένη λύση του προβλήματος.

Αντικαθιστώντας τις τιμές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση έχουμε

$$Z = 3\cdot 0 + 8\cdot 350 + 0\cdot 200 + 0\cdot 1100 + 0\cdot 0 \rightarrow Z = 2800 \qquad (3.14)$$

Μετά τον προσδιορισμό της δεύτερης λύσης, επιστρέφουμε στη 2η φάση για να ελέγξουμε αν η λύση αυτή είναι η βέλτιστη, οπότε ολοκληρώνεται η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, ή όχι, οπότε θα επανέλθουμε στην 3η φάση για τον προσδιορισμό μιας τρίτης βελτιωμένης λύσης.

**Φάση 2η: Έλεγχος για τη δυνατότητα βελτίωσης της τρέχουσας λύσης.**

Στη φάση αυτή, ελέγχεται αν η παρούσα λύση είναι η βέλτιστη λύση ή αν υπάρχει έστω και μία μη βασική μεταβλητή με θετική διαφορική απόδοση που εισερχόμενη στη βάση θα αυξήσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι βασικές μεταβλητές είναι οι $s_1$, $s_2$, $x_2$ και οι μη βασικές οι $x_1$, $s_3$. Οι διαφορικές αποδόσεις των μη βασικών μεταβλητών υπολογίζονται κατά γνωστά και είναι $\delta_1 = 3$ και $\delta_5 = -8$. Οι διαφορικές αποδόσεις των βασικών μεταβλητών είναι, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μηδενικές και, κατά συνέπεια, ισχύει: $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$.

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε να συμπληρώσουμε τις γραμμές $z_j$ και $c_j - z_j$ του δεύτερου πίνακα Simplex (Πίνακας 3.8).

**Πίνακας 3.8**

Δεύτερος Πίνακας Simplex (β)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 0 | $s_1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | -4 | 200 | |
| 0 | $s_2$ | 6 | 0 | 0 | 1 | -2 | 1100 | |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | |
| $z_j$ | | 0 | 8 | 0 | 0 | 8 | $Z = 2800$ | |
| $c_j - z_j$ | | 3 | 0 | 0 | 0 | -8 | | |

Παρατηρώντας την τελευταία γραμμή του πίνακα, σημειώνουμε ότι η βασική μεταβλητή $x_1$ παρουσιάζει θετική διαφορική απόδοση $(\delta_1 = 3 > 0)$. Σύμφωνα με το κριτήριο βελτιστοποίησης, αυτό σημαίνει ότι η παρούσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, καθώς, αν η μεταβλητή $x_1$ γίνει βασική, θα έχει θετική συνεισφορά στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης. Κατά συνέπεια, η διερεύνηση θα συνεχιστεί με τη διαδικασία μίας τρίτης, καλύτερης λύσης.

**Φάση 3η: Αναζήτηση μιας καλύτερης λύσης.**

***Βήμα 1ο: Εντοπισμός της εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής.***

Επειδή, όπως ήδη αναφέρθηκε, $\delta_1 = 3 > 0$, η μεταβλητή $x_1$ θα είναι η νέα εισερχόμενη μη βασική μεταβλητή, καθώς η είσοδός της στη βάση θα προκαλέσει τη μέγιστη δυνατή αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Η στήλη της $x_1$ στο δεύτερο πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική στήλη** ή **στήλη-οδηγός**.

***Βήμα 2ο: Εντοπισμός της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής.***

Μετά την επιλογή της εισερχόμενης μεταβλητής $x_1$, θα προχωρήσουμε στον εντοπισμό της εξερχόμενης μεταβλητής, δηλαδή αυτής που θα αντικατασταθεί στη βάση από τη $x_1$. Υποψήφιες προς αντικατάσταση είναι οι μεταβλητές $s_1$, $s_2$, $x_2$. Βάση για την επιλογή, μεταξύ αυτών, της εξερχόμενης μεταβλητής αποτελούν οι λόγοι $b_i / a_{i1}, i = 1,2,3$ και ως εξερχόμενη βασική μεταβλητή επιλέγεται αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο θετικό λόγο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι τρεις λόγοι είναι οι εξής:

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{200}{2} = 100, \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{1100}{6}, \frac{b_3}{a_{31}} = \frac{350}{0} = \text{ δεν ορίζεται}$$

και με αυτούς συμπληρώνονται και τα τελευταία κενά κελιά της στήλης «Πηλίκο» του δεύτερου πίνακα Simplex (Πίνακας 3.9):

**Πίνακας 3.9**
Δεύτερος πίνακας Simplex (γ)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 0 | $s_1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | -4 | 200 | 100 |
| 0 | $s_2$ | 6 | 0 | 0 | 1 | -2 | 1100 | $\frac{1100}{6}$ |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | - |
| $z_j$ | | 0 | 8 | 0 | 0 | 8 | $Z = 2800$ | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_j - z_j$ | 3 | 0 | 0 | 0 | -8 | |

Σύμφωνα με τον κανόνα του ελάχιστου πηλίκου, ως εξερχόμενη μεταβλητή επιλέγεται η $s_1$ που αντιστοιχεί στον πόρο $b_1$. Η γραμμή της $s_1$ στο δεύτερο πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική γραμμή** και το σημείο τομής της με την **αξονική στήλη** ονομάζεται **αξονικό στοιχείο** ή **στοιχείο-οδηγός**. Η αξονική γραμμή και η αξονική στήλη εμφανίζονται γραμμοσκιασμένες στον Πίνακα 3.9 αναδεικνύοντας έτσι το αξονικό στοιχείο $a_{11}=2$.

***Βήμα 3ο: Δημιουργία του τρίτου πίνακα Simplex.***

Μετά τον εντοπισμό της εισερχόμενης στη βάση μη βασικής μεταβλητής και της εξερχόμενης από αυτή βασικής μεταβλητής, προχωρούμε στη δημιουργία του τρίτου πίνακα Simplex. Ο πίνακας αυτός (Πίνακας 3.10) έχει την ίδια μορφή με τον αρχικό, αλλά και μία ουσιαστική διαφορά. Οι βασικές μεταβλητές του τρίτου πίνακα είναι οι $x_1$, $s_2$, $x_2$, καθώς η μη βασική μεταβλητή $x_1$, που εισήλθε στη βάση, αντικατέστησε τη βασική μεταβλητή $s_1$ του αρχικού πίνακα. Αντίστοιχα, οι μη βασικές μεταβλητές του τρίτου πίνακα είναι οι $s_1$, $s_3$. Οι τιμές των κελιών του πίνακα υπολογίζονται κατά τα γνωστά:

**Πίνακας 3.10**

Τρίτος πίνακας Simplex (α)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 3 | $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | -2 | 100 | |
| 0 | $s_2$ | 0 | 0 | -3 | 1 | 10 | 500 | |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | |
| $z_j$ | | | | | | | $Z =$ | |
| $c_j - z_j$ | | | | | | | | |

*__Βήμα 4ο: Προσδιορισμός της τρίτης λύσης.__*

Έχοντας δημιουργήσει τον τρίτο πίνακα Simplex και έχοντας συμπληρώσει τα απαραίτητα κελιά του, μπορούμε άμεσα να προσδιορίσουμε τη νέα βελτιωμένη λύση του προβλήματος, που έχει ως εξής:

$$x_1 = 100,\ x_2 = 350,\ s_1 = 0,\ s_2 = 500,\ s_3 = 0$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση, έχουμε :

$$Z = 3\cdot 100 + 8\cdot 350 + 0\cdot 0 + 0\cdot 500 + 0\cdot 0 \to Z = 3100 \qquad (3.15)$$

Μετά τον προσδιορισμό της τρίτης λύσης, επιστρέφουμε στη 2η φάση για να ελέγξουμε αν η λύση αυτή είναι η βέλτιστη, οπότε ολοκληρώνεται η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, ή όχι, οπότε θα επανέλθουμε στην τρίτη φάση για τον προσδιορισμό μιας τέταρτης βελτιωμένης λύσης.

**Φάση 2η: Έλεγχος για τη δυνατότητα βελτίωσης της τρέχουσας λύσης.**

Στη φάση αυτή, ελέγχεται αν η παρούσα λύση είναι η βέλτιστη ή αν υπάρχει έστω και μία μη βασική μεταβλητή με θετική διαφορική απόδοση που εισερχόμενη στη βάση θα αυξήσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι βασικές μεταβλητές είναι οι $x_1, s_{2,} x_2$ και οι μη βασικές μεταβλητές οι $s_1, s_3$. Οι αντίστοιχες αποδόσεις των μη βασικών μεταβλητών υπολογίζονται κατά τα γνωστά και είναι $\delta_3 = -3/2$ και $\delta_5 = -2$. Οι διαφορικές αποδόσεις των βασικών μεταβλητών είναι, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μηδενικές και, κατά συνέπεια, ισχύει: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_4 = 0$.

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε να συμπληρώσουμε τις γραμμές $z_j$ και $c_j - z_j$ του τρίτου πίνακα Simplex (β).

**Πίνακας 3.11**
Τρίτος πίνακας Simplex (β)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | -2 | 100 | |
| 0 | $s_2$ | 0 | 0 | -3 | 1 | 10 | 500 | |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | |
| $z_j$ | | 3 | 8 | $\frac{3}{2}$ | 0 | 2 | $Z=3100$ | |
| $c_j - z_j$ | | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | -2 | | |

Παρατηρώντας την τελευταία γραμμή του Πίνακα 3.11, σημειώνουμε ότι οι διαφορικές αποδόσεις όλων των μη βασικών μεταβλητών ($\delta_1, \delta_3$) είναι αρνητικές. Αυτό σημαίνει ότι ο Πίνακας αυτός είναι ο τελικός, η παρούσα λύση είναι η βέλτιστη και, κατά συνέπεια, η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος έχει ολοκληρωθεί.

### 3.3.3 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Η μέθοδος Simplex που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 3.3.1.1 θα εφαρμοστεί εδώ σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Το πρόβλημα που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτό που διατυπώθηκε στην υποενότητα 1.4.2, εκφράστηκε ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού και διαπιστώθηκε ότι πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις για την επίλυσή του ως μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Κατά συνέπεια, μπορούμε να προχωρήσουμε στη λύση του με τη μέθοδο Simplex.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο Simplex προϋποθέτει ότι είναι εκφρασμένο στην τυπική του μορφή. Για το λόγο αυτόν, επαναδιατυπώνουμε το παραπάνω μοντέλο από την κανονική μορφή, στην οποία είναι διατυπωμένο, στην τυπική του μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται αν προσθέσουμε στο πρώτο μέλος κάθε περιορισμού δομής μια πλεονασματική μεταβλητή $(e_i)$, μετατρέποντας έτσι τους περιορισμούς από ανισότητες του τύπου $\geq$ σε ισότητες. Σημειώνεται ότι οι πλεονασματικές μεταβλητές προστίθενται και στην αντικειμενική συνάρτηση, αλλά με μηδενικούς συντελεστές, χωρίς να επηρεάζουν την τιμή της.

Με βάση τα παραπάνω, το μοντέλο του προβλήματος εκφρασμένο στην τυπική του μορφή έχει ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3.16)

$$Z = 150x_1 + 250x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned} 30x_1 + 20x_2 - 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 &= 1500 \\ 5x_1 + 25x_2 + 0e_1 - 1e_2 + 0e_3 &= 900 \\ 0x_1 + 10x_2 + 0e_1 + 0e_2 - 1e_3 &= 200 \end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0$$

Όπως φαίνεται από τη μορφή του μοντέλου, στην ουσία πρόκειται για ένα σύστημα $m = 3$ εξισώσεων, όσοι δηλαδή είναι και οι περιορισμοί, και $n + m = 2 + 3 = 5$ αγνώστων, όσες δηλαδή είναι συνολικά οι μεταβλητές απόφασης $(x_1, x_2)$ και οι πλεονασματικές μεταβλητές $(e_1,\ e_2,\ e_3)$. Όπως φαίνεται, κάθε πλεονασματική μεταβλητή εμφανίζεται σε μία μόνο εξίσωση με συντελεστή όχι τη μονάδα, όπως στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, αλλά το (-1). Κατά συνέπεια, δεν δημιουργείται ο μοναδιαίος πίνακας, η ύπαρξη του οποίου είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο Simplex.

Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό, εισάγουμε στο μοντέλο τεχνητές μεταβλητές. Συγκεκριμένα, σε κάθε περιορισμό στον οποίο υπάρχει πλεονασματική μεταβλητή $(e_i)$ προσθέτουμε μία τεχνητή μεταβλητή $(a_i)$. Τέλος, για να μην παραμένουν οι τεχνητές μεταβλητές στη βέλτιστη λύση, καθεμία από αυτές προστίθεται στην αντικειμενική συνάρτηση πολλαπλασιαζόμενη με έναν πολύ μεγάλο θετικό συντελεστή M.

Μετά την εισαγωγή των τεχνητών μεταβλητών, το μοντέλο του προβλήματος, στην τυπική του μορφή, διαμορφώνεται ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3.17)

$$Z = 150x_1 + 250x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + \mathrm{M}a_1 + \mathrm{M}a_2 + \mathrm{M}a_3$$

με περιορισμούς δομής:

$$\begin{aligned} 30x_1 + 20x_2 - 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 &= 1500 \\ 5x_1 + 25x_2 + 0e_1 - 1e_2 + 0e_3 + 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 &= 900 \\ 0x_1 + 10x_2 + 0e_1 + 0e_2 - 1e_3 + 0a_1 + 0a_2 + 1a_3 &= 200 \end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0$$

Οι περιορισμοί δομής του προβλήματος, όπως έχουν εκφραστεί, αποτελούν ένα σύστημα $n = 3$ εξισώσεων με 8 αγνώστους. Παρατηρώντας το σύστημα των τριών εξισώσεων, σημειώνουμε ότι τα διανύσματα - στήλες των τριών τεχνητών μεταβλητών, που εμφανίζονται γραμμοσκιασμένα, αποτελούν μοναδιαίο πίνακα, γεγονός που επιτρέπει πλέον την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο Simplex. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην υποενότητα 3.3.1.1, η διαδικασία αυτή αποτελείται από 3 φάσεις, καθεμία από τις οποίες περιλαμβάνει επιμέρους βήματα.

**Φάση 1η: Αναζήτηση μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης.**

Στη φάση αυτή, προσδιορίζεται μια αρχική βασική εφικτή λύση του προβλήματος. Τα επιμέρους βήματά της περιγράφονται αναλυτικά στη συνέχεια:

***Βήμα 1ο: Εντοπισμός των μεταβλητών που αποτελούν την αρχική λύση.***

Σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί παραπάνω, οι μεταβλητές που θα αποτελούν την αρχική λύση του προβλήματος είναι οι τεχνητές μεταβλητές $a_1$, $a_2$ και $a_3$.

***Βήμα 2ο: Δημιουργία του αρχικού πίνακα Simplex.***

Έχοντας προσδιορίσει την αρχική βασική εφικτή λύση, μπορούμε να προχωρήσουμε στη δημιουργία του **αρχικού πίνακα Simplex** που αποτυπώνει όσα αναφέρθηκαν παραπάνω (Πίνακας 3.12). Όπως φαίνεται, ο αρχικός πίνακας Simplex περιέχει 8 στήλες, μία για κάθε μεταβλητή και τρεις ακόμη στήλες με τις ενδείξεις «Βάση» «Δεξιό Μέλος» και «Πηλίκο» αντίστοιχα, από τις οποίες η τελευταία δεν έχει προς το παρόν συμπληρωθεί.

**Πίνακας 3.12**
Αρχικός πίνακας Simplex (α)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | 150 | 250 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | $a_1$ | 30 | 20 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | |
| M | $a_2$ | 5 | 25 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 900 | |
| M | $a_3$ | 0 | 10 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 200 | |
| | $z_j$ | | | | | | | | | $Z =$ | |
| | $c_j - z_j$ | | | | | | | | | | |

Για καθεμία από τις τρεις βασικές μεταβλητές που σημειώνονται στην πρώτη στήλη («Βάση») υπάρχει μία γραμμή που ουσιαστικά αντιστοιχεί στον περιορισμό στον οποίο εμφανίζεται η βασική αυτή μεταβλητή.

Τέλος, εκτός από τις τρεις αυτές γραμμές, ο αρχικός πίνακας Simplex περιέχει δύο ακόμη τελευταίες γραμμές και μία θέση για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $Z$, οι οποίες δεν έχουν προς το παρόν συμπληρωθεί. Στο περιεχόμενο και στη χρήση των δύο τελευταίων γραμμών με τις ενδείξεις «$z_j$» και «$c_j - z_j$» αντίστοιχα θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Ας σημειωθεί ότι, όπως και στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης, ο Πίνακας 3.12 αναφέρεται ως αρχικός πίνακας Simplex (α), σε αντιδιαστολή με τους αντίστοιχους πίνακες (β) και (γ) που ακολουθούν και έχουν: ο μεν Πίνακας (β) συμπληρωμένα και τα κελιά των δύο τελευταίων γραμμών καθώς και αυτό της τιμής του Z, ενώ ο Πίνακας (γ) όλα ανεξαιρέτως τα κελιά.

***Βήμα 3ο: Προσδιορισμός της αρχικής λύσης.***

Έχοντας δημιουργήσει τον αρχικό πίνακα Simplex, μπορούμε άμεσα να προσδιορίσουμε την πρώτη βασική εφικτή λύση του προβλήματος, που έχει ως εξής:

$$\left(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0,\ e_3 = 0,\ a_1 = 1500,\ a_2 = 900,\ a_3 = 200\right)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση, έχουμε:

$$Z = 150 \cdot 0 + 250 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + M \cdot 1500 + M \cdot 900 + M \cdot 200 \rightarrow Z = 2600\text{M} \qquad 3.18)$$

**Φάση 2η: Έλεγχος για τη δυνατότητα βελτίωσης της τρέχουσας λύσης.**

Στη φάση αυτή, ελέγχεται αν η λύση που προσδιορίστηκε στην προηγούμενη φάση είναι η βέλτιστη ή αν υπάρχει έστω και μία μη βασική μεταβλητή με αρνητική διαφορική απόδοση που εισερχόμενη στη βάση θα μειώσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι βασικές μεταβλητές είναι οι $a_1, a_2, a_3$ και μη βασικές οι $x_1, x_2, e_1, e_2, e_3$. Οι διαφορικές αποδόσεις των μη βασικών μεταβλητών ($x_1, x_2, e_1, e_2, e_3$) υπολογίζονται κατά τα γνωστά και είναι: $\delta_1 = 150 - 35M$, $\delta_2 = 250 - 55M$, $\delta_3 = M$, $\delta_4 = M$ και $\delta_5 = M$. Οι διαφορικές αποδόσεις των βασικών μεταβλητών ($a_1, a_2, a_3$) είναι, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μηδενικές και, κατά συνέπεια, ισχύει: $\delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = 0$.

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε πλέον να συμπληρώσουμε τις γραμμές «$z_j$» και «$c_j - z_j$» του αρχικού πίνακα Simplex (Πίνακας 3.13):

**Πίνακας 3.13**
Αρχικός πίνακας Simplex (β)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Μεταβλητές | 150 | 250 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
| M | $a_1$ | 30 | 20 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | |
| M | $a_2$ | 5 | 25 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 900 | |
| M | $a_3$ | 0 | 10 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 200 | |
| | $z_j$ | 35M | 55M | -M | -M | -M | M | M | M | $Z = 2600M$ | |
| | $c_j - z_j$ | 150-35M | 250-55M | M | M | M | 0 | 0 | 0 | | |

Παρατηρώντας την τελευταία γραμμή του Πίνακα 3.13, σημειώνουμε ότι δύο από τις μη βασικές μεταβλητές ($x_1$ και $x_2$) παρουσιάζουν αρνητικές διαφορικές αποδόσεις $(\delta_j \le 0)$ και συγκεκριμένα: $\delta_1 = 150 - 35\text{M} < 0$ και $\delta_2 = 250 - 55\text{M} < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η παρούσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, καθώς και οι δύο αυτές μεταβλητές, αν γίνουν βασικές, θα μειώσουν το συνολικό κόστος αποθήκευσης της επιχείρησης. Κατά συνέπεια, η διερεύνηση θα συνεχιστεί με τη διαδικασία αναζήτησης μιας δεύτερης, καλύτερης λύσης, όπως αυτή που περιγράφεται στην επόμενη φάση.

**Φάση 3η: Αναζήτηση μιας καλύτερης λύσης.**

Στην προηγούμενη φάση διαπιστώθηκε ότι η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, καθώς υπάρχουν δύο μη βασικές μεταβλητές $x_1$ και $x_2$ με αρνητική διαφορική απόδοση $\delta_1 = 150 - 35\text{M}$ και $\delta_2 = 250 - 55\text{M}$ αντίστοιχα. Στην παρούσα φάση θα αναζητηθεί μια καλύτερη λύση.

***Βήμα 1ο: Εντοπισμός της εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής.***

Επειδή, όπως είναι προφανές, $\delta_2 < \delta_1$, η μεταβλητή $x_2$ θα είναι η νέα εισερχόμενη μη βασική μεταβλητή, καθώς η είσοδός της στη βάση θα προκαλέσει τη μέγιστη δυνατή μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Η στήλη της μεταβλητής $x_2$ στον αρχικό πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική στήλη** ή **στήλη-οδηγός**.

***Βήμα 2ο: Εντοπισμός της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής.***

Υποψήφιες προς αντικατάσταση μεταβλητές σε αυτό το στάδιο είναι οι τρεις τεχνητές μεταβλητές $a_1$, $a_2$ και $a_3$.

Βάση για την επιλογή μεταξύ αυτών της εξερχόμενης μεταβλητής αποτελούν οι λόγοι $\frac{b_i}{a_{i2}}, i = 1,...,3$ και ως εξερχόμενη βασική μεταβλητή επιλέγεται αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο θετικό λόγο.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι τρεις λόγοι είναι οι εξής:

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{1500}{20} = 75, \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{900}{25} = 36, \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{200}{10} = 20$$

και με αυτούς συμπληρώνονται και τα τελευταία κενά κελιά της στήλης «Πηλίκο» του αρχικού πίνακα Simplex (Πίνακας 3.14):

**Πίνακας 3.14**

Αρχικός πίνακας Simplex (γ)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | Δεξιό Μέλη | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| κοί | Μετ | 150 | 250 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | | |

| | | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | $a_1$ | 30 | 20 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | 75 |
| M | $a_2$ | 5 | 25 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 900 | 36 |
| M | $a_3$ | 0 | 10 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 200 | 20 |
| | $z_j$ | 35M | 55M | -M | -M | -M | M | M | M | $Z = 2600M$ | |
| | $c_j - z_j$ | 150-35M | 250-55M | M | M | M | 0 | 0 | 0 | | |

Σύμφωνα με τον κανόνα του ελάχιστου πηλίκου, ως εξερχόμενη μεταβλητή επιλέγεται η $a_3$ που αντιστοιχεί στον τρίτο περιορισμό (απαίτηση $b_3$). Η γραμμή της $a_3$ στον αρχικό πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική γραμμή** και το σημείο τομής της με την **αξονική στήλη** ονομάζεται **αξονικό στοιχείο** ή **στοιχείο-οδηγός**. Η αξονική γραμμή και η αξονική στήλη εμφανίζονται γραμμοσκιασμένες αναδεικνύοντας έτσι το αξονικό στοιχείο $a_{32} = 10$, το οποίο, όπως θα δούμε, θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη φάση για τη μετάβαση στο δεύτερο πίνακα Simplex.

***Βήμα 3ο: Δημιουργία του δεύτερου πίνακα Simplex.***

Μετά τον εντοπισμό της εισερχόμενης στη βάση μη βασικής μεταβλητής και της εξερχόμενης από αυτή βασικής μεταβλητής, προχωρούμε στη δημιουργία του δεύτερου πίνακα Simplex. Ο πίνακας αυτός, με συμπληρωμένα κατά τα γνωστά όλα τα κελιά του, εμφανίζεται στον Πίνακα 3.15.

**Πίνακας 3.15**

Δεύτερος πίνακας Simplex

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | 150 | 250 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
| M | $a_1$ | 30 | 0 | -1 | 0 | 2 | 1 | 0 | -2 | 1100 | $\frac{1100}{30}$ |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | $a_2$ | 5 | 0 | 0 | -1 | 2.5 | 0 | 1 | -2.5 | 400 | 80 |
| 250 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -0.1 | 0 | 0 | 0.1 | 20 | - |
| | $z_j$ | 35M | 250 | -M | -M | 4.5M - 25 | M | M | -4.5M + 25 | Z=5000+1500M | |
| | $c_j - z_j$ | 150-35M | 0 | M | M | 25 -4.5M | 0 | 0 | -25 + 5.5M | | |

Παρατηρώντας την τελευταία γραμμή του Πίνακα 3.15, σημειώνουμε ότι δύο από τις μη βασικές μεταβλητές ($x_1$ και $s_3$) παρουσιάζουν αρνητικές διαφορικές αποδόσεις $\left(\delta_j < 0\right)$ και συγκεκριμένα: $\delta_1 = 150 - 35\mathrm{M} < 0$ και $\delta_5 = 25 - 4.5\mathrm{M} < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η παρούσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, καθώς και οι δύο αυτές μεταβλητές, αν γίνουν βασικές, θα μειώσουν το συνολικό κόστος αποθήκευσης της επιχείρησης. Κατά συνέπεια, η διερεύνηση θα συνεχιστεί με τη διαδικασία αναζήτησης μιας καλύτερης λύσης.

Προφανώς, η εισερχόμενη στη βάση μη βασική μεταβλητή είναι η $x_1$ (που παρουσιάζει και τη μικρότερη διαφορική απόδοση) και η εξερχόμενη από τη βάση βασική μεταβλητή είναι η $a_3$ (που παρουσιάζει το μικρότερο θετικό λόγο στη στήλη «Πηλίκο»).

Μετά τον εντοπισμό της εισερχόμενης στη βάση μη βασικής μεταβλητής και της εξερχόμενης από αυτή βασικής μεταβλητής, προχωρούμε στη δημιουργία του τρίτου πίνακα Simplex. Ο πίνακας αυτός, με συμπληρωμένα κατά τα γνωστά όλα τα κελιά του, εμφανίζεται στον Πίνακα 3.16.

**Πίνακας 3.16**

Τρίτος πίνακας Simplex

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | 150 | 250 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
| 150 | $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{2}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | 0 | $-\frac{2}{30}$ | $\frac{1100}{30}$ | 550 |
| M | $a_2$ | 0 | 0 | $\frac{5}{30}$ | -1 | $\frac{65}{30}$ | $-\frac{5}{30}$ | 1 | $-\frac{65}{30}$ | $\frac{6500}{30}$ | 100 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 250 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ | 20 | 200 |
| | $z_j$ | 150 | 250 | $-5+\frac{5M}{30}$ | -M | $-15+\frac{65M}{30}$ | $5-\frac{5M}{30}$ | M | $15-\frac{65M}{30}$ | Z=10500+ $\frac{6500M}{30}$ | |
| | $c_j - z_j$ | 0 | 0 | $5-\frac{5M}{30}$ | M | $15-\frac{65M}{30}$ | $-5+\frac{35M}{30}$ | 0 | $-15+\frac{95M}{30}$ | | |

Παρατηρώντας την τελευταία γραμμή του Πίνακα 3.16, σημειώνουμε ότι και οι δύο μη βασικές μεταβλητές ($e_1$ και $e_3$) παρουσιάζουν αρνητικές διαφορικές αποδόσεις $\left(\delta_j \leq 0\right)$ και συγκεκριμένα: $\delta_3 = 5 - 5\text{M}/30 < 0$ και $\delta_5 = 15 - 65\text{M}/30 < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η παρούσα λύση δεν είναι η βέλτιστη, καθώς και οι δύο αυτές μεταβλητές, αν γίνουν βασικές, θα μειώσουν το συνολικό κόστος αποθήκευσης της επιχείρησης. Κατά συνέπεια, η διερεύνηση θα συνεχιστεί με τη διαδικασία αναζήτησης μιας δεύτερης, καλύτερης λύσης.

Προφανώς, η εισερχόμενη στη βάση μη βασική μεταβλητή είναι η $e_3$ (που παρουσιάζει και τη μικρότερη διαφορική απόδοση) και η εξερχόμενη από τη βάση βασική μεταβλητή είναι η $\alpha_2$ (που παρουσιάζει το μικρότερο θετικό λόγο στη στήλη «Πηλίκο»).

Με τον εντοπισμό της εισερχόμενης στη βάση μη βασικής μεταβλητής και της εξερχόμενης από αυτή βασικής μεταβλητής, προχωρούμε στη δημιουργία του τέταρτου πίνακα Simplex.

Ο πίνακας αυτός, με συμπληρωμένα κατά τα γνωστά όλα τα κελιά του, εμφανίζεται στον Πίνακα 3.17.

**Πίνακας 3.17**
Τέταρτος πίνακας Simplex (τελικός)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 150 | 250 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
| 150 | $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{5}{130}$ | $\frac{2}{65}$ | 0 | $\frac{5}{130}$ | $-\frac{2}{65}$ | 0 | 30 | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $e_3$ | 0 | 0 | $\frac{5}{65}$ | $-\frac{30}{65}$ | 1 | $-\frac{5}{65}$ | $\frac{30}{65}$ | -1 | 100 | |
| 250 | $x_2$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{130}$ | $-\frac{3}{65}$ | 0 | $-\frac{1}{130}$ | $\frac{3}{65}$ | 0 | 30 | |
| | $z_j$ | 150 | 250 | $-\frac{500}{130}$ | $-\frac{450}{65}$ | 0 | $\frac{500}{130}$ | $\frac{450}{65}$ | 0 | $Z = 12000$ | |
| | $c_j - z_j$ | 0 | 0 | $\frac{500}{130}$ | $\frac{450}{65}$ | 0 | $M - \frac{500}{130}$ | $M - \frac{450}{65}$ | M | | |

Παρατηρώντας την τελευταία γραμμή του Πίνακα 3.17, σημειώνουμε ότι οι διαφορικές αποδόσεις όλων των μη βασικών μεταβλητών είναι θετικές. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας αυτός είναι ο τελικός, η παρούσα λύση είναι η βέλτιστη και, κατά συνέπεια, η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος έχει ολοκληρωθεί.

## Ενότητα 3.4

## Ειδικές περιπτώσεις

### 3.4.1 Εισαγωγή

Στα προβλήματα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, η επίλυσή τους με τη μέθοδο Simplex μάς οδήγησε στον προσδιορισμό της μοναδικής βέλτιστης λύσης τους, δηλαδή της λύσης που βελτιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής τους συνάρτησης. Αυτό, όμως, δεν συμβαίνει πάντοτε. Αντίθετα, υπάρχουν και προβλήματα που παρουσιάζουν ιδιαιτερότητες και η λύση τους απαιτεί ιδιαίτερη αντιμετώπιση. Τέτοια προβλήματα είναι τα εξής:

- Προβλήματα με άπειρες λύσεις.
- Προβλήματα χωρίς εφικτή λύση.
- Μη φραγμένα προβλήματα.

Οι παραπάνω περιπτώσεις δεν εμφανίζονται συχνά στην πράξη, αλλά, όταν εμφανίζονται, αυτό τις περισσότερες φορές οφείλεται σε σφάλματα κατά την ανάπτυξη του μοντέλου. Στη συνέχεια, οι περιπτώσεις αυτές θα μελετηθούν αναλυτικά μέσα από παραλλαγές του αρχικού προβλήματος που διατυπώθηκε στην υποενότητα 3.3.2, αντίστοιχες, όπου αυτό είναι δυνατό, με τις παραλλαγές που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη των ειδικών περιπτώσεων με τη γραφική μέθοδο.

### 3.4.2 Πρόβλημα με άπειρες λύσεις

Το παράδειγμα που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε και για τη μελέτη του ίδιου προβλήματος με τη γραφική μέθοδο και διατυπώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (3.19)

$$Z = 4x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το πρόβλημα αυτό έχει ήδη επιλυθεί γραφικά στην υποενότητα 2.2.2 και η λύση του παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.12. Όπως φαίνεται από το Σχήμα αυτό, η αντικειμενική συνάρτηση, πριν εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή, δεν διέρχεται απλώς από την κορυφή Θ, αλλά συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ, δηλαδή με την περιοριστική ευθεία ΑΒ ($2x_1 + 4x_2 = 1600$).

Για να διαπιστωθεί η ύπαρξη απειρίας λύσεων, όταν το πρόβλημα επιλύεται με τη μέθοδο Simplex, θα χρησιμοποιηθεί ο τελικός πίνακας Simplex (Πίνακας 3.18) στον οποίο έχουμε καταλήξει ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφηκαν στην υποενότητα 3.3.1.1.

**Πίνακας 3.18**
Τελικός πίνακας Simplex

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 4 | $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | -2 | 100 | -50 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $s_2$ | 0 | 0 | -3 | 1 | 10 | 500 | 50 |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | 350 |
| | $z_j$ | 4 | 8 | 2 | 0 | 0 | $Z=3200$ | |
| | $c_j - z_j$ | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | | |

Παρατηρώντας τη σειρά $\delta_j = c_j - z_j$, διαπιστώνεται ότι τα στοιχεία της που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές $x_1, x_2$και $s_2$ είναι μηδενικά, όπως θα έπρεπε. Αντίθετα, τα στοιχεία της που αντιστοιχούν στις μη βασικές μεταβλητές $(\delta_1, \delta_3)$ δεν είναι και τα δύο αρνητικά, όπως θα περίμενε κανείς, σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα, αλλά το ένα από αυτά και συγκεκριμένα εκείνο που αντιστοιχεί στη μη βασική μεταβλητή $s_3$ είναι μηδενικό. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο λήπτης της απόφασης θα μπορούσε να επιλέξει να εισαγάγει τη μεταβλητή αυτή στη βάση, δημιουργώντας έτσι μια εναλλακτική βέλτιστη λύση, χωρίς όμως να μεταβληθεί η τιμή $Z$ της αντικειμενικής συνάρτησης.

Κατά εφαρμογή εκείνων που αναφέρθηκαν παραπάνω, επιλέγουμε τη μεταβλητή $s_3$ ως τη νέα εισερχόμενη μεταβλητή, πραγματοποιούμε μία ακόμα επανάληψη της μεθόδου Simplex κατά τα γνωστά και καταλήγουμε στον εναλλακτικό τελικό πίνακα Simplex (Πίνακας 3.19).

**Πίνακας 3.19**
Εναλλακτικός τελικός πίνακας Simplex

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | 4 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 4 | $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | 0 | 200 | |
| 0 | $s_3$ | 0 | 0 | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 | 50 | |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{10}$ | 0 | 300 | |
| | $z_j$ | 4 | 8 | 2 | 0 | 0 | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_j - z_j$ | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | $Z = 3200$ |

Σύμφωνα με το νέο πίνακα Simplex, η εναλλακτική βέλτιστη λύση είναι $(x_1 = 200,\ x_2 = 300,\ s_3 = 50)$, αλλά η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης παραμένει αμετάβλητη ($Z = 3200$).

Παρατηρώντας την τελευταία σειρά $\delta_j = c_j - z_j$ του νέου πίνακα, σημειώνουμε ότι και εδώ υπάρχει μηδενικό στοιχείο που αντιστοιχεί στη μη βασική μεταβλητή $s_2$, γεγονός που σημαίνει ότι μπορεί να εντοπιστεί και νέα εναλλακτική βέλτιστη λύση.

Συνοψίζοντας όσα αναφέρθηκαν στην υποενότητα αυτή, η απειρία εναλλακτικών λύσεων, όταν το πρόβλημα επιλύεται με τη μέθοδο Simplex, εντοπίζεται με τη βοήθεια του τελικού πίνακα, και κριτήριο για την ύπαρξή τους είναι η εμφάνιση στη σειρά $\delta_j = c_j - z_j$ του πίνακα τουλάχιστον ενός μηδενικού στοιχείου που να αντιστοιχεί σε μια μη βασική μεταβλητή.

### 3.4.3 Πρόβλημα χωρίς εφικτή λύση

Το παράδειγμα που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε και για τη μελέτη του ίδιου προβλήματος με τη γραφική μέθοδο και διατυπώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (3.20)

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$x_2 \geq 450$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το πρόβλημα αυτό έχει ήδη επιλυθεί γραφικά στην υποενότητα 2.3.3 και η λύση του παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.14. Όπως φαίνεται από το Σχήμα αυτό, δεν υπάρχουν σημεία που να ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς, με συνέπεια να μην υπάρχει εφικτή λύση και η εφικτή περιοχή να είναι το κενό σύνολο.

Για να διαπιστωθεί η ανυπαρξία εφικτής λύσης, όταν το πρόβλημα επιλύεται με τη μέθοδο Simplex, θα χρησιμοποιηθεί ο τελικός πίνακας Simplex (Πίνακας 3.20) στον οποίο έχουμε καταλήξει ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφηκαν στην ενότητα 3.3.1.1.

**Πίνακας 3.20**
Τελικός πίνακας Simplex

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 8 | 0 | 0 | 0 | M | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $e_3$ | $a_1$ | | |
| 0 | $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 400 | |
| 8 | $s_2$ | 5 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | 1000 | |
| M | $a_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | -1 | 1 | 50 | |
| | $z_j$ | $\frac{9}{2}$ | 8 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 1 | 0 | $Z=32000$ | |
| | $c_j - z_j$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | -1 | 0 | | |

Παρατηρώντας την τελευταία σειρά $\delta_j = c_j - z_j$ διαπιστώνουμε ότι τα στοιχεία της που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές $x_2$, $s_2$ και $a_1$ είναι μηδενικά, ενώ, αντίθετα, τα στοιχεία της που αντιστοιχούν στις μη βασικές μεταβλητές $x_1$, $s_1$ και $e_1$ είναι αρνητικά. Κατά συνέπεια, το κριτήριο τερματισμού της διαδικασίας επίλυσης πληρούται, αλλά, παρά ταύτα, η προσδιορισθείσα λύση δεν είναι εφικτή, διότι στη βάση περιέχεται και μία τεχνητή μεταβλητή (η μεταβλητή $a_1$).

Συνοψίζοντας όσα αναφέρθηκαν στην υποενότητα αυτή, η ανυπαρξία εφικτής λύσης, όταν το πρόβλημα επιλύεται με τη μέθοδο Simplex, εντοπίζεται με τη βοήθεια του τελικού πίνακα και κριτήριο για την ανυπαρξία της είναι η ύπαρξη τεχνητής μεταβλητής στη βάση που προσδιορίζει ο πίνακας αυτός.

### 3.4.4 Μη φραγμένο πρόβλημα

Το παράδειγμα που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε και για τη μελέτη του ίδιου προβλήματος με τη γραφική μέθοδο και διατυπώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης (3.21)

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$x_1 \geq 450$$

$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το πρόβλημα αυτό έχει ήδη επιλυθεί γραφικά στην υποενότητα 2.3.4 και η λύση του παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.17. Όπως φαίνεται από το Σχήμα αυτό, η εφικτή περιοχή είναι μη φραγμένη και εκτείνεται προς το άπειρο. Επιπλέον, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται συνεχώς.

Για να διαπιστωθεί ότι πρόκειται για ένα **μη φραγμένο πρόβλημα** (*unbounded problem*), σε κάθε επανάληψη της μεθόδου Simplex εξετάζεται η τιμή των συντελεστών της εισερχόμενης μεταβλητής. Αν όλοι είναι μη θετικοί, όπως στην περίπτωση του Πίνακα 3.21, που αποτελεί τον τέταρτο πίνακα Simplex για το συγκεκριμένο πρόβλημα (εισερχόμενη μεταβλητή η $s_1$ με συντελεστές $a_{13} = -1, a_{23} = 0$), τότε το πρόβλημα είναι «μη φραγμένο» και η διαδικασία επίλυσης τερματίζεται. Αυτό προφανώς συμβαίνει γιατί δεν είναι δυνατή η δημιουργία θετικού λόγου στη στήλη «Πηλίκο» του Πίνακα Simplex, που αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για τον εντοπισμό της εξερχόμενης μεταβλητής και συνέχιση της λύσης $\left(\frac{450}{-1} = -450, \frac{350}{0} = \text{δεν ορίζεται}\right)$.

**Πίνακας 3.21**

Τέταρτος πίνακας Simplex

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Μεταβλητές | 3 | 8 | 0 | 0 | M | | |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $s_1$ | $a_1$ | | |
| 3 | $x_1$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 450 | - |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 350 | - |
| | $z_j$ | 4 | 8 | -3 | 8 | 3 | $Z = 4150$ | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_j - z_j$ | 0 | 0 | 3 | -8 | -3+M | |

Συνοψίζοντας όσα αναφέρθηκαν στην υποενότητα αυτή, το μη φραγμένο πρόβλημα εντοπίζεται με τη βοήθεια των πινάκων Simplex και κριτήριο για την ύπαρξή του είναι η εμφάνιση, σε κάποιον από τους πίνακες Simplex, αρνητικών τιμών για το σύνολο των συντελεστών της εισερχόμενης μεταβλητής. Σημειώνεται καταληκτικά ότι, για τον εντοπισμό μιας τέτοιας κατάστασης, δεν είναι απαραίτητο αλλά ούτε και εφικτό να φτάσει κανείς στον τελικό πίνακα Simplex, καθώς το πρόβλημα που προκαλείται δεν μας επιτρέπει να φτάσουμε σε αυτόν.

## Ενότητα 3.5

## Ανάλυση ευαισθησίας της λύσης

### 3.5.1 Εισαγωγή

Στην υποενότητα 1.3.2 αναφερθήκαμε στις βασικές προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται έτσι ώστε ένα πρόβλημα να μπορεί να εκφραστεί ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Μία από αυτές είναι η προϋπόθεση της βεβαιότητας, σύμφωνα με την οποία οι τιμές όλων των παραμέτρων του προβλήματος, δηλαδή των αντικειμενικών συντελεστών, των τεχνολογικών συντελεστών και των δεξιών μελών των περιορισμών είναι σταθερές και διατηρούνται στο χρονικό ορίζοντα τού υπό μελέτη προβλήματος. Στην πραγματικότητα, όμως, η προϋπόθεση αυτή είναι πρακτικά αδύνατο να ισχύει πλήρως, καθώς οι τιμές των παραμέτρων αυτών είναι συνήθως εκτιμήσεις ή προβλέψεις των πραγματικών τιμών, που εμπεριέχουν το σφάλμα εκτίμησης/πρόβλεψης και, επιπλέον, δεν παραμένουν σταθερές διαχρονικά. Για παράδειγμα, η ζήτηση ενός προϊόντος δεν είναι πάντοτε γνωστή ούτε σταθερή και το ίδιο ισχύει και για τις τιμές των πρώτων υλών ή των τελικών προϊόντων. Για το λόγο αυτόν, είναι πολύ σημαντικό η επίλυση ενός προβλήματος και ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης του να ακολουθούνται από την **ανάλυση ευαισθησίας της λύσης** (*sensitivity/postoptimality analysis*). Η ανάλυση αυτή διερευνά τις μεταβολές που συμβαίνουν στη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος όταν υπάρχουν μικρές ή μεγαλύτερες μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων του. Διερευνά, για παράδειγμα, πώς θα μεταβληθεί το συνολικό κέρδος μιας επιχείρησης αν η τιμή πώλησης ενός από τα προϊόντα της αυξηθεί κατά κάποιο συγκεκριμένο ποσό ή ποσοστό, ή σε ποιο διάστημα μπορεί να κυμαίνεται η τιμή πώλησης ενός άλλου προϊόντος της χωρίς να μεταβάλλεται το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής της.

Είναι προφανές ότι τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση ευαισθησίας της λύσης ενός προβλήματος έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους διοικούντες μιαν επιχείρηση, καθώς τους επιτρέπουν να εντοπίζουν τις ευαίσθητες παραμέτρους του προβλήματος ώστε να τις προσεγγίζουν με μεγαλύτερη προσοχή.

Ένας τρόπος προσέγγισης της ανάλυσης ευαισθησίας ενός προβλήματος είναι η **ενσωμάτωση στο μοντέλο που το εκφράζει της μεταβολής της παραμέτρου που θέλουμε να διερευνήσουμε και η εκ νέου επίλυσή του**. Η προσέγγιση αυτή, όμως, εκτός του ότι είναι εξαιρετικά χρονοβόρα, δεν διερευνά στην ουσία το μηχανισμό επηρεασμού της λύσης από τη μεταβολή της παραμέτρου, αλλά δίνει μόνο το τελικό αποτέλεσμα. Για το λόγο αυτό, στην ενότητα 2.4 παρουσιάστηκε μια διαφορετική προσέγγιση της ανάλυσης ευαισθησίας ενός προβλήματος μέσω της γραφικής επίλυσής του, η οποία μας βοηθά να κατανοήσουμε αυτόν ακριβώς το μηχανισμό επηρεασμού της λύσης ενός προβλήματος. Συγκεκριμένα, μελετήσαμε τις επιπτώσεις που επιφέρουν στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ενός προβλήματος οι μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές και στα δεξιά μέλη των περιορισμών.

Στην παρούσα ενότητα επανερχόμαστε στο θέμα της ανάλυσης της ευαισθησίας της λύσης ενός προβλήματος, για να το μελετήσουμε στο πλαίσιο όχι πλέον της γραφικής, αλλά της μαθηματικής επίλυσής του. Οι προς μελέτη μεταβολές μπορεί γενικά να ενταχθούν στις ακόλουθες κατηγορίες:

- Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές.
- Μεταβολές στους διαθέσιμους πόρους.

Οι απαιτούμενες αναπροσαρμογές της βέλτιστης λύσης, ως αποτέλεσμα των παραπάνω μεταβολών, προκύπτουν ύστερα από κατάλληλη επεξεργασία των στοιχείων του τελικού πίνακα Simplex και, για το λόγο αυτόν, η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται αναφέρεται και ως ανάλυση ευαισθησίας της τελικής λύσης. Περιοριστικό στοιχείο των μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν είναι ότι μπορούν να αντιμετωπίσουν μία μόνο μεταβολή κάθε φορά (π.χ., μεταβολή μίας μόνο παραμέτρου του προβλήματος). Για την αντιμετώπιση περισσότερων της μίας μεταβολών, απαιτείται σταδιακή εφαρμογή των μεθόδων αυτών.

Για τον προσδιορισμό των μεταβολών που επέρχονται στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης απαιτείται προηγουμένως ο μετασχηματισμός των τιμών, που εκφράζουν τις μεταβολές αυτές στον αρχικό πίνακα, στις τιμές που τις αντιπροσωπεύουν στον τελικό πίνακα.

Η μεθοδολογία που ακολουθείται σε κάθε περίπτωση μεταβολής για τη διερεύνηση των επιπτώσεών της στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης περιγράφεται στη συνέχεια.

### 3.5.2 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές

**Το πρώτο ζητούμενο** στην περίπτωση αυτή είναι να διερευνηθεί τι συμβαίνει όταν κάθε φορά μεταβάλλεται ο αντικειμενικός συντελεστής μίας μόνο μεταβλητής. Έστω λοιπόν ότι ο συντελεστής $c_j$ της μεταβλητής απόφασης $x_j$, βασικής ή μη, μεταβάλλεται κατά $\Delta c_j$, οπότε η νέα του τιμή είναι: $c_j^* = c_j + \Delta c_j$. Η μόνη τροποποίηση που πρέπει να γίνει στον αρχικό πίνακα Simplex είναι η μεταβολή, στην αντίστοιχη στήλη του συντελεστή της $x_j$ , από $c_j$ σε $c_j^* = c_j + \Delta c_j$.

Για τη διερεύνηση των επιπτώσεων της μεταβολής αυτής στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τον τελικό πίνακα Simplex και τον τροποποιούμε ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

α. Αντικαθιστούμε στην αντίστοιχη γραμμή την αρχική τιμή $c_j$ του συντελεστή της $x_j$ με τη νέα του τιμή $c_j + \Delta c_j$.

β. Υπολογίζουμε εκ νέου τα στοιχεία του τελικού πίνακα Simplex που επηρεάζονται από τη μεταβολή αυτή. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση όπου η $x_j$ είναι βασική μεταβλητή, από τη μεταβολή του συντελεστή της επηρεάζονται τα στοιχεία της σειράς «$z_j$» για τη $x_j$ και τις μη βασικές μεταβλητές, τα στοιχεία της σειράς «$c_j - z_j$» για τις μη βασικές μεταβλητές καθώς και η τιμή $Z$ της αντικειμενικής συνάρτησης, η νέα τιμή της οποίας συμβολίζεται με $Z^*$ . Αντίθετα, αν η $x_j$ είναι μη βασική μεταβλητή, από τη μεταβολή του συντελεστή της επηρεάζονται μόνο τα στοιχεία της σειράς «$c_j - z_j$» για τη μεταβλητή αυτή.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το **κριτήριο βελτιστοποίησης** ή **τερματισμού**, $\delta_j \leq 0$ ή $\delta_j \geq 0$, για προβλήματα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης αντίστοιχα, στα νέα στοιχεία της σειράς «$c_j - z_j$» και προσδιορίζουμε τα όρια του εύρους ευαισθησίας για τον αντικειμενικό συντελεστή $c_j$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, **το εύρος ευαισθησίας της τιμής του αντικειμενικού συντελεστή** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τη μεταβολή, ή μη, της τιμής του, καθώς και για το ύψος της μεταβολής αυτής, χωρίς να χρειάζεται να επιλυθεί το πρόβλημα από την αρχή.

**Ένα δεύτερο ζητούμενο** από την ανάλυση ευαισθησίας είναι να διερευνηθεί τι συμβαίνει όταν οι τιμές περισσότερων του ενός αντικειμενικών συντελεστών μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Στη διερεύνηση αυτή διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: ανάλογα με το (α) αν όλοι οι μεταβαλλόμενοι αντικειμενικοί συντελεστές αφορούν μη βασικές μεταβλητές ή (β) αν τουλάχιστον ένας από αυτούς αφορά βασική μεταβλητή.

Στην πρώτη περίπτωση, η τρέχουσα λύση παραμένει η βέλτιστη, αν η μεταβολή της τιμής κάθε αντικειμενικού συντελεστή εμπίπτει στα όρια της ευαισθησίας του. Αντίθετα, η τρέχουσα λύση παύει να είναι η βέλτιστη, αν η τιμή ενός τουλάχιστον από τους αντικειμενικούς συντελεστές τεθεί εκτός των ορίων της ευαισθησίας του.

Στη δεύτερη περίπτωση, εφαρμόζουμε τον **κανόνα του ποσοστού 100%** (*100% rule*). Συγκεκριμένα, για όλους τους αντικειμενικούς συντελεστές της συνάρτησης που μεταβάλλονται, αθροίζουμε το ποσοστό μεταβολής και το συγκρίνουμε με το επιτρεπόμενο. Αν το άθροισμα αυτό δεν υπερβαίνει το 100% της επιτρεπόμενης μεταβολής, τότε η τρέχουσα λύση παραμένει η βέλτιστη, με διαφορετική φυσικά τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Στην αντίθετη περίπτωση, η τρέχουσα λύση παύει να είναι η βέλτιστη λύση.

### 3.5.3 Μεταβολές στους διαθέσιμους πόρους

Όπως και στην περίπτωση των αντικειμενικών συντελεστών, έτσι και εδώ **το πρώτο ζητούμενο** είναι να διερευνηθεί τι συμβαίνει όταν κάθε φορά μεταβάλλεται το δεξιό μέλος ενός περιορισμού. Έστω λοιπόν ότι ο διαθέσιμος πόρος $b_i$, που αντιστοιχεί στον περιορισμό *i*, μεταβάλλεται κατά $\Delta b_i$, οπότε η νέα του τιμή είναι: $b_i^* = b_i + \Delta b_i$. Η μόνη τροποποίηση που πρέπει να γίνει στον αρχικό πίνακα Simplex είναι η μεταβολή, στη στήλη «Δεξιό μέλος», της τιμής του αντίστοιχου πόρου από $b_i$ σε $b_i^* = b_i + \Delta b_i$.

Για τη διερεύνηση των επιπτώσεων της μεταβολής αυτής στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τον τελικό πίνακα Simplex και τον τροποποιούμε ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

α. Υπολογίζουμε τα γινόμενα της μεταβολής $\Delta b_i$ του πόρου $i$ επί τα στοιχεία της στήλης της χαλαρής μεταβλητής που αντιστοιχεί στον πόρο $i$.

β. Υπολογίζουμε το γινόμενο της μεταβολής $\Delta b_i$ του πόρου $i$ επί το στοιχείο της σειράς $z_j$, το οποίο βρίσκεται στη στήλη της χαλαρής μεταβλητής που αντιστοιχεί στον πόρο $i$.

γ. Προσαυξάνουμε τα στοιχεία της στήλης «Δεξιό μέλος» κατά τα αντίστοιχα γινόμενα που υπολογίστηκαν στο βήμα (α) παραπάνω. Τα νέα στοιχεία συμβολίζονται με $b_i'$.

δ. Προσαυξάνουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά το γινόμενο που υπολογίστηκε στο βήμα (β) παραπάνω. Η νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης συμβολίζεται με $Z^*$.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το κριτήριο της μη αρνητικότητας $(b_i' \geq 0)$ για τα νέα στοιχεία της στήλης «Δεξιό μέλος» και προσδιορίζουμε τα όρια του εύρους ευαισθησίας για την τιμή του πόρου $b_i$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το εύρος της ευαισθησίας της τιμής του πόρου $b_i$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λήψη αποφάσεων σχετικών με τη μεταβολή, ή μη, της τιμής του, καθώς και για το ύψος της μεταβολής αυτής, χωρίς να χρειάζεται να επιλυθεί το πρόβλημα από την αρχή.

**Ένα δεύτερο ζητούμενο** από την ανάλυση ευαισθησίας είναι να διερευνηθεί τι συμβαίνει όταν οι τιμές των δεξιών μελών περισσότερων του ενός περιορισμών μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Στη διερεύνηση αυτή διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

ανάλογα με το (α) αν όλα τα μεταβαλλόμενα δεξιά μέλη των περιορισμών αφορούν μη δεσμευτικούς περιορισμούς ή (β) αν τουλάχιστον ένα από αυτά αφορά δεσμευτικό περιορισμό. Στην πρώτη περίπτωση, η τρέχουσα λύση παραμένει η βέλτιστη, αν η μεταβολή της τιμής κάθε δεξιού μέλους εμπίπτει στα όρια της ευαισθησίας της. Αντίθετα, η τρέχουσα λύση παύει να είναι η βέλτιστη, αν η τιμή ενός τουλάχιστον δεξιού μέλους βρεθεί εκτός των ορίων ευαισθησίας της.

Στη δεύτερη περίπτωση, εφαρμόζουμε τον κανόνα του ποσοστού 100%. Συγκεκριμένα, για τα δεξιά μέλη των περιορισμών της συνάρτησης που μεταβάλλονται, αθροίζουμε το ποσοστό μεταβολής και το συγκρίνουμε με το επιτρεπόμενο. Αν το άθροισμα αυτό δεν υπερβαίνει το 100% της επιτρεπόμενης μεταβολής, η τρέχουσα λύση παραμένει η βέλτιστη, με διαφορετική φυσικά τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Στην αντίθετη περίπτωση, η τρέχουσα λύση παύει να είναι η βέλτιστη λύση.

Όσα αναφέρθηκαν γενικά παραπάνω για την ανάλυση της ευαισθησίας θα εφαρμοστούν στη συνέχεια σε δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, εκ των οποίων το ένα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης και το άλλο πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

### 3.5.4 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης

Ως πρόβλημα μεγιστοποίησης για την εφαρμογή της ανάλυσης ευαισθησίας που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα θα χρησιμοποιηθεί το πρόβλημα που διατυπώθηκε στην υποενότητα 1.4.1, επιλύθηκε γραφικά στην υποενότητα 2.1.2 και με τη μέθοδο Simplex στην υποενότητα 3.3.2.

#### 3.5.4.1 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές.

Έστω ότι ο συντελεστής $c_1 = 3$ της βασικής μεταβλητής $x_1$ μεταβάλλεται κατά $\Delta c_1$ οπότε η νέα του τιμή είναι $c_1^* = (3 + \Delta c_1)$. Για να διερευνηθούν οι επιπτώσεις της μεταβολής αυτής στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τον τελικό πίνακα Simplex (Πίνακας 3.11) και τον τροποποιούμε σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενη υποενότητα.

Ο τροποποιημένος, σύμφωνα με τα παραπάνω, τελικός πίνακας Simplex παρουσιάζεται στη συνέχεια:

**Πίνακας 3.22**

Τροποποιημένος τελικός πίνακας Simplex (μεταβολή στον αντικειμενικό συντελεστή $c_1$)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $3+\Delta c_1$ | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| $3+\Delta c_1$ | $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | -2 | 100 | |
| 0 | $s_2$ | 0 | 0 | -3 | 1 | 10 | 500 | |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 350 | |
| $z_j$ | | $3+\Delta c_1$ | 8 | $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\Delta c_1$ | 0 | $2-2\Delta c_1$ | $Z^* = 3100+100\Delta c_1$ | |
| $c_j - z_j$ | | 0 | 0 | $-(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\Delta c_1)$ | 0 | $-2+2\Delta c_1$ | | |

Μετά τη δημιουργία του τροποποιημένου τελικού πίνακα Simplex, εφαρμόζουμε το κριτήριο αριστότητας της λύσης στα νέα στοιχεία της σειράς «$c_j - z_j$». Επειδή έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης, η προσδιορισθείσα λύση θα παραμένει η βέλτιστη, αν οι νέες διαφορικές αποδόσεις είναι μη θετικές, δηλαδή αν $\delta_3 \le 0$ και $\delta_5 \le 0$. Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι:

$$\delta_3 \le 0 \to -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Delta c_1 \le 0 \to -\frac{1}{2}\Delta c_1 \le \frac{3}{2} \to \frac{1}{2}\Delta c_1 \ge -\frac{3}{2} \to \Delta c_1 \ge -3$$
$$\delta_5 \le 0 \to -2+2\Delta c_1 \le 0 \to 2\Delta c_1 \le 2 \to \Delta c_1 \le 1$$

Άρα, οι ανισότητες αυτές συναληθεύουν στο διάστημα $-3 \le \Delta c_1 \le 1$. Κατά συνέπεια, η προσδιορισθείσα λύση παραμένει η βέλτιστη αν ισχύει:

$$\Delta c_1 \in [-3,1],\ c_1^* = 3+\Delta C_1 \in [0,4] \text{ και } \Delta c_1(\%) \in [-100,33] \qquad (3.22)$$

Έχοντας προσδιορίσει τα παραπάνω διαστήματα, μπορούμε πλέον, εύκολα και άμεσα, να διαπιστώσουμε αν μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση όταν ο αντικειμενικός συντελεστής $c_1$ της μεταβλητής $x_1$ αυξάνεται ή μειώνεται κατά ένα συγκεκριμένο ποσό ή ποσοστό.

Τέλος, σημειώνεται ότι όσο το $\Delta c_1$, δηλαδή η εκάστοτε μεταβολή του αντικειμενικού συντελεστή $c_1$ της μεταβλητής $x_1$, παραμένει στο διάστημα $[-3,1]$, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$Z^* = (3+\Delta c_1)x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = \underbrace{3x_1 + 8x_2}_{Z} + (\Delta c_1)x_1 = 3100 + 100\Delta c_1 \qquad (3.23)$$

Η ίδια μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί για να διερευνηθούν οι επιπτώσεις τυχόν μεταβολών των αντικειμενικών συντελεστών και των υπόλοιπων μεταβλητών, βασικών και μη, στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Ας σημειωθεί ότι η διαφορά που υπάρχει στην περίπτωση μη βασικής μεταβλητής, σε σύγκριση με τη βασική, είναι ότι το μόνο στοιχείο του τελικού πίνακα Simplex που επηρεάζεται από τη μεταβολή του αντικειμενικού συντελεστή είναι το στοιχείο της σειράς «$c_j - z_j$», για τη συγκεκριμένη μεταβλητή, το οποίο επανυπολογίζεται κατά τα γνωστά. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης παραμένει αμετάβλητη. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι, αν ο συντελεστής $c_k$ της τυχαίας $x_k$-μη βασικής μεταβλητής μεταβάλλεται κατά $\Delta c_k$, οπότε η νέα τιμή του θα είναι $c_k^* = c_k + \Delta c_k$, το μόνο στοιχείο του τελικού πίνακα Simplex που θα μεταβληθεί θα είναι το στοιχείο της σειράς «$c_j - z_j$», που αντιστοιχεί στη μεταβλητή $x_k$ και το οποίο από $z_k$ θα γίνει $\left(c_k + \Delta c_k\right) - z_k$. Ακόμη σημειώνεται ότι ο προσδιορισμός του εύρους ευαισθησίας του αντικειμενικού συντελεστή μίας μη βασικής μεταβλητής έχει νόημα μόνον όταν αυτή είναι μεταβλητή απόφασης, οπότε η τυχόν είσοδος της στη βάση μπορεί να επιφέρει ουσιαστική αλλαγή στη λύση του προβλήματος. Τελειώνοντας, υπογραμμίζεται ότι σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης δεν υπάρχει πεπερασμένο κατώτατο όριο για το εύρος ευαισθησίας του αντικειμενικού συντελεστή μιας μη βασικής μεταβλητής, ενώ το ανώτατο όριο της είναι η τιμή του στοιχείου της σειράς «$z_j$» του τελικού πίνακα Simplex που αντιστοιχεί στη στήλη της μεταβλητής αυτής. Αντίστοιχα, υπογραμμίζεται ότι σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν υπάρχει πεπερασμένο ανώτατο όριο για το εύρος ευαισθησίας του αντικειμενικού συντελεστή μιας μη βασικής μεταβλητής, ενώ το κατώτατο όριο της είναι η τιμή του στοιχείου της σειράς «$z_j$» του τελικού πίνακα Simplex που αντιστοιχεί στη στήλη της μεταβλητής αυτής.

Μετά την ολοκλήρωση της ανάλυσης ευαισθησίας για τη μεταβολή μεμονωμένων αντικειμενικών συντελεστών, προχωρούμε σε αντίστοιχη ανάλυση για ταυτόχρονη μεταβολή περισσότερων του ενός αντικειμενικών συντελεστών. Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε τρεις βασικές μεταβλητές ($x_1, s_2, x_2$) και δύο μη βασικές μεταβλητές ($s_1, s_3$). Τα όρια της μεταβολής των αντίστοιχων συντελεστών τους, όταν μεταβάλλονται μεμονωμένα, ώστε η τρέχουσα λύση να παραμένει η βέλτιστη, μπορούν να υπολογιστούν κατά τα γνωστά, όπως έχουν ήδη υπολογιστεί τα όρια των $\Delta c_1$ και $\Delta c_3$, και είναι τα ακόλουθα:

$$\Delta c_2 \in \left[-2, +\infty\right],\ \Delta c_4 \in \left[-0.2, 0.5\right] \text{ και } \Delta c_5 \in \left[-\infty, 2\right] \tag{3.25}$$

Όταν οι ταυτόχρονα μεταβαλλόμενοι αντικειμενικοί συντελεστές είναι οι $c_3$ και $c_5$, που αντιστοιχούν στις δύο μη βασικές μεταβλητές $s_1$ και $s_3$, η τρέχουσα λύση παραμένει η βέλτιστη, αν η μεταβολή κάθε συντελεστή εμπίπτει στα όρια της ευαισθησίας του. Αντίθετα, αν ένας τουλάχιστον από τους δύο συντελεστές που μεταβάλλονται ταυτόχρονα αντιστοιχεί σε βασική μεταβλητή, θα πρέπει να εφαρμοστεί ο κανόνας του ποσοστού 100%.

Αν, για παράδειγμα, οι μεταβαλλόμενοι ταυτόχρονα αντικειμενικοί συντελεστές είναι οι $c_1$ και $c_2$, που αντιστοιχούν στις δύο βασικές μεταβλητές $x_1$ και $x_2$, η τρέχουσα λύση παραμένει η βέλτιστη, αν το συνολικό ποσοστό μεταβολής τους υπερβαίνει το 100% του μέγιστου επιτρεπόμενου ποσοστού μεταβολής και για τους δύο συντελεστές από κοινού. Ενδεικτικά, αν ο συντελεστής $c_1 = 3$ αυξηθεί κατά 0,2 μονάδες, δηλαδή κατά ποσοστό ίσο με το $\left(0.2/1\right)\cdot 100 = 20\%$ του συνολικού επιτρεπόμενου ποσοστού αύξησης του και ο συντελεστής $c_2 = 8$ μειωθεί κατά 1,5 μονάδες, δηλαδή κατά ποσοστό $\left(1.5/2\right)\cdot 100 = 75\%$ του συνολικού επιτρεπόμενου ποσοστού μείωσης του, η παρούσα λύση παραμένει η βέλτιστη, καθώς το συνολικό ποσοστό μεταβολής είναι $20\% + 75\% = 95\%$, δηλαδή μικρότερο του 100% του μέγιστου επιτρεπόμενου ποσοστού μεταβολής και για τους δύο συντελεστές από κοινού. Αντίθετα, αν ο συντελεστής $c_1 = 3$ αυξηθεί κατά 0,2 μονάδες, αλλά ο συντελεστής $c_2$ μειωθεί κατά 1,8 μονάδες, δηλαδή κατά ποσοστό ίσο με το $\left(1.8/2\right)\cdot 100 = 90\%$ του συνολικού επιτρεπόμενου ποσοστού μείωσης του, η παρούσα λύση παύει να είναι η βέλτιστη, καθώς το συνολικό ποσοστό μεταβολής είναι $20\% + 90\% = 110\%$, δηλαδή μεγαλύτερο του 100% του μέγιστου επιτρεπόμενου ποσοστού μεταβολής και για τους δύο συντελεστές από κοινού.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι, επειδή ο συντελεστής $c_2$ μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα (ανώτερο όριο το $+\infty$) και, κατά συνέπεια, το ποσοστό κάθε αύξησης του, σε σχέση με την ανώτερη επιτρεπόμενη, είναι αμελητέο, η παρούσα λύση παραμένει η βέλτιστη για οποιαδήποτε αύξηση του $c_2$, εφόσον ο συντελεστής $c_1$ παραμένει εντός των ορίων της ευαισθησίας του.

### 3.5.4.2 Μεταβολές στους διαθέσιμους πόρους

Έστω ότι ο διαθέσιμος πόρος $b_1$, που αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό, μεταβάλλεται κατά $\Delta b_1$, οπότε η νέα τιμή του είναι $b^*_1 = b_1 + \Delta b_1$. Για να διερευνηθούν οι επιπτώσεις της μεταβολής αυτής στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τον τελικό πίνακα Simplex (Πίνακας 3.11) και τον τροποποιούμε σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενη υποενότητα.

Ο τροποποιημένος, σύμφωνα με τα παραπάνω, τελικός πίνακας Simplex παρουσιάζεται στη συνέχεια:

**Πίνακας 3.23**

Τροποποιημένος τελικός πίνακας Simplex (μεταβολή στο διαθέσιμο πόρο $b_1$)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
| 3 | $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | -2 | $b'_1 = 100 + \frac{1}{2}\Delta b_1$ | |
| 0 | $s_2$ | 0 | 0 | -3 | 1 | 10 | $b'_2 = 500 - 3\Delta b_1$ | |
| 8 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $b'_3 = 350 + 0\Delta b_1$ | |
| $z_j$ | | 3 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 0 | 2 | $Z^* = 3100 + \frac{3}{2}\Delta b_1$ | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_j - z_j$ | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | -2 | |

Μετά τη δημιουργία του τροποποιημένου τελικού πίνακα Simplex, εφαρμόζουμε το κριτήριο της μη αρνητικότητας για τα νέα στοιχεία της στήλης «Δεξιό Μέλος». Σύμφωνα με αυτό, η προσδιορισθείσα λύση παραμένει η βέλτιστη, αν: $b_1'$ , $b_2'$ , $b_3' \geq 0$.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι οι ανισότητες αυτές συναληθεύουν στο διάστημα $-200 \leq \Delta b_1 \leq 166.7$. Κατά συνέπεια, η προσδιορισθείσα λύση παραμένει η βέλτιστη, αν ισχύει:

$$\Delta b_1 \in [-200, 166.7],\ b_1^* = b_1 + \Delta b_1 \in [1400, 1766.7] \text{ και } \Delta b_1(\%) \in [-12.5, 10.42] \quad (3.26)$$

Έχοντας προσδιορίσει τα παραπάνω διαστήματα, μπορούμε πλέον, εύκολα και άμεσα, να διαπιστώσουμε αν μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση όταν ο πρώτος διαθέσιμος πόρος $b_1$ αυξάνεται ή μειώνεται κατά ένα συγκεκριμένο ποσό ή ποσοστό. Τέλος, σημειώνεται ότι όσο το $\Delta b_1$ παραμένει στο διάστημα [-200,166.7], η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται και δίνεται από τον τύπο:

$$Z^* = 3100 + \frac{3}{2}\Delta b_1 \quad (3.27)$$

όπου $\Delta b_1$ η εκάστοτε μεταβολή του πρώτου διαθέσιμου πόρου $b_1$.

Η ίδια μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί για να διερευνηθούν οι επιπτώσεις τυχόν μεταβολών και των υπόλοιπων πόρων στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Μετά την ολοκλήρωση της ανάλυσης ευαισθησίας για τη μεταβολή μεμονωμένων δεξιών μελών περιορισμών, προχωρούμε σε αντίστοιχη ανάλυση για ταυτόχρονη μεταβολή περισσότερων του ενός δεξιών μελών περιορισμών. Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε δύο δεσμευτικούς και έναν μη δεσμευτικό περιορισμό. Τα όρια της μεταβολής των αντίστοιχων δεξιών μελών τους, όταν μεταβάλλονται μεμονωμένα, μπορούν να υπολογιστούν κατά τα γνωστά, όπως έχει ήδη υπολογιστεί το όριο του $b_1$ και είναι τα ακόλουθα:

$$\Delta b_1 \in [-200, 166.67],\ \Delta b_2 \in [-500, +\infty] \text{ και } \Delta b_3 \in [-50, +\infty] \quad (3.28)$$

Εφόσον οι δύο από τους τρεις περιορισμούς είναι δεσμευτικοί, οποιοδήποτε ζεύγος των περιορισμών και αν μεταβληθεί ταυτόχρονα, θα περιλαμβάνει έναν τουλάχιστον δεσμευτικό περιορισμό και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να εφαρμοστεί ο κανόνας του ποσοστού 100%.

Έστω ότι επιλέγουμε τους δύο δεσμευτικούς περιορισμούς, πρώτο και τρίτο. Αν το δεξιό μέλος $b_1 = 100$ του πρώτου περιορισμού αυξηθεί κατά 50 μονάδες, δηλαδή κατά ποσοστό ίσο με το $\left(50/166.7\right)\cdot 100 = 30\%$ του συνολικού επιτρεπόμενου ποσοστού αύξησης του και το δεξιό μέλος $b_3 = 350$ του τρίτου περιορισμού μειωθεί κατά 25 μονάδες, δηλαδή κατά ποσοστό $\left(25/50\right)\cdot 100 = 50\%$ του συνολικού επιτρεπόμενου ποσοστού μείωσης του, η παρούσα λύση παραμένει η βέλτιστη, καθώς το συνολικό ποσοστό μεταβολής είναι $30\% + 50\% = 80\%$, δηλαδή μικρότερο του 100% του μέγιστου επιτρεπόμενου ποσοστού μεταβολής και για τους δύο περιορισμούς από κοινού. Αντίθετα, αν το δεξιό μέλος $b_1 = 100$ του πρώτου περιορισμού αυξηθεί κατά 50 μονάδες, αλλά το δεξιό μέλος $b_3$ του τρίτου περιορισμού μειωθεί κατά 40 μονάδες, δηλαδή κατά ποσοστό ίσο με το $\left(40/50\right)\cdot 100 = 80\%$ του συνολικού επιτρεπόμενου ποσοστού μείωσης του, η παρούσα λύση παύει να είναι η βέλτιστη, καθώς το συνολικό ποσοστό μεταβολής είναι $30\% + 80\% = 110\%$, δηλαδή μεγαλύτερο του 100% του μέγιστου επιτρεπόμενου ποσοστού μεταβολής και για τους δύο περιορισμούς από κοινού.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι, επειδή το δεξιό μέλος $b_1$ μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα (ανώτερο όριο το $+\infty$) και, κατά συνέπεια, το ποσοστό κάθε αύξησης του, σε σχέση με την ανώτερη επιτρεπόμενη, είναι αμελητέο, η παρούσα λύση παραμένει η βέλτιστη για οποιαδήποτε αύξηση του $b_3$, εφόσον το $b_1$ παραμένει εντός των ορίων της ευαισθησίας του.

### 3.5.5 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης για την εφαρμογή της ανάλυσης ευαισθησίας που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη υποενότητα θα χρησιμοποιηθεί το πρόβλημα που διατυπώθηκε στην υποενότητα 1.4.2, επιλύθηκε γραφικά στην υποενότητα 2.1.3 και με τη μέθοδο Simplex στην υποενότητα 3.3.3.

### 3.5.5.1 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές

Έστω ότι ο συντελεστής $c_1 = 150$ της βασικής μεταβλητής $x_1$ μεταβάλλεται κατά $\Delta c_1$, οπότε η νέα του τιμή είναι $c_1^* = (150 + \Delta c_1)$. Για να διερευνηθούν οι επιπτώσεις της μεταβολής αυτής στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τον τελικό πίνακα Simplex (Πίνακας 3.17) και τον τροποποιούμε σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενη υποενότητα.

Ο τροποποιημένος, σύμφωνα με τα παραπάνω, τελικός πίνακας Simplex παρουσιάζεται στη συνέχεια.

**Πίνακας 3.24**

Τροποποιημένος τελικός πίνακας Simplex (μεταβολή στον αντικειμενικό συντελεστή $c_1$)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $150+\Delta c_1$ | 250 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
| | | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
| $150+\Delta c_1$ | $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{5}{130}$ | $\frac{2}{65}$ | 0 | $\frac{5}{130}$ | $-\frac{2}{65}$ | 0 | 30 | |
| 0 | $e_3$ | 0 | 0 | $\frac{5}{65}$ | $-\frac{30}{65}$ | 1 | $-\frac{5}{65}$ | $\frac{30}{65}$ | -1 | 100 | |
| 250 | $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{130}$ | $-\frac{3}{65}$ | 0 | $-\frac{1}{130}$ | $\frac{3}{65}$ | 0 | 30 | |
| | $z_j$ | $150+\Delta c_1$ | 250 | $-\left(\frac{5}{130}\Delta c_1+\frac{500}{130}\right)$ | $\left(\frac{2}{65}\Delta c_1-\frac{450}{65}\right)$ | 0 | $\left(\frac{5}{130}\Delta c_1+\frac{500}{130}\right)$ | $\left(-\frac{2}{65}\Delta c_1+\frac{450}{65}\right)$ | 0 | $Z^* = 12000+30\Delta c_1$ | |
| | $c_j-z_j$ | 0 | 0 | $\left(\frac{5}{130}\Delta c_1+\frac{500}{130}\right)$ | $\left(-\frac{2}{65}\Delta c_1+\frac{450}{65}\right)$ | 0 | $M-\left(\frac{5}{130}\Delta c_1+\frac{500}{130}\right)$ | $M-\left(\frac{2}{65}\Delta c_1+\frac{450}{65}\right)$ | M | | |

Μετά τη δημιουργία του τροποποιημένου τελικού πίνακα Simplex, εφαρμόζουμε το κριτήριο αριστότητας της λύσης στα νέα στοιχεία της σειράς $\delta_j =$ «$c_j - z_j$». Επειδή έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, η προσδιορισθείσα λύση θα παραμένει η βέλτιστη, αν οι νέες διαφορικές αποδόσεις είναι μη αρνητικές, δηλαδή αν $\delta_1,\ \delta_3,\ \delta_4,\ \delta_6,\ \delta_7$ και $\delta_8 \geq 0$.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι οι ανισότητες αυτές συναληθεύουν στο διάστημα $-100 \leq \Delta c_1 \leq 225$. Κατά συνέπεια, η προσδιορισθείσα λύση παραμένει η βέλτιστη, αν ισχύει:

$$\Delta c_1 \in [-100, 225],\ c_1^* = (c_1 + \Delta c_1) \in [50, 375] \text{ και } \Delta c_1(\%) \in [-66.67, 150] \quad (3.29)$$

Έχοντας προσδιορίσει τα παραπάνω διαστήματα, μπορούμε πλέον, εύκολα και άμεσα, να διαπιστώσουμε αν μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση όταν ο αντικειμενικός συντελεστής $c_1$ της μεταβλητής $x_1$ αυξάνεται ή μειώνεται κατά ένα συγκεκριμένο ποσό ή ποσοστό.

Τέλος, σημειώνεται ότι όσο το $\Delta c_1$, δηλαδή η εκάστοτε μεταβολή του αντικειμενικού συντελεστή $c_1$ της μεταβλητής $x_1$, παραμένει στο διάστημα [-100,225], η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\begin{aligned} Z^* &= (150 + \Delta c_1)x_1 + 250x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3 \\ &= \underbrace{150x_1 + 250x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3}_{Z} + (\Delta c_1)x_1 \Rightarrow \qquad (3.30) \\ Z^* &= 12000 + 30\Delta c_1 \end{aligned}$$

Η ίδια μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί για να διερευνηθούν οι επιπτώσεις τυχόν μεταβολών των αντικειμενικών συντελεστών και των υπόλοιπων μεταβλητών, βασικών και μη, στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στην περίπτωση μεγιστοποίησης (Ενότητα 3.5.4.1.), η μοναδική διαφορά που υπάρχει στην περίπτωση της μη βασικής μεταβλητής σε σύγκριση με τη βασική, είναι ότι μεταβάλλεται και χρειάζεται να επανυπολογιστεί, κατά τα γνωστά, μόνο ένα στοιχείο του τελικού πίνακα Simplex και συγκεκριμένα το στοιχείο της σειράς «$c_j - z_j$» που αντιστοιχεί στην υπό μελέτη μεταβλητή (Βλέπε Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4/Κεφάλαιο 3).

### 3.5.5.2 Μεταβολές στους διαθέσιμους πόρους

Έστω ότι ο διαθέσιμος πόρος $b_1$, που αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό, μεταβάλλεται κατά $\Delta b_1$, οπότε η νέα τιμή του είναι $b_1^* = b_1 + \Delta b_1$. Για να διερευνηθούν οι επιπτώσεις της μεταβολής αυτής στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τον τελικό πίνακα Simplex (Πίνακας 3.17) και τον τροποποιούμε σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενη υποενότητα.

Ο τροποποιημένος, σύμφωνα με τα παραπάνω, τελικός πίνακας Simplex παρουσιάζεται στη συνέχεια:

**Πίνακας 3.25**

Τροποποιημένος Τελικός Πίνακας Simplex (μεταβολή στο διαθέσιμο πόρο $b_1$)

| Βάση | | Μεταβλητές | | | | | | | | Δεξιό Μέλος | Πηλίκο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 150 | 250 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | | |
| Αντικειμενικοί Συντελεστές | Βασικές Μεταβλητές | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
| 150 | $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{5}{130}$ | $\frac{2}{65}$ | 0 | $\frac{5}{130}$ | $-\frac{2}{65}$ | 0 | $30-\frac{5}{130}\Delta b_1$ | |
| 0 | $e_3$ | 0 | 0 | $\frac{5}{65}$ | $-\frac{30}{65}$ | 1 | $-\frac{5}{65}$ | $\frac{30}{65}$ | -1 | $100+\frac{5}{65}\Delta b_1$ | |
| 250 | $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{130}$ | $-\frac{3}{65}$ | 0 | $-\frac{1}{130}$ | $\frac{3}{65}$ | 0 | $30+\frac{1}{130}\Delta b_1$ | |
| | $z_j$ | 150 | 250 | $-\frac{500}{130}$ | $-\frac{450}{65}$ | 0 | $\frac{500}{130}$ | $\frac{450}{65}$ | 0 | $Z^* = 12000 - \frac{500}{130}\Delta b_1$ | |
| | $c_j - z_j$ | 0 | 0 | $\frac{500}{130}$ | $\frac{450}{65}$ | 0 | $M-\frac{500}{130}$ | $M-\frac{450}{65}$ | M | | |

Μετά τη δημιουργία του τροποποιημένου τελικού πίνακα Simplex, εφαρμόζουμε το κριτήριο μη αρνητικότητας για τα νέα στοιχεία της στήλης «Δεξιό Μέλος». Σύμφωνα με αυτό, η προσδιορισθείσα λύση παραμένει η βέλτιστη αν: $b'_1 \geq 0, b'_2 \geq 0, b'_3 \geq 0$.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι οι ανισότητες αυτές συναληθεύουν στο διάστημα $-1300 \leq \Delta b_1 \leq 780$. Κατά συνέπεια, η προσδιορισθείσα λύση παραμένει η βέλτιστη αν ισχύει:

$$\Delta b_1 \in [-1300, 780],\ b_1^* = (b_1 + \Delta b_1) \in [200, 2280] \text{ ή } \Delta b_1(\%) \in [-86.87, 52] \tag{3.32}$$

Έχοντας προσδιορίσει τα παραπάνω διαστήματα, μπορούμε πλέον, εύκολα και άμεσα, να διαπιστώσουμε αν μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση όταν ο πρώτος διαθέσιμος πόρος $b_1$ αυξάνεται ή μειώνεται κατά ένα συγκεκριμένο ποσό ή ποσοστό. Τέλος, σημειώνεται ότι όσο το $\Delta b_1$ παραμένει στο διάστημα [-1300,780], η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$Z^* = 12000 - \frac{500}{130}\Delta b_1 \tag{3.33}$$

όπου $\Delta b_1$ είναι η εκάστοτε μεταβολή του πρώτου διαθέσιμου πόρου $b_1$.

Η ίδια μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί για να διερευνηθούν οι επιπτώσεις τυχόν μεταβολών και των υπόλοιπων πόρων στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.