ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Περιεχόμενα

- Το πρόβλημα της μεταφοράς
- Μέθοδος Vogel
- Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας
- Μέθοδος MODI
- Το πρόβλημα της Εκχώρησης

Το πρόβλημα της μεταφοράς

- Υπάρχουν προβλήματα βελτιστοποίησης όπου είναι απαραίτητος ένας μεγάλος αριθμός περιορισμών και μεταβλητών, αλλά οι περισσότεροι συντελεστές είναι μηδέν.
- Το πρόβλημα της μεταφοράς αναφέρεται στην μεταφορά προϊόντων από διάφορους σταθμούς παραγωγής σε διάφορες θέσεις κατανάλωσης με το ελάχιστο δυνατό κόστος.
- Έστω ότι έχουμε m σταθμούς προέλευσης $S_1, S_2, \ldots, S_m$, και στον καθένα υπάρχει $s_1, s_2, \ldots, s_m$ ποσότητες από ένα προϊόν.
- Το προϊόν πρέπει να μεταφερθεί σε n σταθμούς προορισμού $D_1, D_2, \ldots, D_n$ που έχουν ανάγκη από $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ποσότητες αντίστοιχα.
- Αν το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας του προϊόντος από τον S_i σταθμό προέλευσης στον D_j, σταθμό προορισμού είναι c_{ij} χρηματικές μονάδες, ΖΗΤΑΜΕ την ποσότητα x_{ij} που πρέπει να μεταφέρεται ανάμεσα σ' αυτές τις θέσεις ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς και συγχρόνως να ικανοποιούνται όλες οι ανάγκες όλων των σταθμών προορισμού.

Το πρόβλημα της μεταφοράς π.γ.π

$$\text{minimize } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sb.to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{προσφορά}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j \quad j = 1, 2, \ldots, m \quad \text{ζήτηση}$$

$$x_{ij} \ge 0 \text{ για ολα τα } i, j$$

Πίνακας προβλήματος μεταφοράς

	D_1	D_2		D_n	
S_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	s_1
S_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	s_2
	⋮	⋮		⋮	
S_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	s_m
	d_1	d_2		d_n	

Παράδειγμα

Ο κεντρικός γεωργικός συνεταιρισμός της Κρήτης έχει στις τρεις αποθήκες του 35, 50 και 40 τόνους πορτοκαλιών. Τέσσερις λαχαναγορές της χώρας θέλουν να αγοράσουν 45, 20, 30 και 30 τόνους πορτοκαλιών αντίστοιχα.

Από	Προς				Διαθέσιμες Ποσότητες
	Λ1	Λ2	Λ3	Λ4	
Α1	800	600	1000	900	35
Α2	900	1200	1300	700	50
Α3	1400	900	1600	500	40
Απαιτούμενες Ποσότητες	45	20	30	30	

Το ζητούμενο είναι πως θα γίνει η μεταφορά από τις αποθήκες στις λαχαναγορές έτσι ώστε το συνολικό κόστος μεταφοράς να είναι ελάχιστο.

Παράδειγμα

- Έστω x_{ij} η ποσότητα (σε τόνους) πορτοκαλιών που θα μεταφερθεί από την αποθήκη Ai στη λαχαναγορά Λj
- $800\,x_{11}+600\,x_{12}+1000\,x_{13}+900\,x_{14}+$ (κόστος μεταφοράς από την A1)
  $900\,x_{21}+1200\,x_{22}+1300\,x_{23}+700\,x_{24}+$ (κόστος μεταφοράς από την A2)
  $1300\,x_{31}+900\,x_{32}+1600\,x_{33}+500\,x_{34}$ (κόστος μεταφοράς από την A3)
- Διαθέσιμη ποσότητα σε αποθήκη

  $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 35$
  $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \le 50$
  $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \le 40$
- Ανάγκες λαχαναγοράς

  $x_{11}+x_{21}+x_{31} \ge 45$
  $x_{12}+x_{22}+x_{32} \ge 20$
  $x_{13}+x_{23}+x_{33} \ge 30$
  $x_{14}+x_{24}+x_{34} \ge 30$

Παράδειγμα

- Ο αντίστοιχος πίνακας του προβλήματος θα είναι

	$Λ_1$	$Λ_2$	$Λ_3$	$Λ_4$	
A_1	800 x_{11}	600 x_{12}	1000 x_{13}	900 x_{14}	35
A_2	900 x_{21}	1200 x_{22}	1300 x_{23}	700 x_{24}	50
A_3	1400 x_{31}	900 x_{32}	1600 x_{33}	500 x_{34}	40
	45	20	30	30	

Ισορροπημένο Πρόβλημα Μεταφοράς

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη εφικτής λύσης στο πρόβλημα μεταφοράς, είναι το σύνολο των διαθέσιμων ποσοτήτων να ισούται με το σύνολο των απαιτούμενων

$$\sum_{j=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{m} d_j$$

Οπότε το πρόβλημα μεταφοράς γίνεται

$$\text{minimize } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sb.to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{προσφορά}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \ldots, m \ \text{ζήτηση}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ για ολα τα } i, j$$

Μέθοδος Vogel

- Βήμα 1: Γράψτε το πρόβλημα στην ισορροπημένη μορφή μεταφοράς
- Βήμα 2: Υπολογίστε ποινές για κάθε γραμμή και στήλη
  - Ποινή για Γραμμή i = η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο μικρότερων κοστών της γραμμής
  - Ποινή για Στήλη j = η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο μικρότερων κοστών της στήλης
- Βήμα 3: Επιλέξετε γραμμή η στήλη με τη μεγαλύτερη ποινή
- Βήμα 4: Εκχώρησε όσο περισσότερες μονάδες γίνεται στο κελί με το μικρότερο κόστος μεταφοράς της επιλεγείσας γραμμής ή στήλης
- Βήμα 5ο:
  - Εάν εξαντλήθηκε η προσφορά του i σταθμού προέλευσης διαγράψτε τον
  - Εάν εξαντλήθηκε
  - Εάν εξαντλήθηκε η προσφορά του i σταθμού προέλευσης και η ζήτηση του j σταθμού προορισμού διαγράψτε τον ένα από τους δύο (ΟΧΙ και τους δύο)
- Βήμα 6ο: **Αν** απόμεινε μόνο μια γραμμή ή μόνο μια στήλη **τότε** εκχώρησε όλες τις εναπομείνασες ποσότητες στα κελιά **αλλιώς** επέστρεψε στο Βήμα 2

Παράδειγμα –Μέθοδος Vogel 1

	100	300	300	200	
200	800 x11	600 x12	1000 x13	900 x14	35
200	900 x21	1200 x22	1300 x23	700 x24	50
400	1400 x31	900 x32	1600 x33	500 x34	40
	45	20	30	30	

Η μεγαλύτερη διαφορά είναι 400 και στην αντίστοιχη γραμμή το μικρότερο κόστος είναι c34=500
Άρα x34=min{40,30}=30. Τότε x14=x24=0

Παράδειγμα –Μέθοδος Vogel 2

	100	300	300	
200	800 x11	600 x12	1000 x13	35
300	900 x21	1200 x22	1300 x23	50
500	1400 x31	900 x32	1600 x33	10
	45	20	30	

Η μεγαλύτερη διαφορά είναι 500 και στην αντίστοιχη γραμμή το μικρότερο κόστος είναι c32=900
Άρα x32=min{10,20}=10. Τότε x31=x33=0

Παράδειγμα –Μέθοδος Vogel 3

	100	600	300	
200	800 x11	600 x12	1000 x13	35
300	900 x21	1200 x22	1300 x23	50
	45	10	30	

Η μεγαλύτερη διαφορά είναι 600 και στην αντίστοιχη γραμμή το μικρότερο κόστος είναι c12=600
Άρα x12=min(35,10)=10. Τότε x22=0

Παράδειγμα –Μέθοδος Vogel 4

	100	300	
200	800 x11	1000 x13	25
400	900 x21	1300 x23	50
	45	30	

Η μεγαλύτερη διαφορά είναι 400 και στην αντίστοιχη γραμμή το μικρότερο κόστος είναι c21=90(
Άρα x21=min(50,45)=45. Τότε x11=0

300	
1000 x13	25
1300 x23	5
30	

Ορίζονται μονοσήμαντα οι τιμές των μεταβλητών x13=25, x23=5

Παράδειγμα –Μέθοδος Vogel 5

Άρα η βασική εφικτή λύση είναι

	Δ1	Λ2	Λ3	Λ4	
A1	800 0	600 10	1000 25	900 0	35
A2	900 45	1200 0	1300 5	700 0	50
A3	1400 0	900 10	1600 0	500 30	40
	45	20	30	30	

Βασική Εφικτή Λύση

- Κάθε **βασική εφικτή λύση** του προβλήματος μεταφοράς έχει ακριβώς **m+n-1 βασικές μεταβλητές (μη μηδενικές μεταβλητές)**

- Κάθε π.γ.π. που όλοι οι συντελεστές των μεταβλητών xij στους περιορισμούς είναι 0 ή 1, ενώ κάθε μια από αυτές εμφανίζεται με συντελεστή 1 σε ΔΥΟ ακριβώς από τους περιορισμούς, σ’ αυτόν που αντιστοιχεί στο σταθμό προσέλευσης Si και σε εκείνον που αντιστοιχεί στον σταθμό ζήτησης Dj είναι πρόβλημα μεταφοράς

Επισημάνσεις στο Πρόβλημα Μεταφοράς

1. Αν η **προσφορά είναι μεγαλύτερη από τη ζήτηση** $\sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$

τότε **εισάγουμε** έναν εικονικό **σταθμό προορισμού Dn+1**, ο οποίος απαιτεί ποσότητα ίση με

$$d_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j \qquad \sum_{i=1}^{m} s_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Το κόστος μεταφοράς εξαρτάται κάθε φορά από το συγκεκριμένο πρόβλημα

2. Αν η **προσφορά είναι μικρότερη από τη ζήτηση**

τότε **εισάγουμε** έναν **εικονικό σταθμό προέλευσης Sm+1**, ο οποίος παράγει ποσότητα ίση με

$$s_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} s_i$$

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας

- Ξεκινάμε πάντα από το κελί (1,1), τη βορειοδυτική γωνία δηλαδή, και εκχωρούμε όσες περισσότερες μονάδες μπορούμε, ανάλογα με την προσφορά και ζήτηση που καταγράφονται

	Λ1	Λ2	Λ3	Λ4					
	800	600	1000	900					
Α1	35				35	0			
	900	1200	1300	700					
Α2	10	20	20		50	50	40	20	0
	1400	900	1600						
Α3			10	30	40	40	40	40	40
	45	20	30	30					
	10	20	30	30					
	0	20	30	30					
		0	30	30					
			30	30					
			10	30					

Μέθοδος MODI

ΜΕΘΟΔΟΣ MODI

- Η λύση είναι μη εκφυλισμένη αφού έχει 3+4-1=6 θετικές συνιστώσες
  - Σχηματίζουμε τις εξισώσεις $u_i+v_j=c_{ij}$ για τις βασικές μεταβλητές
    - $u_1+v_1=800$
    - $u_2+v_1=900$
    - $u_2+v_2=1200$
    - $u_2+v_3=1300$
    - $u_3+v_3=1600$
    - $u_3+v_4=500$
  - Για $u_1=0$ έχουμε $v_1=800$, $u_2=100$, $v_2=1100$, $v_3=1200$, $u_3=400$, $v_4=100$

Μέθοδος MODI 1

	800	1100	1200	100	
0	800 35	600	1000	900	35
100	900 10	1200 20	1300 20	700	50
400	1400	900	1600 10	500 30	40

δ12=0+1100-600=	500
δ13=0+1200-1000=	200
δ14=0+100-900=	-800
δ24=100+100-700=	-500
δ31=400+800-1400=	-200
δ32=400+1100-900=	600

ΔΕΝ ΕΝΑΙ ΑΡΙΣΤΗ ΑΦΟΥ ΚΑΠΟΙΑ δij>0

Μέθοδος MODI 2

	800	1100	1200	100	
0	800 35	500 600	200 1000	900	35
100	900 10	1200 20	1300 20	700	50
400	1400	600 900	1600 10	500 30	40

Επιλέγουμε το max

θ=min{10,20}=10

	800	1100	1200	100	
0	800 35	500 600	200 1000	900	35
100	900 10	1200 20-θ	1300 20+θ	700	50
400	1400	600 900 θ	1600 10-θ	500 30	40

Μέθοδος MODI 3

	800	1100	1200	100	
0	800 35	500 600	200 1000	900	35
100	900 10	1200 10	1300 30	700	50
400	1400	600 900 10	1600 0	500 30	40

R1=Ro-θδ32=112

	800	1100	1200	700	
0	800 35	500 600	200 1000	-200 900	35
100	900 10	1200 10	1300 30	100 700	50
-200	-800 1400	900 10	-600 1600	500 30	40

Μέθοδος MODI 4

	800	1100	1200	700	
0	800 35	500 600	200 1000	-200 900	35
100	900 10	1200 10	1300 30	100 700	50
-200	-800 1400	900 10	-600 1600	500 30	40

θ=min{35,10}=10

	800	600	1200	200	
0	800 35-θ	500 600 θ	200 1000	-200 900	35
100	900 10+θ	1200 10-θ	1300 30	100 700	50
300	-800 1400	900 10	-600 1600	500 30	40

Μέθοδος MODI 5

	800	600	1200	200	
0	800 25	600 10	200 1000	-700 900	35
100	900 20	-500 1200	1300 30	-400 700	50
300	-300 1400	900 10	-100 1600	500 30	40
	45	20	30	30	

θ=min{30,25}=25

	600	600	100	200	
0	800	600 10	1000 25	900	35
300	900 45	1200	1300 5	700	50
300	1400	900 10	1600	500 30	40
	45	20	30	30	

R3=Ro-θδ13=102

Μέθοδος MODI 6

	600	600	100	200	
0	-200 800	600 10	1000 25	-700 900	35
300	900 45	-300 1200	1300 5	-200 700	50
300	-500 1400	900 10	-1200 1600	500 30	40
	45	20	30	30	

Το πρόβλημα της Εκχώρησης

- Το πρόβλημα της εκχώρησης είναι μια ειδική περίπτωση προβλήματος μεταφοράς, στο οποίο η προσφορά του κάθε σταθμού προέλευσης καθώς και η ζήτηση του κάθε σταθμού προορισμού ισούται με τη μονάδα (1).
- Συνήθως οι σταθμοί προέλευσης αντιπροσωπεύουν υπαλλήλους, μηχανές κλπ., που εκχωρούνται σε μια μόνο δραστηριότητα όπως καθήκον, έργο δουλειά. Φυσικά υπάρχει ένα κόστος cij για την εκχώρηση αυτή.
- Το ερώτημα είναι πως θα εντοπιστεί η ιδανική εκχώρηση των μηχανισμών διεκπεραίωσης στις δραστηριότητες ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος ή γενικότερα να βελτιστοποιείται ένα κριτήριο απόδοσης που τίθεται.

Το πρόβλημα της Εκχώρησης –Μαθηματική Διατύπωση

$$\text{minimize } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sb.to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$ κάθε μηχανισμός διεκπεραίωσης

εκτελεί μόνο μια δραστηριότητα

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$ κάθε δραστηριότητα εκτελείται

μόνο από εναν μηχανισμό διεκπεραίωσης

$$x_{ij} \geq 0 \text{ για ολα τα } i, j$$

Παράδειγμα (1)

Μια οικοδομική εταιρεία χρησιμοποιεί τέσσερα συνεργεία για να φέρει σε πέρας έναν ίσο αριθμό έργων που έχει αναλάβει. Κάθε συνεργείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε έργο, όχι όμως εξίσου ικανοποιητικά όπως φαίνεται από τον πίνακα που ακολουθεί

	Χρόνος			
	1ο έργο	2ο έργο	3ο έργο	4ο έργο
1ο συνεργείο	14	5	8	7
2ο συνεργείο	2	12	6	5
3ο συνεργείο	7	8	3	9
4ο συνεργείο	2	4	6	10

Το ζητούμενο είναι η εκχώρηση σε κάθε συνεργείο ενός εκ των έργων σε τρόπο ώστε ο συνολικός χρόνος απασχόλησής τους να είναι ο ελάχιστος δυνατός

Παράδειγμα (2)

	Χρόνος					
	1ο έργο	2ο έργο	3ο έργο	4ο έργο		
1ο συνεργείο	14	5	8	7		
2ο συνεργείο	2	12	6	5		
3ο συνεργείο	7	8	3	9		
4ο συνεργείο	2	4	6	10		
	χij	Το i-συνεργείο εκχωρείται στο j-έργο				
	Μεταβλητές					
	χ11	χ12	χ13	χ14		
	χ21	χ22	χ23	χ24		
	χ31	χ32	χ33	χ34		
	χ41	χ42	χ43	χ44		
				Συνολικός Χρόνος		15

Ουγγρική Μέθοδος (1)

1. Ο Ουγγρικός Αλγόριθμος αποσκοπεί στη μετατροπή του πίνακα κόστους **C={c_{ij}}** του προβλήματος εκχώρησης σ' ένα πίνακα που να περιέχει ένα τουλάχιστον μηδενικό στοιχείο σε κάθε σειρά και στήλη.

2. Άρα αν μια εφικτή λύση μπορεί να βρεθεί μεταξύ δύο παραγόμενων μηδενικών καταχωρήσεων, τότε αυτή θα είναι η βέλτιστη, αφού το κόστος για το νέο πίνακα δε μπορεί να είναι μικρότερο από μηδέν.

	Χρόνος			
	1ο έργο	2ο έργο	3ο έργο	4ο έργο
1ο συνεργείο	14	5	8	7
2ο συνεργείο	2	12	6	5
3ο συνεργείο	7	8	3	9
4ο συνεργείο	2	4	6	10

Ουγγρική Μέθοδος (2)

Βασικά Βήματα της Ουγγρικής Μεθόδου

Βήμα 1ο. Κατασκευή του πίνακα κόστους ευκαιρίας

1. Αφαιρούμε το μικρότερο κόστος κάθε σειράς από όλα τα στοιχεία της σειράς.
2. Αφαιρούμε το μικρότερο κόστος κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία της στήλης.

Βήμα 2ο. Έλεγχος αριστότητας της τρέχουσας λύσης

1. Χαράσσουμε κάθετες ή οριζόντιες γραμμές που καλύπτουν όλα τα μηδενικά του πίνακα με το ελάχιστο πλήθος γραμμών.
2. Αν το πλήθος των γραμμών κάλυψης είναι ίσο με το πλήθος των σειρών ή των στηλών, τότε βρίσκουμε τον πίνακα που οδηγεί στη βέλτιστη λύση και πηγαίνουμε στο βήμα 4, διαφορετικά συνεχίζουμε.

Βήμα 3ο. Βελτίωση του πίνακα κόστους ευκαιρίας

1. Αφαιρούμε το μικρότερο μη καλυμμένο αριθμό από όλα τα μη καλυμμένα στοιχεία του πίνακα.
2. Προσθέτουμε το μικρότερο μη καλυμμένο αριθμό σε όλα τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στις τομές των γραμμών κάλυψης.
3. Επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Βήμα 4ο. Εντοπισμός της βέλτιστης λύσης

1. Εντοπίζομε τη σειρά ή τη στήλη που έχει ακριβώς ένα μηδενικό στοιχείο και κάνουμε εκχώρηση στο αντίστοιχο κελί. Αν δεν υπάρχουν σειρές ή στήλες με μηδενικό, επιλέγουμε τη σειρά ή τη στήλη που έχει το μικρότερο πλήθος μηδενικών και συνεχίζουμε ανάλογα.
2. Διαγράφουμε τη σειρά και τη στήλη που καθορίζουν το κελί και επαναλαμβάνουμε το βήμα 4.1 μέχρι να γίνουν όλες οι εκχωρήσεις.

Ουγγρική Μέθοδος (3)

- Επιλέγω το μικρότερο στοιχείο της i-γραμμής του πίνακα κόστους (μεταβλητή uij)

14	5	8	7	u1=5
2	12	6	5	u2=2
7	8	3	9	u3=3
2	4	6	10	u4-2

- Αφαιρούμε από τα στοιχεία της κάθε γραμμής το μικρότερο στοιχείο του ui.

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8
v1=0	v2=0	v3=0	v4=2

- Έτσι σε κά ... ηδενικό στοιχείο
- Επιλέγω το μικρότερο στοιχείο της j στήλης (μεταβλητή Vj)
- Αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο της j στήλης από όλα τα στοιχεία δημιουργείται ο **πίνακας κόστους ευκαιρίας** (μεταβλητή vj)

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

Ουγγρική Μέθοδος (4)

- Στον πίνακα
  - Ολες οι γραμμες εχουν ενα μηδενικο στοιχείο
  - Ολες οι τιμες των στοιχείων ειναι μη αρνητικές αρα υπάρχει εφικτη λύση

	Εργο 1	Εργο 2	Εργο 3	Εργο 4
Συνεργείο 1	9	0	3	0
Συνεργείο 2	0	10	4	1
Συνεργείο 3	4	5	0	4
Συνεργείο 4	0	2	4	6

Βήμα 3: Σχεδιάστε τον μικρότερο αριθμό ευθειών οι οποίες θα καλύπτουν ολα τα μηδενικά στοιχεία (η λύση ειναι εφικτή αν ο αριθμός των ευθειων ειναι ισος με τον αριθμό των μεταβλητών)

	Εργο 1	Εργο 2	Εργο 3	Εργο 4
Συνεργριο 1	9	0	3	0
Συνεργειο 2	0	10	4	1
Συνεργειο 3	4	5	0	4
Συνεργειο 4	0	2	4	6

Αν τα μηδενικά στοιχεία στο πίνακα δημιουργούν εφικτή λύση τότε η λύση ειναι βελτιστη αλλιώς πήγαινε στο επόμενο βήμα

Ουγγρική Μέθοδος (4)

- **Βήμα4**: Επιλέξτε το μικρότερο στοιχείο απο αυτα που δεν καλύπτονται απο ευθείες

	Εργο 1	Εργο 2	Εργο 3	Εργο 4
Συνεργείο1	9	0	3	0
Συνεργείο 2	0	10	4	1
Συνεργείο 3	4	5	0	4
Συνεργείο 4	0	2	4	6

και αφαιρέστε το απο κάθε στοιχειο το οποίο δεν καλύπτεται απο ευθείες και μετα προσθέστε το σε κάθε στοιχείο που βρίσκεται στην διασταύρωση δύο ευθειώνs

	Εργο 1	Εργο 2	Εργο 3	Εργο 4
Συνεργείο 1	9+1=10	0	3	0
Συνεργείο 2	0	10-1=9	4-1=3	1-1=0
Συνεργείο 3	4+1=5	5	0	4
Συνεργείο 4	0	2-1=1	4-1=3	6-1=5

ii. Αν εχει βρεθεί η λύση πηγαίνετε στο Βήμα 5, αλλιώς επαναλάβατε την ίδια διαδικασία

Βήμα 5: Προσδιορίστε την βέλτιση λύση

Ουγγρική Μέθοδος (5)

- Ειναι αυτη η λύση εφικτή?

	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Consultant 1	10	0	3	0
Consultant 2	0	9	3	0
Consultant 3	5	5	0	4
Consultant 4	0	1	3	5

4 μεταβλητές, 4 ευθείες! Αρα βελτιστη

- Υπολογίστε τη βελτιστη λύση

	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Consultant 1	10	0	3	0
Consultant 2	0	9	3	0
Consultant 3	5	5	0	4
Consultant 4	0	1	3	5

Ουγγρική Μέθοδος (6)

	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Consultant 1	10	0	3	0
Consultant 2	0	9	3	0
Consultant 3	5	5	0	4
Consultant 4	0	1	3	5

Εργο 3 στο Συνεργείο 3

	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Consultant 1	10	0	3	0
Consultant 2	0	9	3	0
Consultant 3	5	5	0	4
Consultant 4	0	1	3	5

Εργο 1 στο Συνεργείο 4

	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Consultant 1	10	0	3	0
Consultant 2	0	9	3	0
Consultant 3	5	5	0	4
Consultant 4	0	1	3	5

Εργο 4 στο Συνεργείο2

	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Consultant 1	10	0	3	0
Consultant 2	0	9	3	0
Consultant 3	5	5	0	4
Consultant 4	0	1	3	5

Εργο 2 στο Συνεργειο 1

Ελάχιστος αριθμός ωρών 15