



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΈΡΕΥΝΑ

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
Εργαστήριο Ποσοτικών Μεθόδων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Γραμμικός Προγραμματισμός

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Γραμμικός Προγραμματισμός
- Μορφοποίηση προβλημάτων σε π.γ.π
- Προϋποθέσεις εφαρμογής μοντέλου γ.π.
- Πρόβλημα Μεγιστοποίησης
- Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

ΠΕΡΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

- Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μία από τις πιο διαδεδομένες και ευρέως χρησιμοποιούμενες τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας, οι οποίες έχουν αναπτυχθεί για να βοηθούν τα στελέχη των επιχειρήσεων και των οργανισμών στη λήψη τέτοιων επιχειρηματικών αποφάσεων.
- Γραμμικός Προγραμματισμός είναι η τεχνική που ασχολείται με το πρόβλημα της **κατανομής** των περιορισμένων **πόρων** ενός συστήματος σε *ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες* κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.
- Από μαθηματικής άποψης ο γ.π. περιγράφει ένα μοντέλο που αφορά την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση (**max/min**) μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από γραμμικούς περιορισμούς.
- Ο γ.π. ασχολείται με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων του συστήματος που περιγράφει για να προκύψει το άριστο αποτέλεσμα, δηλαδή εκείνο το αποτέλεσμα που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων υλοποιεί τον ζητούμενο σκοπό με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.
- Η πιο γνωστή μαθηματική διατύπωση και μια συστηματική διαδικασία επίλυσης του, η μέθοδος Simplex οφείλεται στον Dantzing, (1947)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ορισμένες ενδεικτικές περιπτώσεις προβλημάτων τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν με τη μέθοδο του γραμμικού προγραμματισμού αναφέρονται στη συνέχεια

- Πρόβλημα Μείγματος Επιλογής Προϊόντων (Product Mix Problem).
- Πρόβλημα Προγραμματισμού Παραγωγής (Production Planning/ Scheduling Problem)
- Πρόβλημα Μεταφοράς (Transportation Problem)
- Πρόβλημα Επιλογής Χαρτοφυλακίου Επενδύσεων (Portfolio Selection Problem)



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

- Για να εφαρμοσθεί η μεθοδολογία του Γραμμικού Προγραμματισμού σε κάποιο πρόβλημα, θα πρέπει να δημιουργηθεί ένα αντίστοιχο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού.
- Τα **βασικά στοιχεία ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού** είναι τα ακόλουθα:
 - Οι μεταβλητές
 - Η αντικειμενική συνάρτηση
 - Οι περιορισμοί
 - Οι παράμετροι



ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΕΝΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

- Γραμμικότητα** των συναρτήσεων (linearity)
 Μια πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών
 $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}: x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x)$
 λέγεται **γραμμική** αν και μόνο αν για κάποιο σύνολο πραγματικών σταθερών αριθμών $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ισχύει $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + x_n c_n$
- Διαιρετότητα** των τιμών των μεταβλητών απόφασης (divisibility)
 Κάθε μεταβλητή απόφασης πρέπει να μπορεί να παίρνει ακέραιες αλλά και κλασματικές τιμές
- Βεβαιότητα** των τιμών των παραμέτρων (certainty)
 Όλες οι παράμετροι του προβλήματος πρέπει να είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα
- Μοναδικότητα κριτηρίου** αξιολόγησης (unique objective)



ΟΡΙΣΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Ένα πρόβλημα **βελτιστοποίησης** χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) όταν

- Αφορά την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης n άγνωστων μεταβλητών. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **αντικειμενική συνάρτηση**.
- Οι τιμές των μεταβλητών ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Κάθε **περιορισμός** πρέπει να είναι **μια γραμμική εξίσωση** ή ανίσωση.
- Κάθε μεταβλητή x_j είναι μη αρνητική ($x_j \geq 0$) ή δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο ($x_j \in \mathcal{R}$)

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Κάθε συνδυασμός τιμών (x_1, x_2, \dots, x_n) των μεταβλητών απόφασης ενός π.γ.π. ονομάζεται **λύση** του προβλήματος



ΟΡΙΣΜΟΙ [2]

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : Το σύνολο που σχηματίζεται από τα σημεία-λύσεις $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς ενός π.γ.π. ονομάζεται **εφικτή περιοχή** του π.γ.π. και τα σημεία x **εφικτές λύσεις**

Μια λύση που *παραβιάζει* τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς, ονομάζεται **μη εφικτή λύση** και **δεν είναι σημείο** της εφικτής περιοχής του π.γ.π.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4: Σ' ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης **άριστη ή βέλτιστη λύση** ονομάζεται κάθε εφικτή λύση, η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση

Σημείωση: Τα πιο πολλά προβλήματα γ.π. έχουν μια άριστη λύση. Υπάρχουν αρκετά π.γ.π. που δεν έχουν άριστη λύση και άλλα που έχουν άπειρες λύσεις



ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μία βιομηχανική μονάδα παράγει δύο προϊόντα Π1 και Π2. Για την παραγωγή τους απαιτείται η εργασία εξειδικευμένων τεχνιτών και δύο υλικά Υ1 και Υ2.

Συγκεκριμένα για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος

- Π1 απαιτούνται 2 λεπτά εξειδικευμένης εργασίας και 6 μονάδες του υλικού
- Π2 απαιτούνται 4 λεπτά εξειδικευμένης εργασίας, 2 μονάδες του υλικού και 1 μονάδα του υλικού.

Οι διαθέσιμες ποσότητες των τριών αυτών πόρων ανά ημέρα είναι 1600 λεπτά εξειδικευμένης εργασίας, 1800 μονάδες του υλικού και 350 μονάδες του υλικού.

Επιπλέον, η ημερήσια ζήτηση της αγοράς μπορεί να απορροφήσει όλη την παραγόμενη ποσότητα και των δύο προϊόντων.

Τέλος, το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι 3 χρηματικές μονάδες και 8 χρηματικές μονάδες για τα προϊόντα και αντίστοιχα.

Με βάση τα στοιχεία αυτά να προσδιορισθεί το βέλτιστο ημερήσιο πρόγραμμα παραγωγής της βιομηχανικής μονάδας, δηλαδή εκείνο το πρόγραμμα παραγωγής το οποίο θα μεγιστοποιεί το κέρδος της.



ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Τα παραπάνω στοιχεία δίνονται στον πίνακα

Πόρος	Απαιτούμενη ποσότητα πόρου ανά μονάδα προϊόντος		Διαθέσιμη ποσότητα πόρου
	Προϊόν Π ₁	Προϊόν Π ₂	
Εξειδικευμένη εργασία (λεπτά)	2	4	1600
Υλικό Υ ₁ (μονάδες προϊόντος)	6	2	1800
Υλικό Υ ₂ (μονάδες προϊόντος)	-	1	350
Κέρδος/ μονάδα (χρηματικές μονάδες)	3	8	

Καταρχήν θα πρέπει να προσδιοριστούν τα βασικά στοιχεία του:

- ✓ οι μεταβλητές απόφασης
- ✓ οι παράμετροι
- ✓ η αντικειμενική συνάρτηση και
- ✓ οι περιορισμοί.

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ & ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

- **Μεταβλητές απόφασης** είναι οι ημερήσιες ποσότητες παραγωγής από κάθε προϊόν εκφρασμένες σε μονάδες προϊόντος.
 - x_1 : Ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος Π₁ που παράγονται κάθε μέρα
 - x_2 : Ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος Π₂ που παράγονται κάθε μέρα
- Οι **παράμετροι** είναι:
 - οι διαθέσιμες ποσότητες πόρων
 - οι απαιτούμενες ποσότητες πόρων ανά μονάδα προϊόντος για κάθε προϊόν και
 - το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος για κάθε προϊόν

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Η **αντικειμενική συνάρτηση** εκφράζει τη μεγιστοποίηση του συνολικού ημερήσιου κέρδους της επιχείρησης

Συνολικό ημερήσιο κέρδος επιχείρησης (Z)

Ημερήσιο κέρδος από πωλήσεις του Π_1 + Ημερήσιο κέρδος από πωλήσεις του Π_2 =

$$\begin{array}{cccc} \text{(Μοναδιαίο κέρδος } \Pi_1) * (\text{Πωλήσεις } \Pi_1) + & \text{(Μοναδιαίο κέρδος } \Pi_2) * (\text{Πωλήσεις } & & \\ \Pi_2) & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & x_1 & 8 & x_2 \end{array}$$

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση είναι

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

Το **μοναδιαίο κέρδος** κάθε προϊόντος ονομάζεται συνήθως **αντικειμενικός συντελεστής** (*objective function coefficient*) και εκφράζει την **συνεισφορά** κάθε προϊόντος στο συνολικό κέρδος της επιχείρησης

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Οι περιορισμοί εκφράζουν όλες εκείνες τις καταστάσεις οι οποίες μπορεί να επηρεάσουν την επίτευξη των στόχων που έχουν τεθεί.

Οι περιορισμοί στο παράδειγμά μας είναι τρεις και αφορούν αποκλειστικά τη διαθεσιμότητα των τριών πόρων.

➔ Ο περιορισμός για τη διαθεσιμότητα της εξειδικευμένης εργασίας

Ημερήσια απαιτούμενη εργασία \leq Ημερήσια διαθέσιμη εργασία

$$\begin{array}{l} \text{(Απαιτούμενη εργασία ανά μονάδα } \Pi_1) * (\text{Ημερήσια παραγόμενη ποσότητα } \Pi_1) + \\ 2 * x_1 \\ \text{(Απαιτούμενη εργασία για κάθε μονάδα } \Pi_2) * (\text{Ημερήσια παραγόμενη ποσότητα } \Pi_2) \\ \leq \\ 4 * x_2 \end{array}$$

Ημερήσια διαθέσιμη εργασία **1600**

Άρα ο περιορισμός αυτός είναι:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ 2

➔ Ο περιορισμός για το υλικό Y1

$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$

➔ Ο περιορισμός για το υλικό Y2

$$x_2 \leq 350$$

Παρατηρήσεις

1. Οι παραπάνω περιορισμοί ονομάζονται περιορισμοί δομής (structural constraints)
2. Οι ποσότητες στο δεξιό μέλος κάθε ανίσωσης ονομάζονται σταθερές του δεξιού μέλους (right hand side constants).
3. Οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης ονομάζονται και τεχνολογικοί συντελεστές (technological coefficients) καθώς εκφράζουν την ποσότητα που απαιτείται από κάθε πόρο για την παραγωγή μιας μονάδας του συγκεκριμένου προϊόντος.

➔ Οι μεταβλητές απόφασης δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, άρα θα πρέπει να προστεθεί ο αντίστοιχος περιορισμός μη αρνητικότητας (non-negativity constraint)

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ Π.Γ.Π.

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$

$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μία βιομηχανική μονάδα παράγει δύο προϊόντα Π1 και Π2. Για την παραγωγή τους απαιτείται η εργασία εξειδικευμένων τεχνιτών και δύο υλικά Υ1 Υ2 και Υ3.

Συγκεκριμένα για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος

Π₁ απαιτούνται 30 μονάδες του υλικού Υ₁ και 5 μονάδες του υλικού Υ₂.

Π₂ απαιτούνται 20 μονάδες του υλικού Υ₁, 25 μονάδες του υλικού Υ₂ και 10 μονάδες του υλικού Υ₃.

Εξαιτίας κάποιων εσφαλμένων χειρισμών στην πολιτική προμηθειών της βιομηχανικής μονάδας έχουν συσσωρευτεί στις αποθήκες της μεγάλα αποθέματα των τριών αυτών υλικών. Προκειμένου όμως να απελευθερωθεί άμεσα κάποιος αποθεματικός χώρος για μια νέα παρτίδα άλλων υλικών της εταιρείας που θα παραληφθεί σύντομα η εταιρεία αποφάσισε να χρησιμοποιήσει κάποιες ποσότητες από τα υλικά Υ₁, Υ₂ και Υ₃ για την άμεση παραγωγή προϊόντων Π₁ και Π₂.

Οι ελάχιστες ποσότητες που πρέπει να χρησιμοποιηθούν από κάθε υλικό Υ₁, Υ₂ και Υ₃ είναι 1500, 900 και 200 μονάδες αντίστοιχα.

Τα προϊόντα Π₁ και Π₂ που θα παραχθούν δεν μπορούν να προωθηθούν στην αγορά πριν από ένα μήνα και για το διάστημα αυτό θα πρέπει να παραμείνουν στους αποθηκευτικούς χώρους που θα νοικιάσει η εταιρεία.

Το μηνιαίο κόστος αποθήκευσης για κάθε μονάδα προϊόντος Π₁ και Π₂ είναι 150 και 250 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα.

Με βάση τα στοιχεία αυτά να προσδιοριστεί το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής της βιομηχανικής μονάδας το οποίο θα ελαχιστοποιεί το κόστος αποθήκευσης των προϊόντων Π₁ και Π₂ που θα παραχθούν

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Τα παραπάνω στοιχεία δίνονται στον πίνακα

Πόρος	Απαιτούμενη ποσότητα πόρου ανά μονάδα προϊόντος		Ελάχιστη ποσότητα πόρου που πρέπει να χρησιμοποιηθεί
	Προϊόν Π1	Προϊόν Π2	
Υλικό Υ1 (μονάδες υλικού)	30	20	1500
Υλικό Υ2 (μονάδες υλικού)	5	25	900
Υλικό Υ3 (μονάδες υλικού)	-	10	200
Κόστος αποθήκευσης/μονάδα προϊόντος (χρηματικές μονάδες)	150	250	

Καταρχήν θα πρέπει να προσδιοριστούν τα βασικά στοιχεία του:

- ✓ οι μεταβλητές απόφασης
- ✓ οι παράμετροι
- ✓ η αντικειμενική συνάρτηση και
- ✓ οι περιορισμοί.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

- **Μεταβλητές απόφασης** είναι οι ημερήσιες ποσότητες παραγωγής από κάθε προϊόν εκφρασμένες σε μονάδες προϊόντος.
 - x_1 : Ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος Π_1 που θα παραχθούν / αποθηκευτούν
 - x_2 : Ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος Π_2 που παραχθούν / αποθηκευτούν
- Οι **παράμετροι** είναι:
 - οι ελάχιστες ποσότητες πόρων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν
 - οι απαιτούμενες ποσότητες πόρων ανά μονάδα προϊόντος για κάθε προϊόν και
 - το μηνιαίο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος για κάθε προϊόν



ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Η **αντικειμενική συνάρτηση** εκφράζει την ελαχιστοποίηση του συνολικού μηνιαίου κόστους αποθήκευσης

Συνολικό μηνιαίο κόστος αποθήκευσης (Z)

Μηνιαίο κόστος αποθήκευσης Π_1 + Μηνιαίο κόστος αποθήκευσης Π_2 =
 (Μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης Π_1) * (Ποσότητα παραγωγής Π_1) +

↓
150

↓
 x_1

(Μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης Π_2) * (Ποσότητα παραγωγής Π_2)

↓
250

↓
 x_2

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση είναι

$$Z = 150x_1 + 250x_2$$



ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Οι περιορισμοί αφορούν τις ελάχιστες απαιτήσεις της εταιρείας για την κατανάλωση των αντίστοιχων πόρων.

Οι περιορισμοί στο παράδειγμά μας είναι τρεις και αφορούν αποκλειστικά τη διαθεσιμότητα των τριών πόρων.

➔ Ο περιορισμός για την κατανάλωση του πόρου Υ1

Συνολική κατανάλωση πόρου Υ1 Ελάχιστη απαιτούμενη κατανάλωση πόρου Υ1

Κατανάλωση πόρου ανά μονάδα Π1) * (Συνολική ποσότητα παραγωγής Π1)
+

30 * x_1
(Κατανάλωση πόρου ανά μονάδα Π2) * (Συνολική ποσότητα παραγωγής)
 20 * x_2

Ελάχιστη απαιτούμενη κατανάλωση πόρου Υ1 **150**

Άρα ο περιορισμός αυτός είναι:

$$30x_1 + 20x_2 \geq 150$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ 2

➔ Ο περιορισμός για το υλικό Υ2

$$5x_1 + 25x_2 \geq 900$$

➔ Ο περιορισμός για το υλικό Υ3

$$10x_2 \geq 200$$

➔ Οι μεταβλητές απόφασης δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, άρα θα πρέπει να προστεθεί ο αντίστοιχος περιορισμός μη αρνητικότητας (non-negativity constraint)

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ Π.Γ.Π.

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 150x_1 + 250x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$30x_1 + 20x_2 \geq 150$$

$$5x_1 + 25x_2 \geq 900$$

$$10x_2 \geq 200$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

