Επιχειρησιακή Έρευνα

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
Εργαστήριο Ποσοτικών Μεθόδων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Γραμμικός Προγραμματισμός

Περιεχόμενα

- Γραφική Μέθοδος Επίλυσης
- Πρόβλημα με Άπειρες λύσεις
- Πρόβλημα χωρίς εφικτή περιοχή
- Μη φραγμένο πρόβλημα

Γραφική Μέθοδος Επίλυσης (ΠΟΤΕ?)

Στόχος του μαθήματος είναι η παρουσίαση της μεθόδου της γραφικής επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Η γραφική επίλυση είναι δυνατή όταν το μοντέλο **έχει μόνο δύο μεταβλητές απόφασης** καθώς τότε μόνο είναι δυνατή η γραφική παράσταση στο **επίπεδο** της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών του.

Για την επίλυση μοντέλων **με περισσότερες από δύο μεταβλητές** θα χρησιμοποιηθεί, μια διαφορετική μέθοδος, η μέθοδος **Simplex**.

Βήματα Γραφικής Επίλυσης π.γ.π.

Βήμα 1ο: Κατασκευάζουμε ένα δισδιάστατο σύστημα αξόνων, στον οριζόντιο άξονα του οποίου παίρνει τιμές η μεταβλητή x_1, ενώ στον κατακόρυφο άξονα του η μεταβλητή x_2.

Βήμα 2ο Στο σύστημα αξόνων που κατασκευάστηκε απεικονίζουμε γραφικά όλους τους περιορισμούς.

Βήμα 3ο Εντοπίζουμε την περιοχή στην οποία ισχύει κάθε περιορισμός.

Βήμα 4ο Προσδιορίζουμε την περιοχή στην οποία συναληθεύθουν όλοι οι περιορισμοί. (feasible region)

Βήμα 5ο Εντοπίζουμε την κορυφή από την οποία διέρχεται η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης πριν εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή

Βήμα 6ο Προσδιορίζουμε τη βέλτιστη λύση

Εφαρμογή σε Πρόβλημα Μεγιστοποίησης

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Εφαρμογή σε Πρόβλημα Μεγιστοποίησης

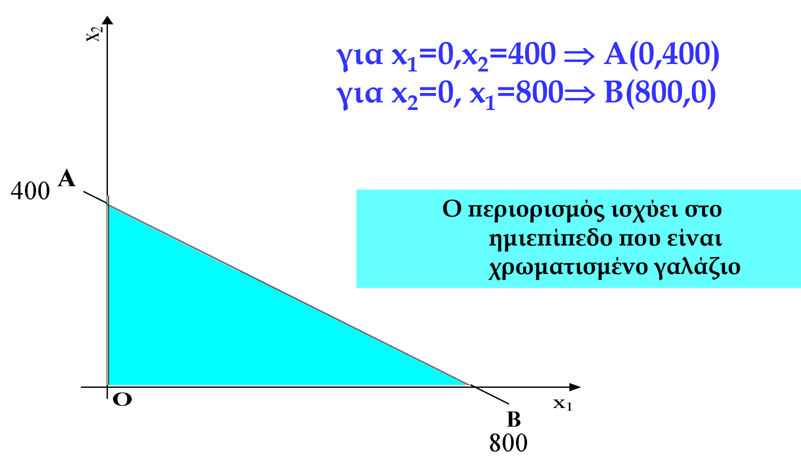
Βήμα 1ο: Κατασκευάζουμε ένα δισδιάστατο σύστημα αξόνων

1ος περιορισμός

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

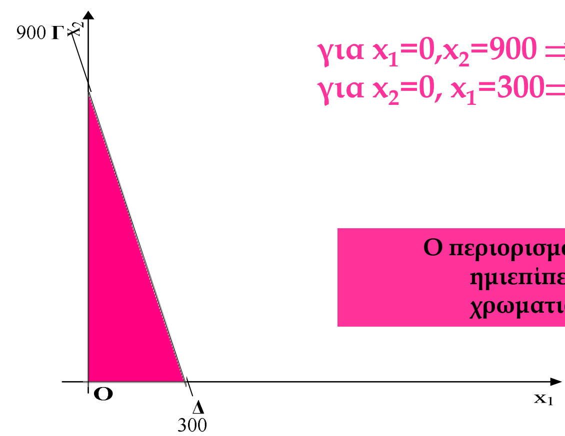
Βήμα 2ο Στο σύστημα αξόνων που κατασκευάστηκε απεικονίζουμε γραφικά όλους τους περιορισμούς

Βήμα 3ο Εντοπίζουμε την περιοχή στην οποία ισχύει κάθε περιορισμός



2ος περιορισμός $6x_1 + 2x_2 \leq 1800$

Βήμα 2ο & Βήμα 3ο

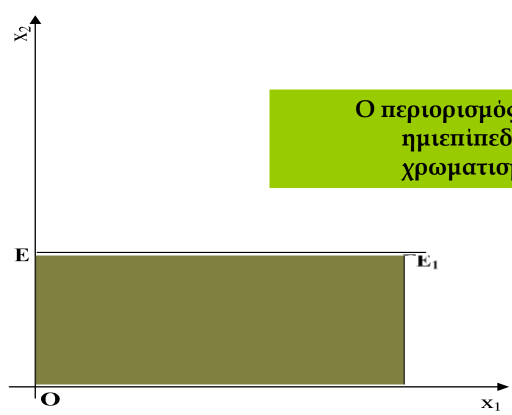


για x_1=0,x_2=900 ⇒ Γ(0,900)
για x_2=0, x_1=300⇒ Δ(300,0)

Ο περιορισμός ισχύει στο ημιεπίπεδο που είναι χρωματισμένο ροζ

3ος περιορισμός $x_2 \leq 350$

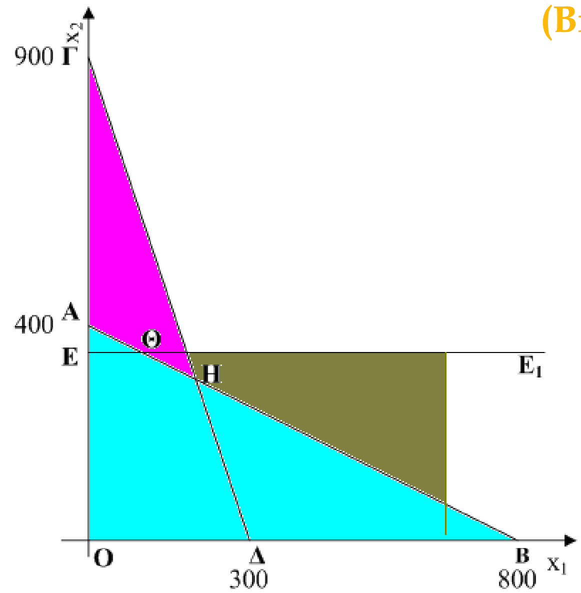
Βήμα 2ο & Βήμα 3ο



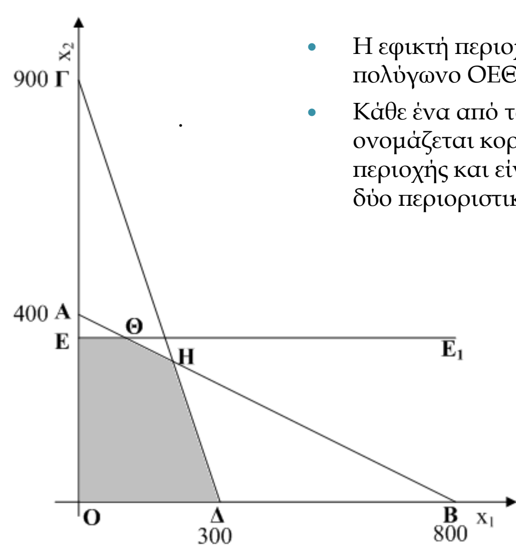
Ο περιορισμός ισχύει στο ημιεπίπεδο που είναι χρωματισμένο πράσινο

Προσδιορισμός Εφικτής Περιοχής

(Βήμα 4ο)

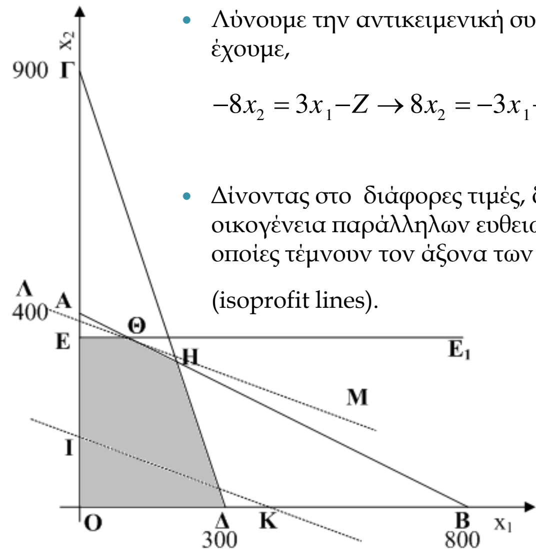


Εφικτή Περιοχή



- Η εφικτή περιοχή είναι το κυρτό πολύγωνο ΟΕΘΗΔ.
- Κάθε ένα από τα σημεία Ο,Ε,Θ,Η,Δ ονομάζεται κορυφή της εφικτής περιοχής και είναι το σημείο τομής δύο περιοριστικών ευθειών

Βήμα 5ο: Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης



- Λύνουμε την αντικειμενική συνάρτηση ως προς και έχουμε,

$$-8x_2 = 3x_1 - Z \rightarrow 8x_2 = -3x_1 + Z \rightarrow x_2 = -\frac{3}{8}x_1 + \frac{Z}{8}$$

- Δίνοντας στο διάφορες τιμές, δημιουργούμε μια οικογένεια παράλληλων ευθειών με κλίση -3/8 οι οποίες τέμνουν τον άξονα των σε διαφορετικά σημεία.

  (isoprofit lines).

Υπολογισμός Z στις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	Συντεταγμένες (x_1, x_2)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $Z = 3x_1 + 8x_2$
O	(0,0)	$Z = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$
E	(0,350)	$Z = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 350 = 2800$
Θ	(100,350)	$Z = 3 \cdot 100 + 8 \cdot 350 = 3100$
H	(200,300)	$Z = 3 \cdot 200 + 8 \cdot 300 = 3000$
Δ	(300,0)	$Z = 3 \cdot 300 + 8 \cdot 0 = 900$

Εφαρμογή σε Πρόβλημα Μεγιστοποίησης

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Η έννοια του πλεονάζοντος περιορισμού

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

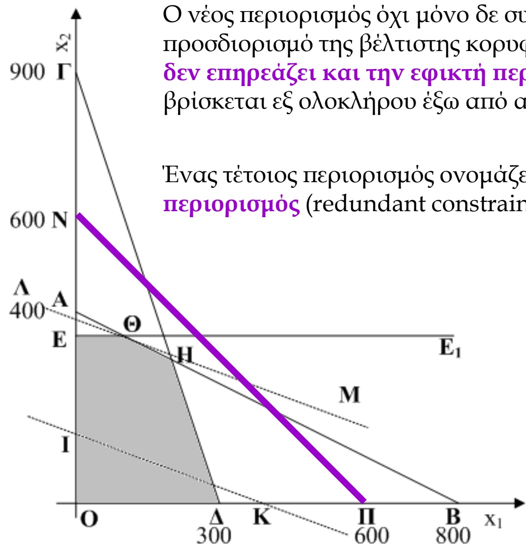
με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$
$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 600}$$
$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Γραφική Απεικόνιση με ευθεία ΝΠ



Ο νέος περιορισμός όχι μόνο δε συμμετέχει στον προσδιορισμό της βέλτιστης κορυφής αλλά επιπλέον **δεν επηρεάζει και την εφικτή περιοχή**, καθώς βρίσκεται εξ ολοκλήρου έξω από αυτή.

Ένας τέτοιος περιορισμός ονομάζεται **πλεονάζων περιορισμός** (redundant constraint).

Παράδειγμα [1]

Η βιοτεχνία χρωμάτων «Χρωτέξ Α.Ε.» κατασκευάζει δύο είδη χρωμάτων πλαστικά και υδροχρώματα, τα οποία στη συνέχεια διαθέτει χοντρικά στην αγορά. Η παράγωγη τους γίνεται αποκλειστικά σχεδόν από τα υλικά Α και Β σύμφωνα με τα πιο κάτω ημερήσια δεδομένα.

	Πλαστικό	Υδρόχρωμα	Διαθέσιμες Ποσότητες
Υλικό Α	1	2	6
Υλικό Β	2	1	8

Οι ημερήσιες απαιτήσεις σε υδρόχρωμα δεν ξεπερνούν τις απαιτήσεις σε πλαστικά χρώματα το συν ένα τόνο και η μέγιστη ημερήσια ζήτηση των υδροχρωμάτων περιορίζεται στους 2 τόνους. Αν το κέρδος ανά τόνο πλαστικού ανέρχεται στις 300.000 χ.μ και ανά τόνο υδροχρώματος στις 200.000 χ.μ προσδιορίστε τις ημερήσιες παραγόμενες ποσότητες για το κάθε είδος χρώματος ώστε να μεγιστοποιούνται τα ολικά κέρδη της βιομηχανίας.

Παράδειγμα [1]

Μεταβλητές:

x_1:οι τόνοι της ημερήσιας παραγωγής σε πλαστικά χρώματα

x_2:οι τόνοι της ημερήσιας παραγωγής σε υδροχρώματα

Η μεγιστοποίηση του κέρδους από την πώληση x_1 τόνων πλαστικού και x_2 τόνων υδροχρώματος δεδομένου ότι 1 τόνος πλαστικό πωλείται 300.000 χ.μ και ένας τόνος υδρόχρωμα 200.000 χ.μ

$$z=300x_1+200x_2$$

Περιορισμοί:

περιορισμοί αναφέρονται στην **διαθεσιμότητα** των υλικών Α και Β

Απαιτήσεις στο υλικό Α ≤ διαθέσιμη ποσότητα του υλικού Α άρα

$$x_1+2x_2 \leq 6$$

Απαιτήσεις στο υλικό Β ≤ διαθέσιμη ποσότητα του υλικού Β άρα

$$2x_1+x_2 \leq 8$$

Παράδειγμα [1]

Οι περιορισμοί αναφέρονται στην **ζήτηση της** των χρωμάτων

Απαιτήσεις της αγοράς σε υδρόχρωμα

$$x_2 \leq 2 \text{ (τόνοι)}$$

Απαιτήσεις αγοράς σε υδρόχρωμα σε σχέση με τα πλαστικά άρα

$$x_2 \leq x_1+1$$

Οι ποσότητες των χρωμάτων δεν μπορούν να είναι αρνητικοί αριθμοί

$$x_2 \geq 0,\ x_1 \geq 0$$

Οι **παράμετροι** παραμένουν **αμετάβλητες** κατά την διάρκεια του προβλήματος

κόστος , διαθεσιμότητα κλπ.

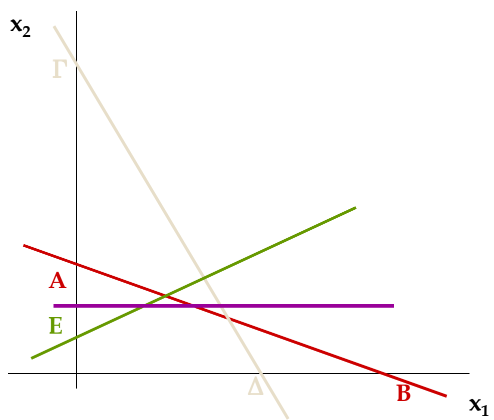
Παράδειγμα [1]

$$\text{Max } z=300x_1+200\,x_2$$

Subject to:

$$x_1 + 2\,x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_2 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 \le +1$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

Παράδειγμα [1]



$x_1, x_2 \ge 0$

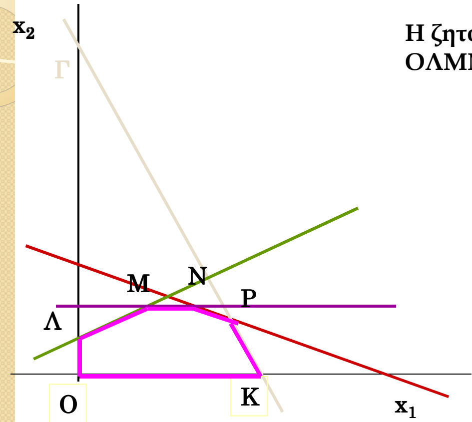
$x_1+2x_2 \le 6$
για $x_1=0, x_2=3 \Rightarrow$ A(0,3)
για $x_2=0$, $x_1=6 \Rightarrow$ B(6,0)

$2x_1+x_2 \le 8$
για $x_1=0, x_2=8 \Rightarrow$ Γ(0,8)
για $x_2=0$, $x_1=4 \Rightarrow$ Δ(4,0)

$-x_1+x_2 \le 1$
για $x_1=0, x_2=1 \Rightarrow$ E(0,1)
για $x_2=0$, $x_1=-1 \Rightarrow$ Z(-1,0)

$x_2 \le 2$

Παράδειγμα [1]

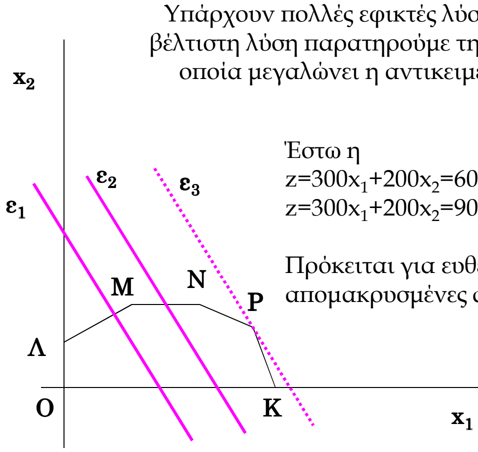


Η ζητούμενη εφικτή περιοχή είναι η ΟΛΜΝΡΚ

Κ=(4,0)
Ρ=(10/3,4/3)
Ν=(2,2)
Μ=(1,2)
Λ=(0,1)

Παράδειγμα [1]

Υπάρχουν πολλές εφικτές λύσεις, για να βρούμε βέλτιστη λύση παρατηρούμε την κατεύθυνση στην οποία μεγαλώνει η αντικειμενική συνάρτηση



Έστω η
$z=300x_1+200x_2=600$ (ε_1)
$z=300x_1+200x_2=900$…(ε_2)

Πρόκειται για ευθείες **παράλληλες** και συνεχώς απομακρυσμένες από την αρχή των αξόνων

ε_3

Άριστη λύση x_1=10/3 τόνοι πλαστικό, **x_2=4/3** τόνοι υδρόχρωμα **και** κέρδος **z=38/3** χ.μ

Εφαρμογή σε Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 150x_1 + 250x_2$$

με περιορισμούς δομής

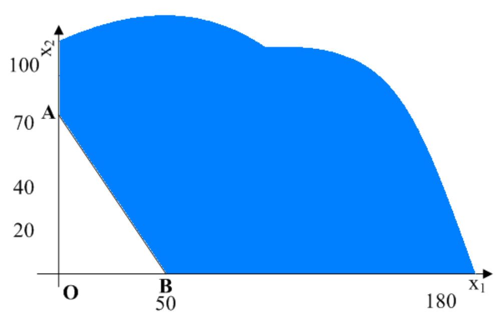
$$30x_1 + 20x_2 \geq 150$$
$$5x_1 + 25x_2 \geq 900$$
$$10x_2 \geq 200$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

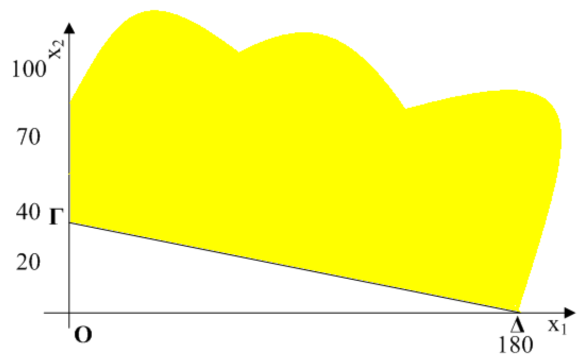
Εφαρμογή σε Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

1ος περιορισμός $30x_1 + 20x_2 \geq 150$



Εφαρμογή σε Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

2ος περιορισμός $5x_1 + 25x_2 \geq 900$

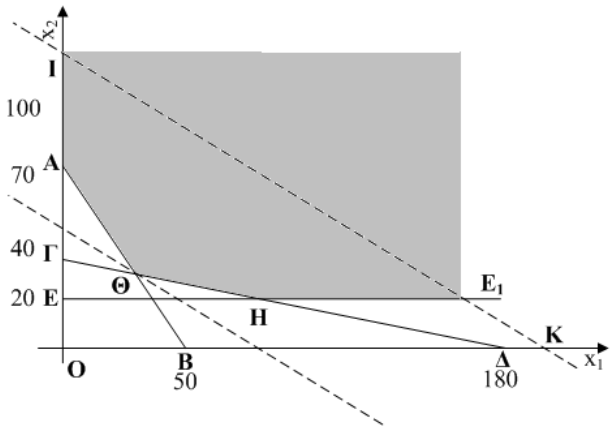


Εφαρμογή σε Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

$10x_2 \geq 200$

Εφικτή Περιοχή

Η εφικτή περιοχή είναι το γραμμοσκιασμένο τμήμα του πρώτου τεταρτημορίου που προσδιορίζεται από τα σημεία ΑΘΗΕ1.



Υπολογισμός Ζ στις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	Συντεταγμένες (x_1, x_2)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $Z = 150x_1 + 250x_2$
Α	$(0,75)$	$Z = 150 \cdot 0 + 250 \cdot 75 = 18750$
Θ	$(30,30)$	$Z = 150 \cdot 30 + 250 \cdot 30 = 12000$
Η	$(80,20)$	$Z = 150 \cdot 80 + 250 \cdot 20 = 17000$

Διερεύνηση Λύσης

Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

- Σε κάθε π.γ.π. πρέπει κάποιος να μπορεί να διακρίνει:
  - Ένα σύνολο δραστηριοτήτων **μεταβλητών απόφασης (*n* πλήθος**). Η τιμή κάθε μιας από τις μεταβλητές x_j ($j=1,2,\ldots,n$) προσδιορίζεται από την επίλυση του προβλήματος.
  - Ένα σύνολο **πόρων (*m* το πλήθος)** που διατίθενται σε περιορισμένες ποσότητες για την εκτέλεση των δραστηριοτήτων. (**περιορισμοί)**
  - Ένα **σύνολο τεχνολογικών περιορισμών** οι οποίοι εκφράζουν τους νόμους λειτουργίας των δραστηριοτήτων.(**συντελεστές περιορισμών**)
  - Ένα **σύνολο θεσμολογικών περιορισμών** οι οποίοι εκφράζουν διοικητικής και οργανωτικής φύσεως αποφάσεις.(**αντικειμενικοί συντελεστές)**
  - Ένα **μέτρο z της αποδοτικότητας** του συστήματος

Διαθεσιμότητα Πόρων & αντικειμενικοί συντελεστές

- Συμβολίζουμε με $\mathbf{a_{ij}}$ την **ποσότητα του πόρου i** που καταναλώνεται για την **παραγωγή** **μιας μονάδας** **της μεταβλητής** j (i=1,2,…,m, j=1,2,…,n)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Είναι η συνολική ποσότητα του πόρου i που θα χρησιμοποιηθεί
Η ποσότητα αυτή **δεν μπορεί να υπερβαίνει** την **διαθέσιμη** $\mathbf{b_i}$ (i=1,2,…,m)

- Συμβολίζουμε με $\mathbf{c_j}$ την **μεταβολή** που θα προκύψει στην αντικειμενική συνάρτηση **Z** από την **μεταβολή** κατά **μια μονάδα** της τιμής της μεταβλητής $\mathbf{x_j}$ (j=1,2,…,n).

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Είναι ένα μέτρο αποδοτικότητας του συστήματος (η αντικειμενική συνάρτηση

Πρόβλημα Μεγιστοποίησης

Χαλαρές Μεταβλητές

Μετατροπή όλων των περιορισμών από ανισότητες σε ισότητες

Αυτό γίνεται με την προσθήκη στα αριστερά μέλη τους αντίστοιχων βοηθητικών μεταβλητών $s_i, i = 1.....m$, οι οποίες ονομάζονται χαλαρές μεταβλητές (**slack variables**) και **εκφράζουν τις ποσότητες των πόρων που έχουν μείνει αδιάθετες.**

Κάθε χαλαρή μεταβλητή εμφανίζεται **σε ένα μόνο περιορισμό** με συντελεστή **μονάδα**. Επιπλέον όλες οι χαλαρές μεταβλητές εμφανίζονται και στην **αντικειμενική συνάρτηση** με **συντελεστή 0** και κατά συνέπεια δεν επηρεάζουν την τιμή της.

Προφανώς για όσους περιορισμούς ήταν ήδη ισότητες η τιμή του είναι μηδενική ενώ για τους υπόλοιπους η τιμή του είναι θετική και ίση με τη διαφορά της μέγιστης ποσότητας του διαθέσιμου πόρου (δεξιό μέρος του περιορισμού) και της ποσότητας του πόρου που έχει καταναλωθεί (υπολογισθείσα τιμή του αριστερού μέλους του περιορισμού).

Δεσμευτικοί & Μη- Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Οι περιορισμοί με $s_i = 0$ ονομάζονται δεσμευτικοί περιορισμοί (**binding constraints) ΚΑΙ** συμμετέχουν στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης και **η βέλτιστη κορυφή της εφικτής περιοχής είναι η τομή των ευθειών που τους εκφράζουν**.

- Αντίστοιχα οι περιορισμοί με $s_i \geq 0$ ονομάζονται μη δεσμευτικοί (**non-binding constraints**) και δεν συμμετέχουν στον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης.

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης

Πλεονασματικές Μεταβλητές

Η μετατροπή όλων των περιορισμών από ανισότητες σε ισότητες γίνεται

- με την αφαίρεση από τα αριστερά μέλη των περιορισμών των αντίστοιχων βοηθητικών μεταβλητών $e_i, \quad i = 1.....m$ οι οποίες ονομάζονται **πλεονασματικές μεταβλητές** (**surplus variables**) και εκφράζουν τις *ποσότητες κατά τις οποίες έχουν υπερκαλυφθεί οι ελάχιστες απαιτήσεις*.
- Επιπλέον, όλες οι πλεονασματικές μεταβλητές εμφανίζονται και στην αντικειμενική συνάρτηση με **συντελεστή 0** και κατά συνέπεια δεν επηρεάζουν την τιμή της.
- Προφανώς, για όσους περιορισμούς ήταν ήδη ισότητες η τιμή του είναι μηδενική ενώ για τους υπόλοιπους η τιμή του είναι αρνητική (< 0) και ίση με τη διαφορά της ποσότητας που έχει παραχθεί (υπολογισθείσα τιμή του αριστερού μέλους του περιορισμού) και της ελάχιστης απαίτησης παραγωγής (δεξιό μέλος του περιορισμού

Ειδικές Περιπτώσεις

- Προβλήματα με άπειρες λύσεις
- Προβλήματα χωρίς εφικτή λύση
- Μη φραγμένα προβλήματα

Πρόβλημα με άπειρες λύσεις

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 4x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

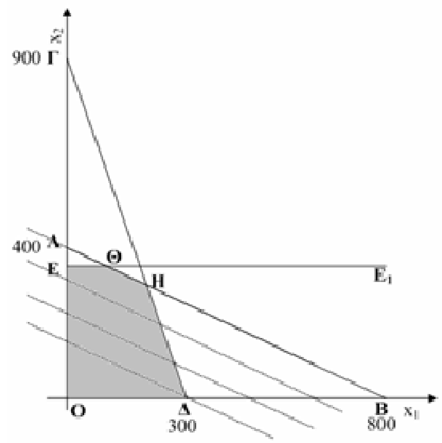
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$

$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Εφικτή Περιοχή- Άπειρες Λύσεις



Πρόβλημα με μη εφικτή περιοχή

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

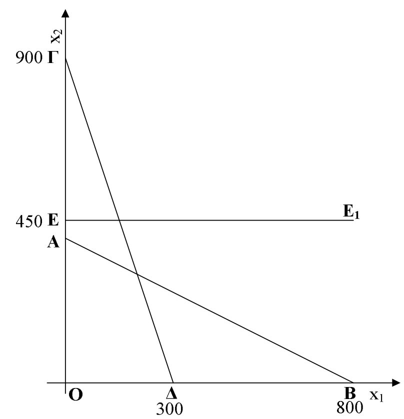
$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$

$$x_2 \geq 450$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

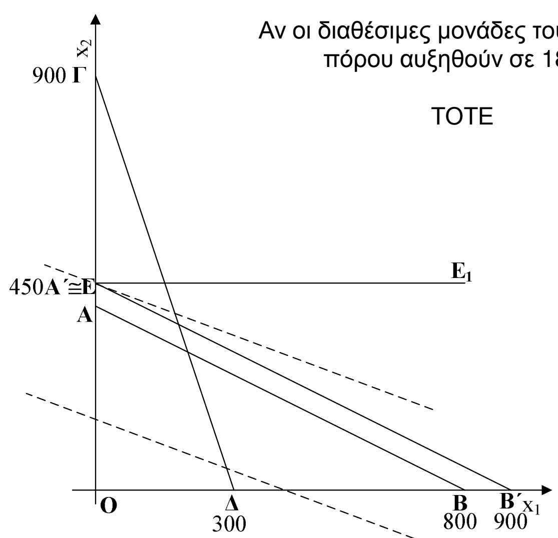
Εφικτή περιοχή το κενό σύνολο



Αλλαγή στο Δεξιό μέλος του περιορισμού

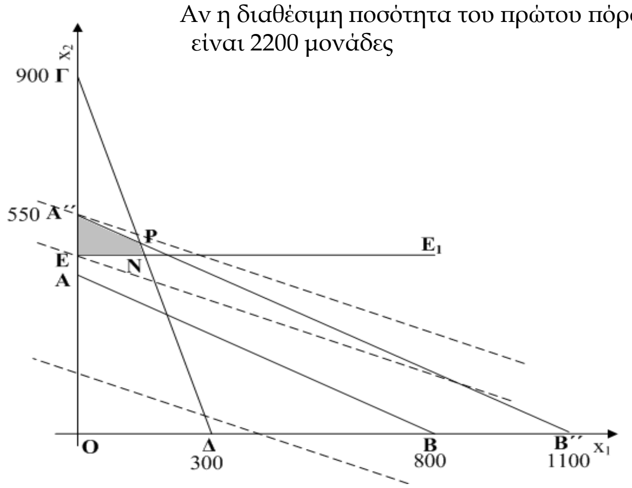
Αν οι διαθέσιμες μονάδες του πρώτου πόρου αυξηθούν σε 1800

ΤΟΤΕ



Αλλαγή στο Δεξιό μέλος του περιορισμού

Αν η διαθέσιμη ποσότητα του πρώτου πόρου είναι 2200 μονάδες



Μη φραγμένο Πρόβλημα

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

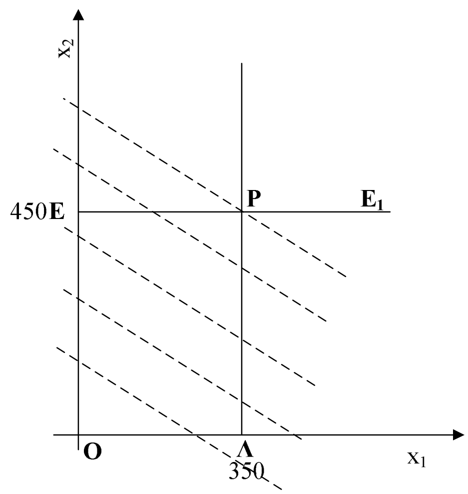
$$x_1 \geq 450$$

$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Μη φραγμένο Πρόβλημα



Ανάλυση Ευαισθησίας

Άρση Αβεβαιότητας??

- Σύμφωνα με την υπόθεση της βεβαιότητας οι τιμές όλων των παραμέτρων του προβλήματος, δηλαδή των αντικειμενικών συντελεστών, των τεχνολογικών συντελεστών και των δεξιών μελών των περιορισμών είναι σταθερές και διατηρούν τις τιμές τους στον χρονικό ορίζοντα του υπό μελέτη προβλήματος.

- Στην πραγματικότητα όμως η υπόθεση αυτή είναι πρακτικά αδύνατο να ισχύει πλήρως, καθώς οι τιμές των παραμέτρων αυτών είναι συνήθως εκτιμήσεις ή προβλέψεις των πραγματικών τιμών που εμπεριέχουν το σφάλμα εκτίμησης/πρόβλεψης και επιπλέον δεν παραμένουν σταθερές διαχρονικά.

…Λύση / Η ανάλυση Ευαισθησίας

- Για το λόγο αυτό είναι πολύ σημαντικό η επίλυση ενός προβλήματος και ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης του να ακολουθείται από την **ανάλυση ευαισθησίας** της λύσης (*sensitivity analysis*).

- Η ανάλυση αυτή διερευνά τις μεταβολές που συμβαίνουν στη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος όταν υπάρχουν μικρές ή μεγαλύτερες μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων του.

- Διερευνά, για παράδειγμα, πως θα μεταβληθεί το συνολικό κέρδος μιας επιχείρησης αν η τιμή πώλησης ενός από τα προϊόντα της αυξηθεί κατά κάποιο συγκεκριμένο ποσό ή ποσοστό η σε ποιο διάστημα μπορεί να κυμαίνεται η τιμή πώλησης ενός άλλου προϊόντος της χωρίς να μεταβληθεί το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής της.

Θα μελετήσουμε τις **επιπτώσεις** που θα έχουν

1) στη **βέλτιστη λύση** και
2) στην **τιμή της αντικειμενικής** ενός προβλήματος

ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ

I. στους αντικειμενικούς συντελεστές και
II. σ τα δεξιά μέλη των περιορισμών.

Ποια η διαφορά βέλτιστης λύσης και τιμής αντικειμενικής συνάρτησης???

Τι σημαίνει μεταβολή σε κάποιον *αντικειμενικό συντελεστή* **????**

ΑΛΛΑΓΗ στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης

Δηλαδή?????

Μπορεί κάτι τέτοιο να οδηγήσει σε διαφορετική επιλογή βέλτιστης κορυφής

Δηλαδή????????

ΜΕΤΑΒΟΛΗ της βέλτιστης λύσης.

Εύρος ευαισθησίας του αντικειμενικού συντελεστή

ΟΠΟΤΕ???

Το ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε **το διάστημα** **μέσα στο οποίο** μπορεί να **μεταβάλλεται** **η τιμή ενός αντικειμενικού συντελεστή, όταν οι τιμές όλων των άλλων παραμέτρων παραμένουν σταθερές, ώστε να** **μη μεταβληθεί** **η βέλτιστη λύση του προβλήματος**.

Το διάστημα αυτό ονομάζεται **εύρος ευαισθησίας του αντικειμενικού συντελεστή** (*objective function coefficient sensitivity range*).

Προφανώς, όσο μικρότερο είναι το εύρος αυτό τόσο πιο ευαίσθητη θεωρείται η λύση σε αλλαγές του συγκεκριμένου συντελεστή.

Τι σημαίνει **μεταβολές** στο *δεξιό μέλος κάποιου περιορισμού*????

Παράλληλη μετατόπιση της αντίστοιχης περιοριστικής ευθείας,

είτε προς τα δεξιά

είτε προς τα αριστερά της τρέχουσας θέσης της

Γεγονός που μπορεί να οδηγήσει, ανάλογα και με

αν ο περιορισμός είναι δεσμευτικός ή όχι,

σε

1. **μεταβολή της εφικτής** περιοχής και
2. **μετατόπιση τη βέλτιστης** κορυφής δηλαδή της βέλτιστης λύσης

Εύρος ευαισθησίας του δεξιού μέλους του περιορισμού

Το ζητούμενο στην περίπτωση αυτή είναι να προσδιορίσουμε το **διάστημα** μέσα στο οποίο μπορεί να μεταβάλλεται η τιμή του δεξιού μέλους του περιορισμού, όταν οι τιμές όλων των άλλων παραμέτρων παραμένουν σταθερές, ώστε να μη μεταβληθεί η βέλτιστη λύση του.

Το διάστημα αυτό ονομάζεται **εύρος ευαισθησίας του δεξιού μέλους του περιορισμού** (*right hand side sensitivity range*).

Προφανώς, όπως και στη προηγούμενη περίπτωση, όσο μικρότερο είναι το εύρος αυτό τόσο πιο ευαίσθητη θεωρείται η λύση σε αλλαγές του συγκεκριμένου συντελεστή.

Εφαρμογή σε Πρόβλημα Μεγιστοποίησης

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

με περιορισμούς δομής

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$

$$x_2 \leq 350$$

και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές

Το ζητούμενο εδώ είναι να προσδιορισθεί, για κάθε αντικειμενικό συντελεστή, το εύρος ευαισθησίας του.

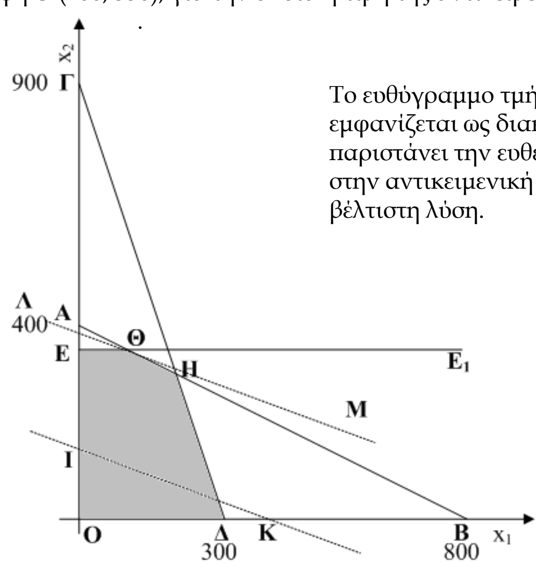
Αντικειμενική Συνάρτηση $Z = 3x_1 + 8x_2$

$$\Leftrightarrow 8x_2 = -3x_1 + Z \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{8}x_1 + \frac{Z}{8} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = -\frac{3}{8}}$$

Άρα πρέπει να προσδιορίσουμε τα όρια του διαστήματος στα οποία μπορεί να παίρνει τιμές η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Προσδιορισμός Εφικτής Περιοχής

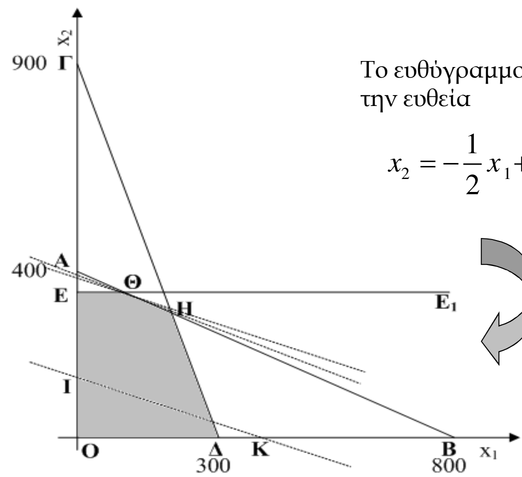
Παρατηρούμε την περιοχή ΟΕΘΗΔ των εφικτών λύσεων και τη βέλτιστη κορυφή Θ (100, 350), για την οποία η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι .



Το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ, το οποίο εμφανίζεται ως διακεκομμένο, παριστάνει την ευθεία που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση για βέλτιστη λύση.

Περιστροφή της Ζ με κέντρο Θ κατά την φόρα των δεικτών του ωρολογίου

Όταν κινείται κατά την φορά των δεικτών του ωρολογίου η κορυφή Θ θα συνεχίσει να είναι η βέλτιστη λύση μέχρι η αντικειμενική συνάρτηση να συμπέσει με το ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ.

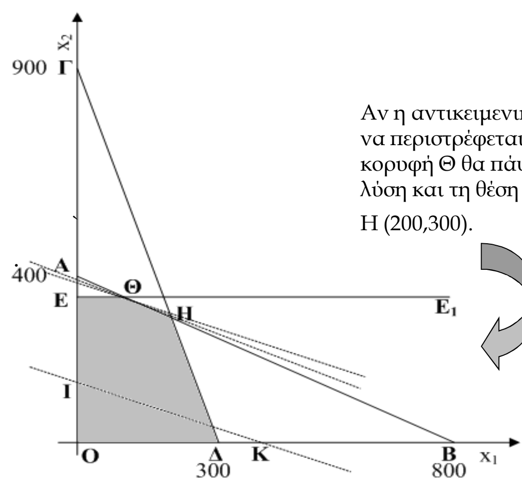


Το ευθύγραμμο τμήμα ΘΗ παριστάνει την ευθεία

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 400 \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

Περιστροφή της Ζ με κέντρο Θ κατά την φόρα των δεικτών του ωρολογίου

- Όταν συμβεί αυτό θα υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις και συγκεκριμένα οι κορυφές Θ και Η καθώς και **όλα τα (άπειρα) σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΘΗ.**

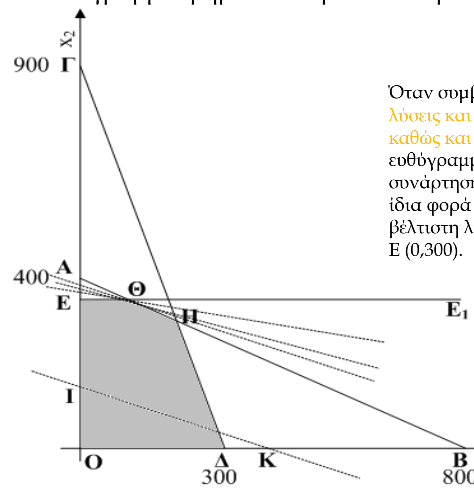


Αν η αντικειμενική συνάρτηση συνεχίσει να περιστρέφεται με την ίδια φορά, η κορυφή Θ θα πάψει να είναι η βέλτιστη λύση και τη θέση της θα πάρει η κορυφή Η (200,300).

Περιστροφή της Ζ με κέντρο Θ κατά φόρα αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου

Η κορυφή Θ θα συνεχίσει να είναι η βέλτιστη λύση μέχρι η αντικειμενική συνάρτηση να συμπέσει με το ευθύγραμμο τμήμα ΕΘ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΘ παριστάνει την ευθεία

$x_2 = -0x_1 + 350$ $\qquad \lambda_2 = 0$



Όταν συμβεί αυτό θα υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις και συγκεκριμένα οι κορυφές Ε και Θ καθώς και όλα τα (άπειρα)σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΕΘ. Αν η αντικειμενική συνάρτηση συνεχίσει να περιστρέφεται με την ίδια φορά η κορυφή Θ θα πάψει να είναι η βέλτιστη λύση και τη θέση της θα πάρει η κορυφή Ε (0,300).

Που διατηρείται η βέλτιστη λύση?

- Ανεξάρτητα από πού προέρχεται η μεταβολή, όσο η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, δηλαδή στο διάστημα που **ορίζεται από τις κλίσεις των ευθειών που αντιστοιχούν στους δύο δεσμευτικούς περιορισμούς**, τότε η λύση που έχει βρεθεί (κορυφή Θ) θα παραμένει βέλτιστη, ενώ στα **άκρα του** διαστήματος θα υπάρχουν άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.

- Έχοντας προσδιορίσει τα όρια του διαστήματος, στο οποίο μπορεί να παίρνει τιμές *η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση*, θα προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του εύρους ευαισθησίας για κάθε αντικειμενικό συντελεστή, δηλαδή του διαστήματος στο οποίο μπορεί να κινείται χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση.

Αντικειμενικός συντελεστής c_1 της μεταβλητής x_1

$$-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{c_1}{8} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{c_1}{8} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq c_1 \leq 4$$

- Όταν η τιμή πώλησης του προϊόντος κινείται στο διάστημα [0,4] η κορυφή Θ (100,350) παραμένει βέλτιστη
- Στα άκρα του διαστήματος αυτού έχουμε, εκτός της Θ, άπειρες ακόμη βέλτιστες εναλλακτικές λύσεις λόγω σύμπτωσης της αντικειμενικής συνάρτησης με τις δεσμευτικές περιοριστικές ευθείες $x_2 = 350$ και $2x_1 + 4x_2 = 1600$ αντίστοιχα.

- **ΠΡΟΣΟΧΗ** *Η **βέλτιστη** λύση **δεν** αλλάζει, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή το συνολικό κέρδος της επιχείρησης, **μεταβάλλεται***

Μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών

Η επίδραση που έχει στη λύση του προβλήματος μία μεταβολή στο δεξιό μέλος ενός περιορισμού διαφέρει ανάλογα με το αν ο περιορισμός του οποίου το δεξιό μέλος μεταβάλλεται είναι **δεσμευτικός η όχι** θα εξετάσουμε την περίπτωση

- των δεσμευτικών περιορισμών και
- του μη δεσμευτικού.

Μεταβολή σε δεξιό μέλος δεσμευτικού περιορισμού

$$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

$$b_1 = 1600$$

Η περιοριστική ευθεία η οποία αντιστοιχεί σε αυτόν είναι

$$2x_1 + 4x_2 = b_1 \text{ ή } x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{b_1}{4}$$

Καθώς το b_1 αρχίζει να μεταβάλλεται *η κλίση* της περιοριστικής ευθείας παραμένει **σταθερή** και ίση με -1/2, αφού δεν επηρεάζεται από το b_1.

Η ευθεία ΑΒ αρχίζει να μετατοπίζεται παράλληλα είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά της τρέχουσας θέσης, ανάλογα με το αν το b_1 αυξάνεται ή μειώνεται.

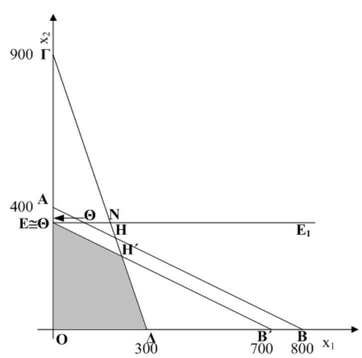
Κατά τη μετατόπιση αυτή το σημείο Θ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΕΝ.

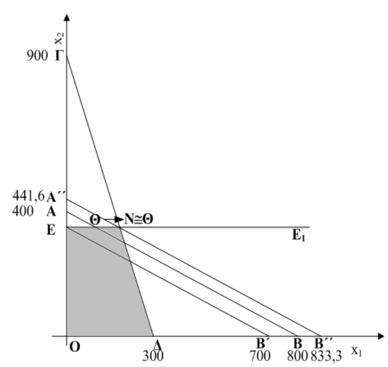
Μετακίνηση του Θ πάνω στο ΕΝ

Στο σημείο Ε (0,350) έχουμε b_1=1400

Στο σημείο Ν 1100/6 , 350έχουμε b_1=1766,67

Άρα το εύρος ευαισθησίας του είναι το διάστημα [1400 , 1766,67]





Σκιώδης τιμής

Η **βελτίωση της αντικειμενικής** συνάρτησης όταν το **δεξιό μέλος** ενός περιορισμού αυξηθεί **κατά μία μονάδα**, παραμένοντας όμως μέσα **στο εύρος ευαισθησίας του**, δηλαδή η οριακή αξία (marginal value) μιας μονάδας του αντίστοιχου πόρου, ονομάζεται **σκιώδης τιμή** (shadow price) ή δυϊκή τιμή (dual price) του αντίστοιχου πόρου.

Μεταβολή σε δεξιό μέλος μη-δεσμευτικού περιορισμού

$$6x_1+2x_2=b_2 \Leftrightarrow 2x_2=6x_1+b_2 \Leftrightarrow x_2=-3x_1+b_2/2$$

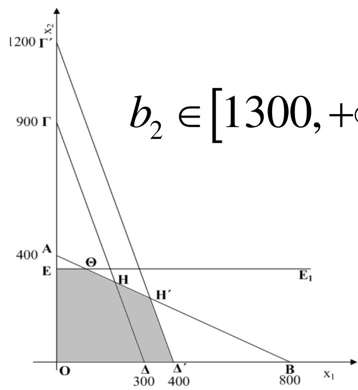
- Καθώς το b_2 αρχίζει να μεταβάλλεται, η κλίση της περιοριστικής ευθείας παραμένει σταθερή και η ευθεία αρχίζει να μετατοπίζεται παράλληλα, είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά της τρέχουσας θέσης της, ανάλογα με το αν το b_2 αυξάνεται και μειώνεται.
- Κατά τη μετατόπιση αυτή το σημείο Θ, δηλαδή η βέλτιστη λύση, δε μετακινείται καθώς **η ευθεία ΓΔ δε μετέχει στον καθορισμό της θέσης του.**

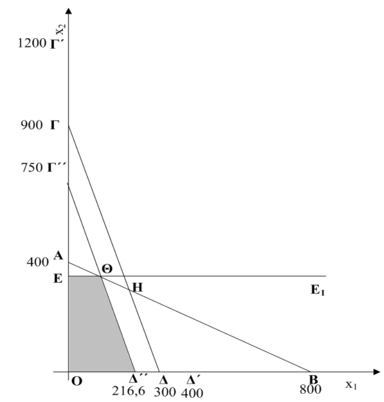
Εύρος ευαισθησίας b_2

- Όταν το αυξάνεται η εφικτή περιοχή επεκτείνεται.
- Αυτό όμως δεν έχει καμία επίπτωση στη βέλτιστη λύση, η οποία εξακολουθεί να είναι το σημείο Θ, καθώς η περιοριστική ευθεία ΓΔ δεν συμμετέχει στον προσδιορισμό της.

- Όταν το b_2 μειώνεται η εφικτή περιοχή συρρικνώνεται. Αυτό δεν έχει καμία επίπτωση στη βέλτιστη λύση όσο η μετακινούμενη ευθεία ΓΔ παραμένει μη περιοριστική.

$$b_2 \in [1300, +\infty)$$





Συμπληρωματική χαλαρότητα

- Όταν ένας περιορισμός είναι δεσμευτικός η σκιώδης τιμή του αντίστοιχου πόρου είναι μη μηδενική αλλά η χαλαρή μεταβλητή που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι μηδενική.
- Αντίστοιχα, όταν ο περιορισμός είμαι μη δεσμευτικός, η σκιώδης τιμή του αντίστοιχου πόρου είναι μηδενική αλλά η χαλαρή μεταβλητή που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι μη μηδενική.
- Κατά συνέπεια, σε κάθε περίπτωση το γινόμενο, της χαλαρής μεταβλητής ενός περιορισμού επί την σκιώδη τιμή του αντίστοιχου πόρου, είναι μηδενικό. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **συμπληρωματική χαλαρότητα** (*complementary slackness*).

Ευκαιριακό Κόστος

- Κατά την επίλυση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού, διαπιστώνεται ότι η βέλτιστη λύση του περιέχει μεταβλητές απόφασης με μηδενική τιμή
- Η είσοδος μιας τέτοιας, μη βασικής μεταβλητής, στη βάση και η παραγωγή μιας μονάδας της θα επιβαρύνει, την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά ένα ποσό που ονομάζεται κόστος ευκαιρίας (opportunity cost) ή μειωμένο κόστος (reduced cost).
- Η επιβάρυνση αυτή είναι **μείωση** της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης στην περίπτωση μεγιστοποίησης και **αύξηση** της τιμής της, σε περίπτωση ελαχιστοποίησης.

Ευκαιριακό Κόστος

- Το κόστος ευκαιρίας μιας **μη βασικής μεταβλητής**, είναι το **ποσό** κατά το οποίο θα **επιβαρυνθεί η τιμή** της αντικειμενικής συνάρτησης, αν η μεταβλητή αυτή καταστεί **βασική** και παραχθεί μία μονάδα της.
- Το κόστος ευκαιρίας για τις ***βασικές μεταβλητές είναι μηδενικό***.

Ευκαιριακό Κόστος

- Το κόστος ευκαιρίας (oc_j) μιας μη βασικής μεταβλητής x_j δίνεται από τον τύπο

$$oc_j = c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot m_i$$

- Η τιμή του κόστους ευκαιρίας μιας μη βασικής μεταβλητής μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

- Βελτίωση του αντικειμενικού συντελεστή θεωρείται εκείνη η μεταβολή του η οποία αυξάνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, στην περίπτωση προβλήματος μεγιστοποίησης και τη μειώνει στην περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποίησης.