Επιχειρησιακή Έρευνα

Επίλυση π.γ.π. με τη μέθοδο SIMPLEX

Εργαστήριο Ποσοτικών Μεθόδων
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Περιεχόμενα

Μέθοδος SIMLEX

- Κανονική & Τυπική Μορφή Προβλήματος
- Πρόβλημα Μεγιστοποίησης
- Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης
- Ειδικές Περιπτώσεις
- Ανάλυση Ευαισθησίας

Μορφές Προβλήματος

- Υπάρχουν τρεις μορφές του μοντέλου ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και συγκεκριμένα η γενική μορφή (general form), η κανονική μορφή (canonical form) και η τυπική μορφή (standard form).
- Ένα πρόβλημα ***γραμμικού προγραμματισμού*** μπορεί να εμφανιστεί με μια ποικιλία διαφορετικών μορφών ως προς
  - Το **είδος της αντικειμενικής** συνάρτησης (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση)
  - Τον **τύπο των περιορισμών** δομής
  - Το πεδίο ορισμού των **μεταβλητών αποφάσεων** (μη αρνητικές μεταβλητές, μεταβλητές χωρίς περιορισμό στο πρόσημο, άνω-κάτω φραγμένες μεταβλητές)

3

Γενική Μορφή π.γ.π.

Μεγιστοποίηση/ Ελαχιστοποίηση της

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots c_n x_n$$

με περιορισμούς δομής

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=, \ge) b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=, \ge) b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (=, \ge) b_m$$

$$x_j \in \Re,\ j := 1, \ldots, n$$

4

Κανονική Μορφή π.γ.π. [1]

- **Ορισμός**: Ένα π.γ.π. είναι σε κανονική μορφή αν
  - είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης (ελαχιστοποίησης)
  - όλοι οι περιορισμοί είναι ανισώσεις με φορά ≤ (≥)
  - όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές

Μεγιστοποίηση της

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

με περιορισμούς δομής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$$

Ελαχιστοποίηση της

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

με περιορισμούς δομής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\ge b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\ge b_m \end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$$

Βασικοί Μετασχηματισμοί για την μετατροπή ενός π.γ.π από τη Γενική στην Κανονική Μορφή [1]

- *Αλλαγή φοράς των περιορισμών*

  Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιοι περιορισμοί ενός προβλήματος έχουν φορά αντίθετη από αυτή που απαιτείται, δηλαδή είναι τύπου ≥ στην περίπτωση της μεγιστοποίησης και τύπου ≤ στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης. Οι περιορισμοί αυτοί πολλαπλασιάζονται επί (-1), οπότε η φορά τους αντιστρέφεται

- *Μετατροπή περιορισμών ισότητας σε περιορισμούς ανισότητας*

  Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιοι περιορισμοί ενός προβλήματος είναι εξισώσεις και όχι ανισότητες, όπως απαιτείται. Κάθε περιορισμός ισότητας

  $$a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \dots + a_{tn}x_n = b_t$$

  αντικαθίσταται από δύο περιορισμούς ανισότητας, τύπου αντίστοιχα, οι οποίοι ισχύουν ταυτόχρονα ≤ και ≥

  $$a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \dots + a_{tn}x_n \le b_t$$
  $$a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \dots + a_{tn}x_n \ge b_t$$

  Προφανώς, το σύστημα των δύο αυτών ανισώσεων είναι ισοδύναμο με την αρχική εξίσωση

Βασικοί Μετασχηματισμοί για την μετατροπή ενός π.γ.π από τη Γενική στην Κανονική Μορφή [2]

•*Μετατροπή αρνητικών μεταβλητών απόφασης σε μη αρνητικές*

Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιες μεταβλητές είναι αρνητικές, σε αντίθεση με αυτό που απαιτείται. Κάθε αρνητική μεταβλητή, $x_j \leq 0$, αντικαθίσταται από μια νέα $x_j' = -x_j$, η οποία είναι μη αρνητική ($x_j' \geq 0$).

•*Μετατροπή μεταβλητών απόφασης χωρίς περιορισμό ως προς το πρόσημο σε μη αρνητικές*

Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιες μεταβλητές απόφασης σε αντίθεση με αυτό που απαιτείται, λαμβάνουν τιμές σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Κάθε τέτοια μεταβλητή (χωρίς περιορισμό ως προς το πρόσημο) $x_j \in R$ δηλαδή $x_j \in (-\infty, +\infty)$ αντικαθίσταται από τη διαφορά δύο άλλων x_j' και x_j'', οι οποίες είναι μη αρνητικές. Με άλλα λόγια, $x_j = x_j' - x_j''$ όπου $x_j' \geq 0$ και $x_j'' \geq 0$

Βασικοί Μετασχηματισμοί για την μετατροπή ενός π.γ.π από τη Γενική στην Κανονική Μορφή [3]

- *Μετατροπή φραγμένων μεταβλητών απόφασης σε μη αρνητικές*

Σε ορισμένες περιπτώσεις, κάποιες μεταβλητές απόφασης, σε αντίθεση με αυτό που απαιτείται, είναι φραγμένες. Έστω x_j μια άνω και κάτω φραγμένη μεταβλητή, για την οποία ισχύει: $l_j \leq x_j \leq u_j$. Παρατηρώντας ότι $0 \leq x_j - l_j \leq u_j - l_j$, η μεταβλητή x_j αντικαθίσταται από μια νέα, $x_j' = x_j - l_j$, για την οποία ισχύει: $x_j' \geq 0$, δηλαδή είναι μη αρνητική, και $x_j' \leq u_j - l_j$.

Τυπική Μορφή σε πρόβλημα max

- Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n + 0s_1 + 0s_2 + ... + 0s_n$$

με περιορισμούς δομής

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n + 1s_1 + 0s_2 + ... + 0s_m = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n + 0s_1 + 1s_2 + ... + 0s_m = b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n + 0s_1 + 0s_2 + ... + 1s_m = b_m$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, ..., s_m \geq 0$$

9

Τυπική Μορφή σε πρόβλημα min

- Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n + 0e_1 + 0e_2 + ... + 0e_n$$

με περιορισμούς δομής

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n - 1e_1 + 0e_2 + ... + 0e_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n + 0e_1 - 1e_2 + ... + 0e_m = b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{mn} x_n + 0e_1 + 0e_2 + ... - 1e_m = b_m$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 .... e_m \geq 0$$

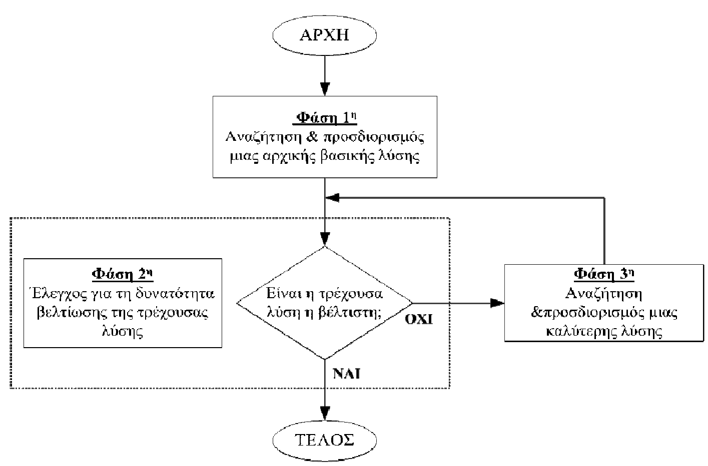
10

Αρχικός Πίνακας Simplex

Αρχικός Πίνακας Simplex

Βάση		Μεταβλητές									
		c_1	c_2		c_n	0	0		0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	…	x_n	s_1	s_2	…	s_m	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
0	s_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0		0	b_1	
0	s_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1		0	b_2	
0	…										
0	s_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0		1	b_m	
z_j										Z	
$c_j - z_j$											

Μέθοδος Simplex- Φάσεις



Πρόβλημα Μεγιστοποίησης

n μεταβλητές απόφασης **m χαλαρές μεταβλητές**

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0s_1 + 0s_2 + \ldots + 0s_m$$

με περιορισμούς δομής

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + 1s_1 + 0s_2 + \ldots + 0s_m = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + 0s_1 + 0s_2 + \ldots + 0s_m = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + 0s_1 + 1s_2 + \ldots + 1s_m = b_m$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \ldots, s_m \geq 0$$

Μοναδιαίος Πίνακας
Σχηματίζεται από τις χαλαρές μεταβλητές

Πως ξεκινάμε?

Η φάση αυτή περιλαμβάνει τα παρακάτω τρία βήματα:

- Εντοπισμός των μεταβλητών που θα περιλαμβάνονται στην αρχική λύση.
- Δημιουργία του αρχικού Πίνακα Simplex.
- Προσδιορισμός της αρχικής λύσης.

Πως εντοπίζω την αρχική λύση??

Στο σύστημα των περιορισμών κάθε χαλαρή μεταβλητή εμφανίζεται σε μια μόνο εξίσωση με συντελεστή μονάδα.

Πρακτικά σημαίνει ότι μηδενίζοντας όλες τις μεταβλητές απόφασης καθορίζονται αυτόματα οι τιμές των χαλαρών μεταβλητών (κάθε μία από αυτές παίρνει την τιμή του δεύτερου μέλους της εξίσωσης στην οποία βρίσκεται).

ΑΡΑ οι μεταβλητές που αποτελούν την αρχική λύση είναι οι χαλαρές μεταβλητές.

Πως φτιάχνω τον Αρχικό Πίνακα Simplex??

(Initial Simplex Tableau)

Βάση		Μεταβλητές									
		c_1	c_2		c_n	0	0		0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	...	x_n	s_1	s_2	...	s_m	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
0	s_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0		0	b_1	
0	s_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1		0	b_2	
0	...										
0	s_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0		1	b_m	
z_j										Z	
$c_j - z_j$											

Η αρχική λύση από τις χαλαρές μεταβλητές

Ο μοναδιαίος πίνακας από τις χαλαρές μεταβλητές

$$Z = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + ... + c_n \cdot 0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + ... + 0 \cdot b_n \rightarrow Z = 0$$

Βελτιώνεται η τρέχουσα λύση ???

Υπάρχει **έστω και μία** *μη βασική* μεταβλητή, η είσοδος της οποίας στο σύνολο των βασικών μεταβλητών, με ταυτόχρονη **έξοδο** από αυτό μιας ήδη βασικής μεταβλητής, θα βελτιώσει τη λύση που έχει προσδιορισθεί???????????

Η είσοδος μιας νέας μεταβλητής στο σύνολο των βασικών θα **επηρεάσει την τιμή** της αντικειμενικής συνάρτησης

Τι σημαίνει η είσοδος μιας νέας μεταβλητής??

1. Η **θετική επίδραση** από την είσοδο μιας νέας μεταβλητής οφείλεται στα έσοδα που θα προέλθουν από την πώληση των μονάδων της μεταβλητής αυτής που θα παραχθούν.
2. Η **αρνητική επίδραση** από την είσοδο μιας νέας μεταβλητής οφείλεται στη χρήση πόρων για την παραγωγή μονάδων της νέας μεταβλητής, οι οποίοι δεν θα είναι πλέον διαθέσιμοι για την παραγωγή μονάδων των ήδη βασικών μεταβλητών, με αποτέλεσμα να μειωθεί η συνολική παραγωγή τους και αντίστοιχα τα έσοδα από την πώλησή τους.
3. Η **καθαρή συνεισφορά** από την είσοδο μιας νέας μεταβλητής θα είναι η διαφορά της αρνητικής από τη θετική επίδραση της, στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης

Πως υπολογίζουμε τις επιδράσεις??

1. **Θετική επίδραση:**
   Η παραγωγή **μιας μονάδας** από τη νέα μεταβλητή θα αποφέρει έσοδα ίσα με **τον αντικειμενικό συντελεστή** της.

2. **Αρνητική επίδραση:**
   Η παραγωγή μιας μονάδας από τη νέα μεταβλητή θα μειώσει
   Α. *Κάθε διαθέσιμο πόρο* για την παραγωγή των ήδη παραγόμενων προϊόντων και συνεπώς **τον όγκο παραγωγής** τους, κατά την ποσότητα του πόρου που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας του νέου προϊόντος, δηλαδή κατά **την τιμή του τεχνολογικού συντελεστή** της νέας μεταβλητής στον αντίστοιχο περιορισμό.
   Β. Τα *έσοδα* από τη διάθεση των ήδη παραγόμενων προϊόντων κατά το **γινόμενο της μείωσης του όγκου παραγωγής** τους επί την αντίστοιχή τιμή πώλησης τους, δηλαδή την **τιμή του αντικειμενικού συντελεστή τους**

Πως υπολογίζουμε τις επιδράσεις??

3. Η **καθαρή συνεισφορά**
   Για τον υπολογισμό της καθαρής συνεισφοράς μιας νέας μεταβλητής, αφαιρούμε την αρνητική επίδραση της στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης από την αντίστοιχη θετική.

Τι θα γίνει αν στην αρχική λύση εισέλθει η x_1??

ΑΠΛΑ

1. Η θετική επίδραση από την είσοδο της στη βάση, θα είναι η αύξηση των συνολικών εσόδων της επιχείρησης κατά τον αντικειμενικό συντελεστή της
2. Η αρνητική επίδραση από την είσοδο της στη βάση, θα είναι η μείωση του όγκου παραγωγής κάθε μίας από τις ήδη υπάρχουσες βασικές μεταβλητές και η συνεπακόλουθη μείωση των εσόδων από την πώληση τους

Υπάρχουσες βασικές μεταβλητές	Μείωση όγκου παραγωγής βασικών μεταβλητών	Μείωση εσόδων πώλησης βασικών μεταβλητών
s_1	a_{11}	$0 \cdot a_{11} = 0$
s_2	a_{21}	$0 \cdot a_{21} = 0$
...	...	...
s_m	a_{m1}	$0 \cdot a_{m1} = 0$
Σύνολο		$z_1 = 0$

Συντελεστές Ανταλλαγής

Η μείωση του όγκου παραγωγής των βασικών μεταβλητών εκφράζει την **ανταλλαγή** (*exchange*) ή **υποκατάσταση** (*substitution*) που πρέπει να γίνει στη χρήση πόρων, μεταξύ αυτών και της εισερχόμενης στη βάση μη βασικής μεταβλητής, η οποία θα απορροφήσει κάποιους από τους υπάρχοντες πόρους για την παραγωγή της.

Για το λόγο αυτό οι τεχνολογικοί συντελεστές εκφράζουν τη μείωση του όγκου παραγωγής των βασικών μεταβλητών, ονομάζονται και **συντελεστές ανταλλαγής ή υποκατάστασης** (*exchange / substitution coefficients*).

Διαφορική απόδοση

Η **καθαρή συνεισφορά**, από την είσοδο της μεταβλητής στη βάση, είναι και εκφράζει τη *καθαρή αύξηση ή μείωση* που θα επιφέρει στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή στα κέρδη της επιχείρησης, η είσοδος της μεταβλητής στο σύνολο των βασικών μεταβλητών και η παραγωγή μιας μονάδας της. Η καθαρή συνεισφορά ονομάζεται και **διαφορική απόδοση** της μεταβλητής .

Η διαδικασία υπολογισμού των διαφορικών αποδόσεων των μη βασικών μεταβλητών γίνεται μέσω του τύπου

$$\delta_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{\substack{i=1 \\ j^*=m+1\ldots n}}^{m} a_{ij} c_{j^*}$$

όπου

$a_{ij},\ i=1\ldots m,\ j=1\ldots n$ οι τεχνολογικοί συντελεστές

$c_j,\ j=1\ldots m$ οι αντικειμενικοί συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών

$c_{j^*},\ j=m+1\ldots n$ οι αντικειμενικοί συντελεστές των βασικών μεταβλητών

…Back to Simplex tableau

Ο μοναδιαίος πίνακας από τις χαλαρές μεταβλητές

Βάση		Μεταβλητές									
		c_1	c_2		c_n	0	0		0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	…	x_n	s_1	s_2	…	s_m	Δεξιό Μέ	Πηλ
0	s_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0		0	b_1	
0	s_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1		0	b_2	
0	…										
0	s_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0		1	b_m	
z_j										Z	
$c_j - z_j$											

Η αρχική λύση από τις χαλαρές μεταβλητές

Οι διαφορικές αποδόσεις ως κριτήριο αριστότητας

$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \ldots + 0 \cdot b_n \to Z = 0$

Κριτήριο Βελτιστοποίησης

Κριτήριο βελτιστοποίησης (*optimality criterion*) **ή συνθήκη αριστότητας** (*optimality condition*) ή **κριτήριο τερματισμού** (*termination criterion*)

1. Αν όλες οι μη βασικές μεταβλητές εμφανίζουν $\delta_j < 0$, τότε η λύση είναι ΒΕΛΤΙΣΤΗ
2. Αν όλες οι μη βασικές μεταβλητές εμφανίζουν $\delta_j \leq 0$ και τουλάχιστον μια $\delta_j = 0$ τότε ο λύτης αποφαζίζει
   - να μην εισαχθεί μεταβλητή με $\delta_j = 0$ και η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη
   - να εισαχθεί και η διερεύνηση θα πρέπει να συνεχιστεί με την είσοδο στη βάση μιας νέας μεταβλητής . Η μεταβλητή που θα εισέλθει στη βάση είναι αυτή που έχει $\delta_j = 0$ αν υπάρχει μόνο μία, ή μία αυθαίρετα επιλεγμένη μεταξύ αυτών που έχουν $\delta_j = 0$
3. Αν τουλάχιστον μία από τις μη βασικές μεταβλητέςεμφανίζει $\delta_j > 0$τότε η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη

   Ως **εισερχόμενη μεταβλητή** (entering variable) θα επιλεγεί αυτή που έχει $\delta_j > 0$αν υπάρχει μόνο μία, ή αυτή με το μεγαλύτερο δ_j

Επιπλέον, στην περίπτωση που η μέγιστη τιμή αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία μεταβλητές, δηλαδή έχουμε ισοβαθμία εισερχόμενης μεταβλητής τότε επιλέγεται μία από αυτές **αυθαίρετα**.
Η μέθοδος Simplex βέβαια θα συγκλίνει στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα

Υπάρχει καλλίτερη λύση?

- *Βήμα 1ο: Εντοπισμός της εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής.*
  - Επειδή **δκ>δλ** η μεταβλητή **xκ** θα είναι η νέα εισερχόμενη μη βασική μεταβλητή καθώς η είσοδος της στη βάση
  - Η στήλη της στον Πίνακα Simplex ονομάζεται **αξονική στήλη** ή **στήλη οδηγός**
- *Βήμα 2ο : Εντοπισμός της εξερχόμενης βασικής μεταβλητής.*
  - Κριτήριο για την επιλογή, μεταξύ αυτών, της εξερχόμενης μεταβλητής, αποτελούν οι τιμές στη στήλη «Πηλίκο» όπου τοποθετούνται οι λόγοι b_i/a_{1i} δηλαδή οι λόγοι των τιμών των πόρων ή των δεξιών μελών των περιορισμών προς τους αντίστοιχους τεχνολογικούς συντελεστές

    Κριτήριο εφικτότητας (*feasibility criterion*) ή κανόνας ελάχιστου πηλίκου (*minimum ratio rule*) ως εξερχόμενη βασική μεταβλητή επιλέγεται αυτή που αντιστοιχεί στον μικρότερο θετικό λόγο.

    Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι, αν σε κάποιον από τους λόγους b_i/a_{1i}, $i = 1,\ldots,n$, το $b_i = 0$, θέτουμε $b_i = 0 + \varepsilon$, όπου ε ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός, ώστε να μπορούν να γίνουν οι πράξεις. Επίσης, αν $a_{1i} = 0$, το πηλίκο b_i/a_{1i} δεν ορίζεται. Ακόμη, αν $a_{1i} < 0$, το πηλίκο είναι αρνητικό και δεν έχει νόημα ο υπολογισμός του. Τέλος, σημειώνεται αν στην τελική λύση του προβλήματος ο αριθμός ε παραμένει στην αντικειμενική συνάρτηση τον θέτουμε ίσο με μηδέν ($\varepsilon = 0$).

  Σε Ισοβαθμία εξερχόμενης μεταβλητής (*leaving variable tie*) επιλέγεται και πάλι αυθαίρετα μία από τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στο ελάχιστο πηλίκο ως εξερχόμενη.

…Back to Simplex tableau

Η ποσότητα της μεταβλητής που θα μπορούσε να παραχθεί, αν το σύνολο του αντίστοιχου πόρου χρησιμοποιούνταν για το σκοπό αυτό

Βάση		Μεταβλητές									
		c_1	c_2		c_n	0	0		0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	…	x_n	s_1	s_2	…	s_m	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
0	s_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0		0	b_1	
	s_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1		0	b_2	
	…										
0	s_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0				b_m	
z_j										Z	
$c_j - z_j$											

Η αρχική λύση από τις χαλαρές μεταβλητές

Ο μοναδιαίος πίνακας από τις χαλαρές μεταβλητές

Οι διαφορικές αποδόσεις ως κριτήριο αριστότητας

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \ldots + 0 \cdot b_n \rightarrow Z = 0$$

Σειρά νέου Πίνακα Simplex = Σειρά προηγούμενου Πίνακα Simplex - (Συντελεστής, στη σειρά του προηγούμενου πίνακα της εισερχόμενης στο νέο πίνακα μεταβλητής) × (Σειρά του νέου πίνακα που βρίσκεται στη θέση της αξονικής σειράς του προηγούμενου πινάκα)

- *Βήμα 3ο: Δημιουργία του νέου Πίνακα Simplex.*

Βάση		Μεταβλητές									
		c_1	c_2		c_n	0	0		0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	…	x_n	s_1	s_2	…	s_m	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
c_1	x_1	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$		$\frac{a_{1n}}{a_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	0		0	$\frac{b_1}{a_{11}}$	
0	s_2	0	$a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}$		$a_2 - \frac{a_{2n}a_{1n}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{21}}{a_{11}}$	1		0	$b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_1}$	
	…										
0	s_m	0	$a_{m2} - \frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}$		$a_{mn} - \frac{a_{mn}a_{1n}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{21}}{a_{11}}$	1		0	$b_m - \frac{a_{m1}b_1}{a_{11}}$	
z_j										Z	
$c_j - z_j$											

Η sm σειρα γίνεται

$$(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, 0, 1, \ldots, 0, b_m) - a_{m1}(1, a_{12}/a_{11}, a_{1n}/a_{11}, \ldots, 1/a_{11}, 0, \ldots 0, b_1/a_{11}) =$$

Προσδιορισμός της νέας λύσης

- Οι τιμές των βασικών μεταβλητών οι οποίες σημειώνονται στην πρώτη στήλη του Πίνακα με την ένδειξη «Βάση» ισούνται με τις αντίστοιχες τιμές που εμφανίζονται στην προτελευταία στήλη του με τη ένδειξη «Δεξιά μέλη».

$$Z = c_1 \frac{b_1}{a_{11}} + c_2 \cdot 0 + ... + c_n \cdot 0 + 0 \cdot \left(b_2 - \frac{a_{21} b_1}{a_1} \right) + \ldots + 0 \cdot (b_m - \frac{a_{m1} b_1}{a_{11}}) \rightarrow Z = c_1 \left(\frac{b_1}{a_{11}} \right)$$

Μέθοδος Simplex / Μεγιστοποίηση

- **Αρχική Βασική Εφικτή Λύση: Θέτουμε όλες τις n μεταβλητές ίσες με μηδέν και βρίσκουμε τις τιμές για τις χαλαρές**

Maximization of

$Z = 3x_1 + 8x_2$

Subject to

$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$

$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$

$x_2 \leq 350$

and

$x_1, x_2 \geq 0$

Τυπική Μορφή Προβλήματος

Maximization of

$Z = 3x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Subject to

$2x_1 + 4x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 1600$

$6x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 1800$

$x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 350$

and

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Μέθοδος Simplex : 1st tableau

Μη βασικές μεταβλητές: (x_1=0,x_2=0)

Βασικές Μεταβλητές(s_1=1600,s_2=1800,s_3=350)

Αντικειμενική Συνάρτηση Z=0

Οι παραπάνω πληροφορίες για το ποιες ειναι οι βασικές μεταβλητές φαίνονται στην **Βασική** στήλη ενώ οι τιμές τους φαίνονται στην στήλη **Δεξιο Μέλος**

Βάση		Μεταβλητές						
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Μεταβλητές	3	8	0	0	0	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	2	4	1	0	0	1600	
0	s_2	6	2	0	1	0	1800	
0	s_3	0	1	0	0	1	350	
							Z=	

Μέθοδος Simplex : 1st tableau

Αυτή η λύση ειναι βέλτιστη?

Η αντικειμενική συνάρτηση $Z=3x_1+8x_2$ ςείναι μηδέν, άρα η λύση μπορεί να βελτιωθεί αυξάνοντας τις μονάδες παραγωγής x_1 ή x_2.

Το ελάχιστο μη αρνητικό πηλίκο, μας υποδεικνύει την τρεχουσα βασική μεταβλητή s_3 ως εξερχόμενη μεταβλητή της οποίας τη θέση θα πάρει η μεταβλητή x_2

Βάση		Μεταβλητές						
Αντικειμενικόι Συντελστές	Μεταβλητές	3	8	0	0	0	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	2	4	1	0	0	1600	1600/4=400
0	s_2	6	2	0	1	0	1800	1800/2=900
0	s_3	0	1	0	0	1	350	350/1=350
z_j		0	0	0	0	0	Z=0	
c_j-z_j		3	8	0	0	0		

(minimum)

Εισερχόμενη μεταβλητή είναι αυτή με τη μεγαλύτερη διαφορική απόδοση

Εξερχόμενη μεταβλητή: υπολογίζοντας τα μη αρνητικά πηλίκα από τα στοιχεία της στήλης Δεξιό Μέλος με τους αντίστοιχους συντελεστές από τους περιορισμούς που αντιστοιχούν στην στήλη της εισερχόμενης x2, προσδιορίζουμε το μικρότερο πηλίκο, το οποίο υποδυκνείει και την εξερχόμενη μεταβλητή .

Μέθοδος Simplex 2ο Βήμα

- Νεες μη βασικές Μεταβλητές: (x_1,s_3)
- Βασικές Μεταβλητές (s_1,s_2,x_2)

- Η στήλη που αντιστοιχεί στην εισερχόμενη μεταβλητή ονομάζεται αξονική στήλη, ενώ η γραμμή που αντοστοιχεί στην εισερχόμενη μεταβλητή αξονική γραμμή. Η τομή της αξονικήσ στήλης και της αξονικής γραμμής δίνουν το αξονικό στοιχείο

(αξονική στήλη)

Αξονικό στοιχείο

Βάση		Μεταβλητές						
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Μεταβλητές	3	8	0	0	0	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	2	4	1	0	0	1600	1600/4=400
0	s_2	6	2	0	1	0	1800	1800/2=900
0	s_3	0	1	0	0	1	350	350/1=350
z_j		0	0	0	0	0	$Z=0$	
c_j-z_j		3	8	0	0	0		

(αξονική γραμμή)

Μέθοδος Simplex 2ο Βήμα

Νεα Βασική Λύση

1. **Αξονική γραμμή**
   a) Αντικαθιστούμε στη βάση την εξερχόμενη μεταβλητή με την εισερχόμενη
   b) **Νεα αξονική Γραμμή=**
      Τρέχουσα αξονική γραμμή/αξονικό στοιχείο
2. Όλες οι υπόλοιπες γραμμές
   Νέα γραμμή= (Τρέχουσα Γραμμή)-Αντίστοιχος συντελεστής περιορισμών της αξονικής στήλης)x(νέα αξονική γραμμή)

(αξονική στήλη)

Αξονικό στοιχείο

Βάση		Μεταβλητές						
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Μεταβλητές	3	8	0	0	0	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	2	4	1	0	0	1600	1600/4=400
0	s_2	6	2	0	1	0	1800	1800/2=900
0	s_3	0	1	0	0	1	350	350/1=350
z_j		0	0	0	0	0	$Z=0$	
c_j-z_j		3	8	0	0	0		

(αξονική γραμμή)

Μέθοδος Simplex Method: 2nd tableau

- Αντικαθιστώ την s_3 στη Βάση με τη x_2
  - Νέα αξονική γραμμή x_2=Τρέχουσα γραμμή της s_3/1 $\left(\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{350}{1}\right)=(0,1,0,0,1,350)$
- Νέα γραμμή s_1=Τρέχουσα γραμμή s_1- (4) x νέα αξονική γραμμή x2

$$(2,4,1,0,0,1600)-4(0,1,0,0,1,350)=(2,4,1,0,0,1600)-(0,4,0,0,4,1400)=$$
$$(2-0,4-4,1-0,0-0,0-4,1600-1400)=(2,0,1,0,-4,200)$$

- Νέα γραμμή s_2=Τρέχουσα Γραμμή s_2-(2) x νέα αξονική γραμμή x2

$$(6,2,0,1,0,1800)-2(0,1,0,0,1,350)=(6,2,0,1,0,1800)-(0,2,0,0,2,700)=$$
$$(6-0,2-2,0-0,1-0,0-2,1800-700)=(6,0,0,1,-2,1100)$$

- Διαφορική απόδοση

$\delta_1=c_1-z_1$ =3-(2*0+6*0+0*8)=3
$\delta_2=c_2-z_2$ =8-(0*0+0*0+1*8)=0
$\delta_3=c_3-z_3$ =0-(1*0+0*0+0*8)=0
$\delta_4=c_4-z_4$ =0-(0*0+1*0+0*8)=0
$\delta_5=c_5-z_5$ =0-(-4*0-2*0+1*8)=-8

Βάση		Μεταβλητές						
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Μεταβλητές	3	8	0	0	0	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	2	0	1	0	-4	200	=200/2=100
0	s_2	6	0	0	1	-2	1100	1100/6
8	x_2	0	1	0	0	1	350	IGNORE
z_j		0	8	0	0	8	Z=3*0+8*350=2800	
c_j-z_j		3	0	0	0	-8		

Μέθοδος Simplex : 3rd tableau

Σύνθηκη Αριστότητας: Όλες οι διαφορετικές αποδόσεις των μεταβλητών ειναι <=0.

- Αντικαθιστώ την s_1 στη Βάση με τη x_1 $\left(\frac{2}{2},\frac{0}{2},\frac{1}{2},\frac{0}{2},-\frac{4}{2},\frac{200}{2}\right)=\left(1,0,\frac{1}{2},0,-2,100\right)$
  Νέα αξονική γραμμή x_1=Τρέχουσα γραμμή s_1 /2
- Νέα γραμμή s_1=Τρέχουσα Γραμμή s_1 -(2) x νέα αξονική γραμμή x_1
- Νέα γραμμή s_3=Τρέχουσα Γραμμή s_3-(0) x νέα αξονική γραμμή x_2

Βάση		Μεταβλητές						
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Μεταβλητές	3	8	0	0	0	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
3	x_1	1	0	1/2	0	-2	100	
0	s_2	0	0	-3	1	10	500	
8	x_2	0	1	0	0	1	350	
z_j		3	8	3/2	0	2	Z=3*100+8*350=3100	
c_j-z_j		0	0	-3/2	0	-2		

Οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών φαίναονται στη στήλη Δεξιό Μέλος x1=100, x2=350
Η τιμή της Z=3100

Παράδειγμα με την ε-τεχνική

Ένας τραπεζικός οργανισμός σχεδιάζει να επενδύσει έως 100 εκατ. ευρώ σε χορηγήσεις δανείων και σε αγορές ομολόγων. Η τρέχουσα απόδοση των χορηγούμενων δανείων και των υπό αγορά ομολόγων είναι 10% και 5% αντίστοιχα επί του ποσού της επένδυσης. Αντίθετα, ο πιστωτικός κίνδυνος των χορηγούμενων δανείων είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της αγοράς ομολόγων. Τέλος, με βάση ιστορικά στοιχεία που τηρούνται, η διοίκηση της τράπεζας θεωρεί ότι για να επιτευχθεί υψηλή απόδοση της επένδυσης και παράλληλα να περιοριστεί ο πιστωτικός κίνδυνος θα πρέπει το ποσό που θα επενδυθεί στην αγορά των ομολόγων να μην είναι μικρότερο του 1/3 του ποσού που θα επενδυθεί στη χορήγηση των δανείων και το σύνολο της επένδυσης σε ομόλογα να μην υπερβαίνει τα 20 εκατ. ευρώ. Με βάση τα στοιχεία αυτά, να διατυπωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο επενδυτικό σχέδιο που μεγιστοποιεί την απόδοση του τραπεζικού οργανισμού.

Παράδειγμα με την ε-τεχνική

Max $Z = 0.1x_1 + 0.05x_2$

με περιορισμούς

$$x_1 + x_2 \le 100$$
$$x_1 - 3x_2 \le 0$$
$$x_2 \le 20$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$\text{Max } Z = 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

με περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 100$$
$$x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 0$$
$$x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 20$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Παράδειγμα με την ε-τεχνική

Βάση		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	0.1	0.05	0	0	0	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
0	s_1	1	1	1	0	0	100	100
0	s_2	1	-3	0	1	0	$0+\varepsilon$	ε
0	s_3	0	1	0	0	1	20	-
z_j		0	0	0	0	0	$Z=0$	
$c_j - z_j$		0.1	0.05	0	0	0		
0	s_1	0	4	1	-1	0	100- ε	$25-\varepsilon/4$
0.1	x_1	1	-3	0	1	0	0+ ε	-
0	s_3	0	1	0	0	1	20	20
z_j		0,1	-0.3	0	0.1	0	$Z=0$	
$c_j - z_j$		0	0.35	0	-0.1	0		
0	s_1	0	0	1	-1	-4	20	
0.1	x_1	1	0	0	1	3	60	
0.05	x_2	0	1	0	0	1	20	
z_j		0.1	0.05	0	0.1	0.35	$Z=7$	
$c_j - z_j$		0	0	0	-0.1	-0.35		

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

Τι διαφορά υπάρχει σε σχέση με το πρόβλημα μεγιστοποίησης??

Οι δύο διαφοροποιήσεις αφορούν

1. τον εντοπισμό των μεταβλητών που αποτελούν την αρχική βασική εφικτή λύση και
2. το **κριτήριο βελτιστοποίησης (κριτήριο τερματισμού** της διαδικασίας αναζήτησης μιας καλύτερης, από την τρέχουσα, λύσης)

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

n μεταβλητές απόφασης m χαλαρές μεταβλητές

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_m$$

με περιορισμούς δομής

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - 1\,e_1 + 0\,e_2 + \dots + 0\,e_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 0\,e_1 - 1\,e_2 + \dots + 0\,e_m = b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0\,e_1 + 0\,e_2 + \dots - 1\,e_m = b_m$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \dots e_m \geq 0$$

Ο Μοναδιαίος Πίνακας
ΔΕΝ σχηματίζεται

Κάθε πλεονασματική μεταβλητή εμφανίζεται σε μία μόνο εξίσωση με συντελεστή όχι μονάδα, όπως στην περίπτωση της μεγιστοποίησης, αλλά (-1).

Πως θα εντοπίσω την αρχική λύση??

Αρχική λύση?

Μηδενίζοντας όλες οι μεταβλητές απόφασης, καθορίζονται αυτόματα οι τιμές των πλεονασματικών μεταβλητών, καθώς κάθε μια απ' αυτές παίρνει την αντίθετη τιμή του δεύτερου μέλους της εξίσωσης στην οποία βρίσκεται (έχουν συντελεστή (-1)).

Η **τιμή όμως αυτή είναι αρνητική**, γεγονός που παραβιάζει τη συνθήκη μη αρνητικότητας αλλά και δεν συνάδει με το φυσικό νόημα της μεταβλητής.

Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα των αρνητικών μεταβλητών αλλά και της έλλειψης του μοναδιαίου πίνακα και να προχωρήσουμε στην αναζήτηση της αρχικής λύσης εισάγουμε στο μοντέλο

τεχνητές μεταβλητές (*artificial variables*).

Τεχνητές Μεταβλητές

- Σε κάθε περιορισμό στον οποίο υπάρχει πλεονασματική μεταβλητή (e_i) προσθέτουμε μία τεχνητή μεταβλητή (a_i).
- Οι μεταβλητές <u>*αυτές δε συνδέονται λογικά*</u> με το πρόβλημα
- Η ύπαρξή τους μετά την επίλυση του προβλήματος στη βέλτιστη λύση, ΣΗΜΑΙΝΕΙ ότι **το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση**.
- Χρησιμοποιούνται για **τη δημιουργία** του αρχικού πίνακα **Simplex.**
- Κάθε μία από αυτές προστίθεται στην αντικειμενική συνάρτηση **πολλαπλασιασμένη** μ′ έναν **πολύ μεγάλο θετικό συντελεστή Μ**.

  Ο συντελεστής αυτός εκφράζει τη μοναδιαία συνεισφορά της στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και μπορεί να θεωρηθεί ως ποινή για την είσοδο της στη βάση.
- Είναι προφανές ότι η ύπαρξη τεχνητής μεταβλητής σ′ έναν περιορισμό που είναι ήδη σε μορφή ισότητας έχει νόημα μόνο αν η τεχνητή αυτή μεταβλητή έχει τιμή μηδέν στην βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης με Μ-μέθοδο

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n + \mathrm{M}a_1 + \mathrm{M}a_2 + \dots + \mathrm{M}a_m$$

με περιορισμούς δομής

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - 1e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_m + 1a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_2\ x_n + 0e_1 - 1e_2 + \dots + 0e_m + 0a_1 + 1a_2 + \dots + 0a_m &= b_2 \\
\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0e_1 + 0e_m + \dots - 1e_m + 0a_1 + 1a_2 + \dots + 1a_m &= b_m
\end{aligned}$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, e_1 \geq 0, \ \dots, \ e_m \geq o, \ a_1 \geq 0, \ \dots, \ a_m \geq 0$$

Αρχική Λύση: Μηδενίζοντας όλες τις μεταβλητές απόφασης και τις πλεονασματικές μεταβλητές, καθορίζονται αυτόματα οι τιμές των τεχνητών μεταβλητών καθώς κάθε μία απ′ αυτές παίρνει τη θετική τιμή του δεύτερου μέλους της εξίσωσης στην οποία βρίσκεται.
Οι μεταβλητές που αποτελούν την αρχική λύση είναι οι τεχνητές μεταβλητές $a_1, a_2, \dots, a_m$

Βελτιώνεται η τρέχουσα λύση ???

Υπάρχει **έστω και μία** *μη βασική* μεταβλητή, η είσοδος της οποίας στο σύνολο των βασικών μεταβλητών, με ταυτόχρονη **έξοδο** από αυτό μιας ήδη βασικής μεταβλητής, θα βελτιώσει τη λύση που έχει προσδιορισθεί???????????

Η **είσοδος** μιας νέας μεταβλητής στο σύνολο των βασικών θα **επηρεάσει την τιμή** της αντικειμενικής συνάρτησης τόσο θετικά (c_j) όσο και αρνητικά (z_j)

- Η καθαρή μεταβολή στη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από την είσοδο στη βάση μιας νέας μεταβλητής, ονομάζεται διαφορική απόδοση

$$\delta_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{\substack{i=1 \\ j^*=m+1\ldots n}}^{m} a_{ij} c_{j^*}$$

$a_{ij},\ i = 1\ldots m,\ j = 1\ldots n$

$c_j,\ j = 1\ldots m$

$c_{j^*},\ j = m+1\ldots n$

Κριτήριο Βελτιστοποίησης

Η λύση επιδέχεται βελτίωση όταν υπάρχουν αρνητικές διαφορικές αποδόσεις

1. Αν όλες οι μη βασικές μεταβλητές εμφανίζουν $\delta_j > 0$, τότε η λύση είναι ΒΕΛΤΙΣΤΗ
2. Αν όλες οι μη βασικές μεταβλητές εμφανίζουν $\delta_j \geq 0$ και τουλάχιστον μια $\delta_j = 0$ τότε ο λύτης αποφαζίζει

   να μην εισαχθεί μεταβλητή με $\delta_j = 0$ και η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη

   να εισαχθεί και η διερεύνηση θα πρέπει να συνεχιστεί με την είσοδο στη βάση μιας νέας μεταβλητής . Η μεταβλητή που θα εισέλθει στη βάση είναι αυτή που έχει $\delta_j = 0$ αν υπάρχει μόνο μία, ή μία αυθαίρετα επιλεγμένη μεταξύ αυτών που έχουν $\delta_j = 0$
3. Αν τουλάχιστον μία από τις μη βασικές μεταβλητέςεμφανίζει $\delta_j < 0$τότε η τρέχουσα λύση δεν είναι η βέλτιστη

   Ως **εισερχόμενη μεταβλητή** (entering variable) θα επιλεγεί αυτή που έχει $\delta_j < 0$αν υπάρχει μόνο μία, ή αυτή με το μεγαλύτερο σε απόλυτη τιμή δ_j

Επιπλέον, στην περίπτωση που η μέγιστη τιμή αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία μεταβλητές, δηλαδή έχουμε ισοβαθμία εισερχόμενης μεταβλητής τότε επιλέγεται μία από αυτές **αυθαίρετα**.

Η μέθοδος Simplex βέβαια θα συγκλίνει στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα

Μ-μέθοδος

Μ-μέθοδος

Μέθοδος του μεγάλου Μ (*big M method*) χρησιμοποιείται κάθε φορά που δεν σχηματίζεται ο μοναδιαίος πίνακας.

Εμφανίζεται σε:

προβλήματα max

1. Πρόκειται για προβλήματα εκφρασμένα στη γενική τους μορφή όπου υπάρχουν και περιορισμοί τύπου $\geq$
2. Η τεχνητή μεταβλητή αφαιρείται από την αντικειμενική συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με έναν πολύ μεγάλο θετικό συντελεστή Μ.
3. Ο συντελεστής αυτός εκφράζει τη μοναδιαία συνεισφορά της στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και μπορεί να θεωρηθεί ως ποινή για την είσοδο της στη βάση.

προβλήματα min

(ό,τι περιγράψαμε πριν)

Μέθοδος Simplex / Ελαχιστοποίηση

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Minimization of

$$Z = 150x_1 + 250x_2$$

Subject to

$$30x_1 + 20x_2 \geq 1500$$
$$5x_1 + 25x_2 \geq 900$$
$$10x_2 \geq 200$$

and

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Minimization of

$$Z = 150x_1 + 250x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Subject to

$$30x_1 + 20x_2 - e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 1500$$
$$5x_1 + 25x_2 + 0e_1 - 1e_2 + 0e_3 = 900$$
$$10x_2 + 0e_1 + 0e_2 - 1e_3 = 200$$

Απουσία μοναδιαίου

and

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Minimization of

$$Z = 150x_1 + 250x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3$$

Subject to

Μοναδιαίος Πίνακας

$$30x_1 + 20x_2 - e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 1500$$
$$5x_1 + 25x_2 + 0e_1 - 1e_2 + 0e_3 + 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 = 900$$
$$10x_2 + 0e_1 + 0e_2 - 1e_3 + 0a_1 + 0a_2 + 1a_3 = 200$$

and

$$x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

1ο tableau Simplex

Η αρχική λύση αποτελείται από τις τεχνητές μεταβλητές

Βάση		Μεταβλητές									
		150	250	0	0	0	M	M	M		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Μεταβλητές	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
M	a_1	30	20	-1	0	0	1	0	0	1500	
M	a_2	5	25	0	-1	0	0	1	0	900	
M	a_3	0	10	0	0	-1	0	0	1	200	
	z_j	35M	55M	-M	-M	-M	M	M	M	$Z = 2600M$	
	$c_j - z_j$	150-35M	250-55M	M	M	M	0	0	0		

Είναι βέλτιστη η λύση???

ΌΧΙ αφού δ1 και δ2 είναι αρνητικά

Μέθοδος Simplex / Ελαχιστοποίηση

- Εισερχόμενη μεταβλητή είναι εκείνη με την μικρότερη τιμή (ή η μεταβλητή με μεγαλύτερη απόλυτη τιμή

  $\delta_1=c_1-z_1$ =150-(30*M+5*M+0*M)=150-35M

  $\delta_2=c_2-z_2$ =250-(20*M+25*M+10*M)=250-55M

  $\delta_3=c_3-z_3$ =0- (-1*M+0*M+0*M)=0+M

  $\delta_4=c_4-z_4$ = 0- (0*M-1*M+0*M)=0+M

  $\delta_5=c_5-z_5$ =0- (0*M+0*M-1*M)=0+M

  $\delta_6=c_6-z_6$ =M- (1*M+0*M+0*M)=0

  $\delta_7=c_7-z_7$ =M- (0*M+1*M+0*M)=0

  $\delta_8=c_8-z_8$ =M- (0*M+0*M+1*M)=0

- $M \to \infty$, $\delta_2<\delta_{1,}$ εισερχόμενη μεταβλητή x_2 και εξερχόμενη μεταβλητή a_3

Ποια μεταβλητή εισέρχεται? Ποια εξέρχεται?

δ2<δ1 η μεταβλητή x2 θα είναι η νέα εισερχόμενη μεταβλητή καθώς ή είσοδος της στη βάση θα προκαλέσει τη μέγιστη δυνατή μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης

αξονική στήλη

Βάση		Μεταβλητές								Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		150	250	0	0	0	M	M	M		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3		
M	a_1	30	20	-1	0	0	1	0	0	1500	75
M	a_2	5	25	0	-1	0	0	1	0	900	36
M	a_3	0	10	0	0	-1	0	0	1	200	20
	z_j	35M	55M	-M	-M	-M	M	M	M	$Z=2600M$	
	c_j-z_j	150-35M	250-55M	M	M	M	0	0	0		

0, 1, 0, 0, -1/10, 0, 0, 1, 20

2º tableau Simplex

Νέα αξονική γραμμή 0, 1, 0, 0, -1/10, 0, 0, 1/10, 20

Νέα 1η γραμμή: (30, 20, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1500)-20*(0, 1, 0, 0, -1/10, 0, 0, 1/10, 20)=
= (30-0, 20-20*1, -1-0, 0-0, 0-20*(-1/10), 1-0, 0-20*1/10, 1500-400)=
= (**30, 0, -1, 0, 2, 1, -2, 1100**)

Νεα 2η γραμμή: (5, 25, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 900)-25*(0, 1, 0, 0, -1/10, 0, 0, 1/10, 20)=
=(5-0, 25-25, 0-0, -1-0, 0+25/10, 0-0, 1-0, 0-25*1/10, 900-500)=
=(**5, 0, 0, -1, 2.5, 0, 1, -2.5, 400**)

Βάση		Μεταβλητές								Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
			250	0	0	0	M	M	M		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3		
M	a_1	30	0	-1	0	2	1	0	-2	1100	$\frac{1100}{30}$
M	a_2	5	0	0	-1	2.5	0	1	-2.5	400	80
250	x_2	0	1	0	0	-0.1	0	0	0.1	20	M
	z_j	35M	250	-M	-M	4.5M-25	M	M	-4.5M+25	Z=5000+1500M	
	c_j-z_j	150-35M	0	M	M	25-4.5M	0	0	-25+5.5M		

3º tableau Simplex

Νέα αξονική γραμμή 1, 0, -1/30, 0, 1/15, 1/30, 0, -1/15, 1100/30

Νέα 2η γραμμή:
(5, 0, 0, -1, 2.5, 0, 1, -2.5, 400)-5*(1, 0, -1/30, 0, 1/15, 1/30, 0, -1/15, 1100/30)
= (5-5, 0-0, 0+5/30, -1-0, 2.5-5*1/15, 0-1/30, 1-0, -2.5-5*(-1/15), 400-1100/30)=
= (0,0,+5/30,-1, 65/30, -1/30, 1, -65/30, 6500/30)

Νεα 3η γραμμή: (0,1,0,0,-1/10, 0, 0, 1/10, 20)-**0***(1, 0, -1/30, 0, 1/15, 1/30, 0, -1/15 1100/30)

Βάση		Μεταβλητές								Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		150	250	0	0	0	M	M	M		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3		
150	x_1	1	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$-\frac{2}{30}$	$\frac{1100}{30}$	550
M	a_2	0	0	$\frac{5}{30}$	-1	$\frac{65}{30}$	$-\frac{5}{30}$	1	$-\frac{65}{30}$	$\frac{6500}{30}$	100
250	x_2	0	1	0	0	-0.1	0	0	0.1	20	200
	z_j	150	250	$-5+\frac{5}{30}M$	-M	$-15+\frac{65}{30}M$	$5-\frac{5}{30}M$	M	$15-\frac{65}{30}M$	Z=10.500 $+\frac{6500}{30}$M	
	c_j-z_j	0	0	$5-\frac{5}{30}M$	M	$15-\frac{65}{30}M$	$-5+\frac{35}{30}M$	0	$-15+\frac{95}{30}M$		

3^{o} tableau Simplex

$$5-\frac{5}{30}M<15-\frac{65}{30}M \Leftrightarrow -10<-\frac{60}{30}M \Leftrightarrow -10<-2M\,\textit{οχι},\ \text{'αρα}\,15-\frac{65}{30}M<5-\frac{5}{30}M$$

$$15-\frac{65}{30}M<-5+\frac{35}{30}M \Leftrightarrow 20<\frac{10}{3}\mathrm{M}\,\textit{ναι}$$

$$15-\frac{65}{30}M<-15+\frac{95}{30}M \Leftrightarrow 30<\frac{155}{30}\mathrm{M}\,\textit{ναι}$$

Βάση		Μεταβλητές								Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		150	250	0	0	0	M	M	M		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3		
150	x_1	1	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$-\frac{2}{30}$	$\frac{1100}{30}$	550
M	a_2	0	0	$\frac{5}{30}$	-1	$\frac{65}{30}$	$-\frac{5}{30}$	1	$-\frac{65}{30}$	$\frac{6500}{30}$	100
250	x_2	0	1	0	0	-0.1	0	0	0.1	20	200
	z_j	150	250	$-5+\frac{5}{30}M$	-M	$-15+\frac{65}{30}M$	$5-\frac{5}{30}M$	M	$15-\frac{65}{30}M$	Z=10.500 $+\frac{6500}{30}$ M	
	c_j-z_j	0	0	$5-\frac{5}{30}M$	M	$15-\frac{65}{30}M$	$-5+\frac{35}{30}M$	0	$-15+\frac{95}{30}M$		

4^{o} tableau Simplex

Βάση		Μεταβλητές								Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		150	250	0	0	0	M	M	M		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3		
150	x_1	1	0	$-\frac{5}{130}$	2/65	0	$\frac{5}{130}$	$-\frac{2}{65}$	0	30	
0	e_3	0	0	5/65	$-\frac{30}{65}$	1	$-\frac{5}{65}$	$\frac{30}{65}$	-1	100	
250	x_2	0	1	1/130	$-\frac{3}{65}$	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{3}{65}$	0	30	
	z_j	150	250	$-\frac{500}{130}$	$-\frac{400}{65}$	0	$\frac{500}{130}$	$\frac{400}{65}$	0	$Z=12000$	
	c_j-z_j	0	0	$\frac{500}{130}$	$\frac{400}{65}$	0	$M-\frac{500}{130}$	$M-\frac{450}{65}$	M		

- Ειδικές Περιπτώσεις με τη Μέθοδο Simplex

Πρόβλημα μεγιστοποίησης με τη Μ-μέθοδο

$$\begin{aligned} &\max Z = 50x_1 + 40x_2 \\ &3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ &\qquad x_2 \le 20 \\ &8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ &x_1 + \ \ x_2 \ge 50 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\max Z = 50x_1 + 40x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0e_1 - Ma_1 \\ &3x_1 + 5x_2 + s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0e_1 + 0a_1 = 150 \\ &\qquad x_2 + 0s_1 + s_2 + 0s_3 + 0e_1 + 0a_1 = 20 \\ &8x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + s_3 + 0e_1 + 0a_1 = 300 \\ &x_1 + \ \ x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - e_1 + a_1 = 50 \end{aligned}$$

Επειδή δεν σχηματίζεται ο Ι4 (λείπει η 4η στήλη, εισάγουμε την τεχνητή μεταβλητή α1 στον 4ο περιορισμό)

Πρόβλημα μεγιστοποίησης με τη Μ-μέθοδο

Βάση		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	e_1	a_1	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	50	40	0	0	0	0	-M		
0	s_1	3	5	1	0	0	0	0	150	150/3
0	s_2	0	1	0	1	0	0	0	20	-
0	s_3	8	5	0	0	1	0	0	300	300/8
-M	a_1	1	1	0	0	0	-1	1	50	50/1
z_j		-M	-M	0	0	0	M	-M	$Z=0$	
$c_j - z_j$		50+M	40+M	0	0	0	-M	0		

Η βάση έχει τις χαλαρές
και την τεχνητή μεταβλητή

2ο & 3ο tableau Simplex

0	s_1	0	25/8	1	0	-3/8	0	0	75/2	
0	s_2	0	1	0	1	0	0	0	20	
50	x_1	1	5/8	0	0	1/8	0	0	75/2	
-M	a_1	0	3/8	0	0	-1/8	-1	1	25/2	
z_j		50	$\frac{250}{8}-\frac{3M}{8}$	0	0	$\frac{50}{8}+\frac{M}{8}$	M	-M	$Z=1875$	
$c_j - z_j$		0	$\frac{70}{8}+\frac{3M}{8}$	0	0	$-\frac{M}{8}-\frac{50}{8}$	-M	0		
40	x_2	0	1	8/25	0	-3/25	0	0	12	
0	s_2	0	0	-8/25	1	3/25	0	0	8	
50	x_1	1	0	-5/25	0	5/25	0	0	30	
-M	a_1	0	0	-3/25	0	-2/25	-1	1	8	
z_j		50	40	$\frac{70}{25}+\frac{3M}{25}$	0	$\frac{130}{25}+\frac{2M}{25}$	-M	M	$Z=1980$	
$c_j - z_j$		0	0	$-\frac{3M}{25}-\frac{70}{25}$	0	$-\frac{2M}{25}-\frac{130}{25}$	M	0		

Πρόβλημα με άπειρες λύσεις

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 4x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Πρόβλημα με άπειρες λύσεις

Τελικός πίνακας Simplex

Βάση		Μεταβλητές					Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		4	8	0	0	0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
4	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	-2	100	-50
0	s_2	0	0	-3	1	10	500	50
8	x_2	0	1	0	0	1	350	350
	z_j	4	8	2	0	0	$Z = 3200$	
	$c_j - z_j$	0	0	-2	0	0		

Εναλλακτικός τελικός πίνακας Simplex

Βάση		Μεταβλητές					Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		4	8	0	0	0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
4	x_1	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	200	
0	s_3	0	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	50	
8	x_2	0	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	300	
	z_j	4	8	2	0	0	$Z = 3200$	
	$c_j - z_j$	0	0	-2	0	0		

Πρόβλημα χωρίς εφικτή λύση

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$x_2 \geq 450$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Πρόβλημα χωρίς εφικτή λύση

Βάση		Μεταβλητές						Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		4	8	0	0	0	M		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	e_3	a_1		
8	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	400	
0	s_2	5	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	1000	
M	a_1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	-1	1	50	
	z_j	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$Z = 32000$	
	$c_j - z_j$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	-1	0		

Μη φραγμένο πρόβλημα

Μεγιστοποιηση της συναρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$x_1 \geq 450$$

$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Μη φραγμένο πρόβλημα

Βάση		Μεταβλητές					Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		3	8	0	0	M		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Μεταβλητές	x_1	x_2	e_1	s_1	a_1		
3	x_1	1	0	-1	0	1	450	-
8	x_2	0	1	0	1	0	350	-
	z_j	4	8	-3	8	3	$Z = 4150$	
	$\boxed{c_j - z_j}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{-8}$	$\boxed{-3+M}$		

Ανάλυση Ευαισθησίας

Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές

- Έστω ότι ο συντελεστής c_j μιας μεταβλητής απόφασης x_j, βασικής ή μη, μεταβάλλεται κατά Δc_j, οπότε ή νέα του τιμή είναι

$$c_j{*} = c_j + \Delta c_j$$

- Για τη διερεύνηση των επιπτώσεων της αλλαγής αυτής
  - στη βέλτιστη λύση &
  - στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

  χρησιμοποιούμε τον τελικό Πίνακα Simplex όπου

  (α) αντικαθιστούμε στην αντίστοιχη γραμμική αρχική τιμή του συντελεστή

  (β) Υπολογίζουμε εκ νέου τα στοιχεία του τελικού Πίνακα Simplex που επηρεάζονται από την αλλαγή αυτή.

Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές

Αν η μεταβλητή είναι ***βασική*** *τότε από την αλλαγή του συντελεστή της επηρεάζονται*

τα στοιχεία της σειράς "z_j" για την x_j ΚΑΙ τις μη βασικές μεταβλητές
τα στοιχεία της σειράς "$c_j - z_j$" για τις μη βασικές μεταβλητές
η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης Z

Αν η μεταβλητή είναι ***ΜΗ βασική*** *τότε από την αλλαγή του συντελεστή της επηρεάζεται*

μόνο το στοιχείο της σειράς "$c_j - z_j$" για τη μεταβλητή αυτή.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το κριτήριο αριστότητας ανάλογα με το πρόβλημα που επιλύουμε

Παράδειγμα- Μεταβολή Αντικειμενικοί Συντελεστές

Μεταβάλλουμε το συντελεστή $c_1 = 3 \rightarrow \Delta c_1 \quad c_1^* = c_1 + \Delta c_1 \Leftrightarrow c_1^* = 3 + \Delta c_1$

Βάση		Μεταβλητές					Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		$3+\Delta c_1$	8	0	0	0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
$3+\Delta c_1$	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	-2	100	
0	s_2	0	0	-3	1	10	500	
8	x_2	0	1	0	0	1	350	
z_j		$3+\Delta c_1$	0	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\Delta c_1$	0	$2-2\Delta c_1$	$Z^* = 3100 + 100\Delta c_1$	
$c_j - z_j$		0	0	$-(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\Delta c_1)$	0	$-2+2\Delta c_1$		

Παράδειγμα- Μεταβολή Αντικειμενικοί Συντελεστές-ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Η προσδιορισθείσα λύση θα παραμένει βέλτιστη αν οι νέες διαφορετικές αποδόσεις είναι μη θετικές, δηλαδή

$$\delta_3 \le 0 \qquad \delta_5 \le 0$$

$$\delta_3 \le 0 \to -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Delta c_1 \le 0 \to -\frac{1}{2}\Delta c_1 \le \frac{3}{2} \to \frac{1}{2}\Delta c_1 \ge -\frac{3}{2} \to \Delta c_1 \ge -3$$

$$\delta_5 \le 0 \to -2 + 2\Delta c_1 \le 0 \to 2\Delta c_1 \le 2 \to \Delta c_1 \le 1$$

$$-3 \le \Delta c_1 \le 1$$

Σημειώνεται ότι όσο το Δc_1, δηλαδή η εκάστοτε μεταβολή του αντικειμενικού συντελεστή της, παραμένει στο διάστημα [-3 , 1], η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται και δίνεται από τον τύπο

$$Z^* = (3+\Delta c_1)x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = \underbrace{3x_1 + 8x_2}_{Z} + (\Delta c_1)x_1 = 3100 + 100\Delta c_1$$

Παράδειγμα- Μεταβολή Αντικειμενικοί Συντελεστές ΜΗ ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

$$c_3 = 0 \to \Delta c_3 \quad c_3^* = 0 + \Delta c_3$$

Βάση		Μεταβλητές					Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
		3	8	$\boxed{0+\Delta c_3}$	0	0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
3	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	-2	100	
0	s_2	0	0	-3	1	10	500	
8	x_2	0	1	0	0	1	350	
z_j		3	0	$\frac{3}{2}$	0	2	$Z = 3100$	
$c_j - z_j$		0	0	$\boxed{\Delta c_3 - \frac{3}{2}}$	0	-2		

$$\Delta c_3 - \frac{3}{2} \le 0 \Leftrightarrow \Delta c_3 \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow c_3^* = 0 + \Delta c_3 \in [-\infty, \frac{3}{2}]$$

Ταυτόχρονη μεταβολή αντικειμενικών συντελεστών

Περίπτωση 1η:

Όλοι οι μεταβαλλόμενοι αντικειμενικοί συντέλεσες αφορούν **ΜΗ ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ**

Η ***τρέχουσα λύση***

παραμένει **βέλτιστη** αν η **μεταβολή** της τιμής κάθε περιορισμού εμπίπτει στα **όρια ευαισθησίας** της.

παύει να είναι βέλτιστη αν η τιμή ενός τουλάχιστον από τους αντικειμενικούς συντελεστές είναι εκτός των ορίων ευαισθησίας του

Περίπτωση 2η

Ένας τουλάχιστον από αυτούς τους αντικειμενικούς συντελεστές αφορά **ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ**.

Εδώ εφαρμόζουμε **τον κανόνα του ποσοστού 100%**

Για όλους τους αντικειμενικούς συντελεστές της συνάρτησης που μεταβάλλονται, αθροίζουμε το ποσοστό μεταβολής και το συγκρίνουμε με το επιτρεπόμενο. Αν το άθροισμα αυτό δεν υπερβαίνει το 100%, τότε η τρέχουσα λύση παραμένει η βέλτιστη, με διαφορετική φυσικά τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Στην αντίθετη περίπτωση, η τρέχουσα λύση παύει να είναι η βέλτιστη λύση.

Ταυτόχρονη μεταβολή αντικειμενικών συντελεστών

Έστω ότι μεταβάλλονται ταυτόχρονα c1 και c2

$$-3 \le \Delta c_1 \le 1 \qquad \Delta c_2 \in [-2, +\infty]$$

Συγκεκριμένα έχουμε αύξηση c_1 κατά 0.2 μονάδες και μείωση c_2 κατά 1.5 μονάδα τότε

Επειδή η επιτρεπόμενη αύξηση για τον συντελεστή της πρώτης μεταβλητής είναι μέχρι 1 μονάδα η αύξηση κατά 0.2 αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό **[0.2/1]*100%=20%** της συνολικής επιτρεπόμενης αύξησης

Επειδή η επιτρεπόμενη μείωση για τον συντελεστή της δεύτερης μεταβλητής είναι μέχρι 2 μονάδες η μείωση κατά 1,5 μονάδα αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό **[1,5/2]*100%=75%** της συνολικής επιτρεπόμενης αύξησης

Το συνολικό ποσοστό μεταβολής σε σχέση με το επιτρεπόμενο είναι 20%+75%=95% που είναι μικρότερο του 100%.

ΑΡΑ η ΒΕΛΤΙΣΗ ΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΝΕΙ

Ταυτόχρονη μεταβολή αντικειμενικών συντελεστών

Έστω ότι μεταβάλλονται ταυτόχρονα c1 και c2

$$-3 \leq \Delta c_1 \leq 1 \qquad \Delta c_2 \in [-2, +\infty]$$

Συγκεκριμένα έχουμε αύξηση c1 κατά 0.2 μονάδες και μείωση c1 κατά 1.8 μονάδα τότε

Επειδή η επιτρεπόμενη αύξηση για τον συντελεστή της πρώτης μεταβλητής είναι μέχρι 1μονάδα η αύξηση κατά 0.2 αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό **[0.2/1]*100%=20%** της συνολικής επιτρεπόμενης αύξησης

Επειδή η επιτρεπόμενη μείωση για τον συντελεστή της δεύτερης μεταβλητής είναι μέχρι 2 μονάδες η μείωση κατά 1,5 μονάδα αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό **[1,8/2]*100%=90%** της συνολικής επιτρεπόμενης αύξησης

Το συνολικό ποσοστό μεταβολής σε σχέση με το επιτρεπόμενο είναι 20%+90%=110% που είναι μικρότερο του 100%.

ΑΡΑ η ΒΕΛΤΙΣΗ ΛΥΣΗ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

Μεταβολές στους διαθέσιμους πόρους

Έστω ότι ο διαθέσιμος πόρος b_i, που αντιστοιχεί στον περιορισμό i,

μεταβάλλεται κατά Δb_i, οπότε η νέα του τιμή είναι $b_i + \Delta b_i$

Η μόνη τροποποίηση που πρέπει να γίνει στον αρχικό Πίνακα Simplex είναι η αλλαγή στη στήλη «Δεξιό μέλος»

- Για τη διερεύνηση των επιπτώσεων της αλλαγής αυτής
  - στη βέλτιστη λύση &
  - στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

  χρησιμοποιούμε τον τελικό Πίνακα Simplex όπου
  a. Υπολογίζουμε τα γινόμενα της μεταβολής Δb_i του πόρου i, επί τα στοιχεία της στήλης της χαλαρής μεταβλητής που αντιστοιχεί στον πόρο i .
  b. Υπολογίζουμε το γινόμενο της μεταβολής του πόρου Δb_j, επί το στοιχείο j
  c. Προσαυξάνουμε τα στοιχεία της στήλης «Δεξιό μέλος» κατά το αντίστοιχα γινόμενα που υπολογίστηκαν στο βήμα a
  d. Προσαυξάνουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά το γινόμενο που υπολογίστηκε στο βήμα b

Εφαρμόζουμε το κριτήριο μη αρνητικότητας

Παράδειγμα: Μεταβολή στα δεξιά μέλη

Βάση		Μεταβλητές						
		3	8	0	0	0		
Αντικειμενικοί Συντελεστές	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Δεξιό Μέλος	Πηλίκο
3	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	2	$b_1^* = 100 + \frac{1}{2}\Delta b_1$	
0	s_2	0	0	-3	1	10	$b_2^* = 500 - 3\Delta b_1$	
8	x_2	0	1	0	0	-1	$b_3^* = 350 + 0\ \Delta b1$	
z_j		3	0	$\frac{3}{2}$	0	2	$Z^* = 3100 + \frac{3}{2}\Delta b_1$	
$c_j - z_j$		0	0	$-\frac{3}{2}$	0	-2		

$$b_1^*, b_2^*, b_3^* \geq 0$$

Οι περιορισμοί της μη αρνητικότητας συναληθεύουν στο

$-200 \leq \Delta b_1 \leq 1667$

Ταυτόχρονη μεταβολή δεξιών σταθερών

Περίπτωση 1η:

Όλα τα μεταβαλλόμενα δεξιά μέλη των περιορισμών αφορούν **ΜΗ ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ**

Η ***τρέχουσα λύση***

- **παραμένει** βέλτιστη αν η μεταβολή της τιμής κάθε δεξιού μέλους εμπίπτει στα όρια ευαισθησίας της
- παύει να είναι βέλτιστη αν η τιμή ενός τουλάχιστον δεξιού μέλους είναι εκτός των ορίων ευαισθησίας του

Περίπτωση 2η:

Ένα τουλάχιστον από τα μεταβαλλόμενα μέρη αφορά **ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ**.

Εφαρμόζουμε τον **κανόνα του ποσοστού 100%.**

Συγκεκριμένα, για τα δεξιά μέλη των περιορισμών της συνάρτησης που μεταβάλλονται, αθροίζουμε το ποσοστό μεταβολής και το συγκρίνουμε με το επιτρεπόμενο. Αν το άθροισμα αυτό δεν υπερβαίνει το 100% της επιτρεπόμενης μεταβολής, τότε η τρέχουσα λύση παραμένει η βέλτιστη, με διαφορετική φυσικά τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Στην αντίθετη περίπτωση, η τρέχουσα λύση παύει να είναι η βέλτιστη λύση.

Παράδειγμα: Ταυτόχρονη Μεταβολή στα δεξιά μέλη ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

Το δεξιό μέλος του πρώτου περιορισμού αυξηθεί κατά 50 μονάδες και το δεξιό μέλος του τρίτου περιορισμού, μειωθεί κατά 25 μονάδες

Η επιτρεπόμενη αύξηση είναι μέχρι 166,67, οπότε η αύξηση αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό [50/166,67]*100%=30% της συνολικής επιτρεπόμενης αύξησης $-200 \leq \Delta b_1 \leq 1667$

Η επιτρεπόμενη μείωση είναι μέχρι 50, η μείωση του κατά 25 αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό [25/50]*100%=50% της συνολικής επιτρεπόμενης μείωσης $\Delta b_3 \in [-50, +\infty]$

Το συνολικό ποσοστό μεταβολής σε σχέση με το επιτρεπόμενο είναι 30%+50%=80% που είναι μικρότερο του 100%.

ΑΡΑ ΔΕΝ ΘΑ ΕΠΗΡΕΑΣΤΕΙ Η Βέλτιστη Λύση

ΘΑ ΑΛΛΑΞΕΙ Η ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ