ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Γεώργιος Τσεκούρας

Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πλευρικά Όρια Συνάρτησης

Ορισμός
Για να υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ με $f: R \to R$ όσο το x τείνει στο σημείο $\alpha \in R$ πρέπει το όριο της συνάρτησης όσο το x προσεγγίζει το α από αριστερά να είναι ίσο με το όριο της συνάρτησης όσο το x προσεγγίζει το α από τα δεξιά.

Το όριο της συνάρτησης όσο το x προσεγγίζει το α από αριστερά συμβολίζεται ως: $\lim_{x \to a^-} f(x)$
Το όριο της συνάρτησης όσο το x προσεγγίζει το α από δεξιά συμβολίζεται ως: $\lim_{x \to a^+} f(x)$

Άρα, ο παραπάνω ορισμός μας λέει ότι για να υπάρχει το όριο $\lim_{x \to \alpha} f(x)$ θα πρέπει $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.
Αυτό σημαίνει ότι όταν υπάρχει το όριο και είναι ίσο με L τότε ισχύει ότι:

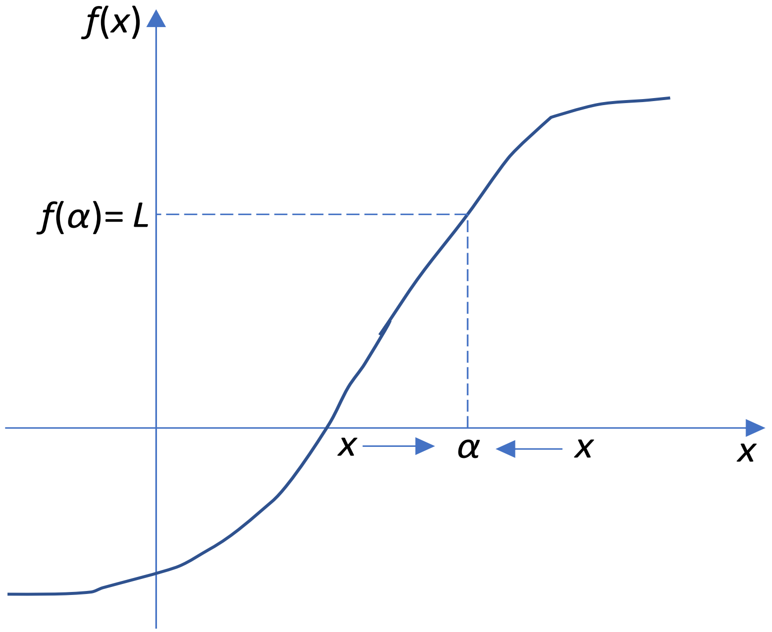
$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to \alpha} f(x) = L}$$

Το όριο $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ονομάζεται αριστερό πλευρικό όριο και το όριο $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ονομάζεται δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης στο σημείο α.

Πλευρικά Όρια Συνάρτησης

Παραδείγματα:

1). Έστω η συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Όσο το x προσεγγίζει το σημείο α από αριστερά το όριο της συνάρτησης είναι $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

Με το ίδιο τρόπο, όσο το x προσεγγίζει το σημείο α από δεξιά το όριο της συνάρτησης είναι $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Οπότε συμπεραίνουμε ότι όριο της συνάρτησης στο σημείο α υπάρχει και είναι ίσο με:

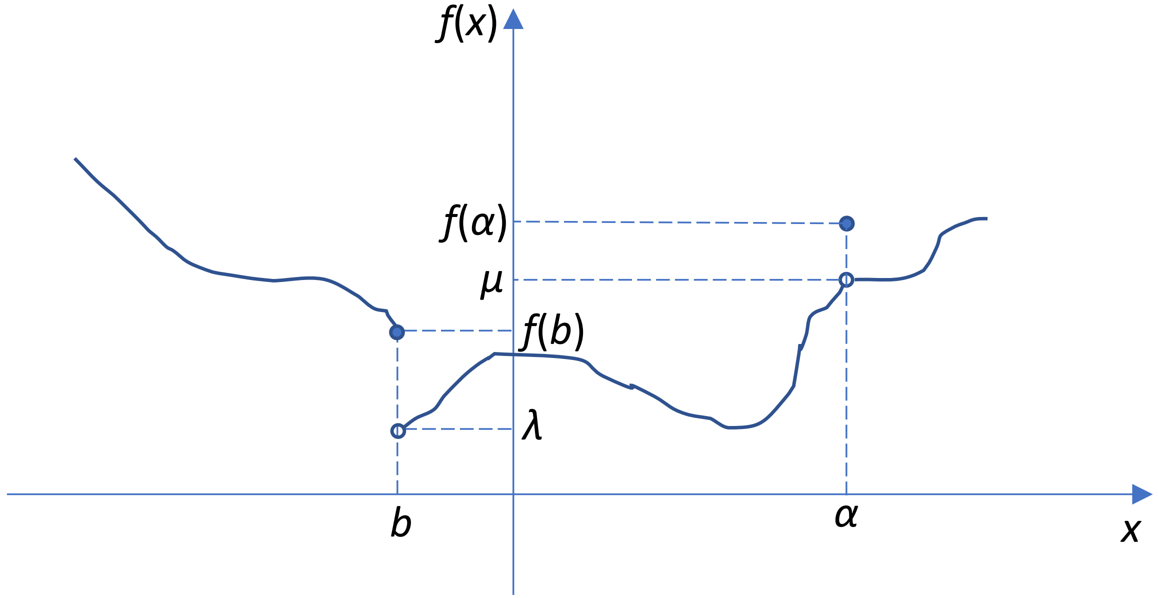
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Τέλος παρατηρήστε ότι επιπλέον η συνάρτηση είναι και συνεχής στο σημείο α αφού $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L = f(a)$

Πλευρικά Όρια Συνάρτησης

Παραδείγματα:

2). Έστω η συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Μελετώντας το παραπάνω σχήμα μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω.

Για την συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο b έχουμε τα εξής:

$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ και $\lim_{x \to b^+} f(x) = \lambda$

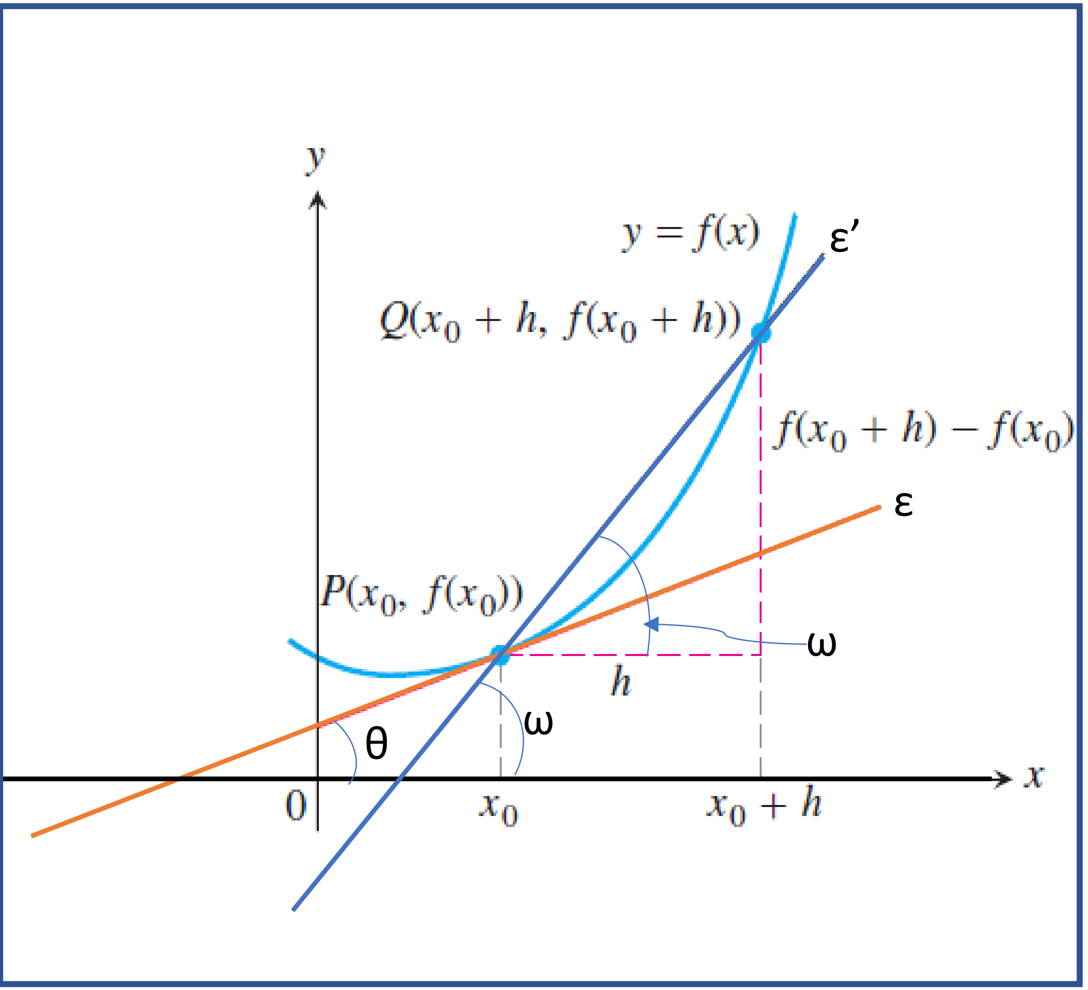
Άρα $\lim_{x \to b^-} f(x) \neq \lim_{x \to b^+} f(x)$ και συνεπώς το όριο $\lim_{x \to b} f(x)$ <u>δεν υπάρχει</u> και η συνάρτηση στο σημείο b <u>δεν είναι συνεχής</u>.

Για την συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο α έχουμε τα εξής:

$\lim_{x \to \alpha^-} f(x) = \mu$ και $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \mu$ και συνεπώς το όριο $\lim_{x \to b} f(x)$ <u>υπάρχει</u> και είναι ίσο με $\lim_{x \to b} f(x) = \mu$,

ενώ η συνάρτηση <u>δεν είναι</u> συνεχής γιατί $\lim_{x \to b} f(x) = \mu \neq f(a)$

Παράγωγος Συνάρτησης σε ένα Σημείο



<u>Υπολογισμός παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0</u>

Για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 εκτελούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1). Φέρνουμε την εφαπτομένη ευθεία ε στο σημείο x_0, η οποία σχηματίζει την γωνία θ με τον άξονα x.

Βήμα 2). Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 ορίζεται ως η εφαπτομένη της γωνίας θ,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \tan\theta \qquad (1)$$

Βήμα 3). Φέρνουμε μία τυχαία ευθεία ε’, η οποία σχηματίζει την γωνία ω με τον άξονα x.

Με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα, η εφαπτομένη της ω είναι,

$$\tan\omega = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (2)$$

Βήμα 4). Παρατηρούμε ότι όταν $h \to 0$ η ευθεία ε’ τείνει να γίνει ίδια με την ευθεία ε και άρα $\omega \to \theta$ που σημαίνει ότι,

$$\tan\theta = \lim_{h\to 0} \tan\omega = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (3)$$

Βήμα 5). Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) προκύπτει ο ορισμός της παραγώγου ως εξής:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (4)$$

Παράγωγος Συνάρτησης σε ένα Σημείο

Ορισμός

Με βάση το παραπάνω σχήμα, η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 συμβολίζεται ως $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ και ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Άρα για να υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό θα πρέπει να υπάρχει το όριο στο δεύτερο μέρος της παραπάνω εξίσωσης με όρους πλευρικών ορίων, όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Όταν υπάρχει η παράγωγος μιας συνάρτησης σε έναν σημείο θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι <u>παραγωγίσιμη</u> στο σημείο αυτό.

Παράγωγος Συνάρτησης σε ένα Σημείο

Θεώρημα

Αν μία συνάρτηση $f(x)$ έχει παράγωγο στο σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Με βάση τον ορισμό της συνέχειας, πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Για τους αριθμούς x και x_0 υπάρχει ένας αριθμός h τέτοιος ώστε $x = x_0 + h$.

Οπότε όταν το h προσεγγίζει το μηδέν τότε το x προσεγγίζει το x_0, δηλ.: $h \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$.

Στην συνέχεια πρέπει να εμπλέξουμε τους αριθμούς $f(x)$ και $f(x_0)$, πράγμα το οποίο επιτελείται ως εξής:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{h} h \Rightarrow \lim_{h \to 0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{h} \lim_{h \to 0} h = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0} 0 = 0$$

Άρα

$$\lim_{h \to 0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x \to x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Το παραπάνω συμπέρασμα υποδηλώνει ότι το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Η Παράγωγος ως Συνάρτηση

Η παραπάνω ανάλυση αναφέρεται στην παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ σε ένα μόνο σημείο.

Με την ίδια φιλοσοφία, η παράγωγος μιας συνάρτησης f μπορεί να οριστεί και αυτή ως συνάρτηση αν γενικεύσουμε την εξίσωση της παραγώγου για όλα τα σημεία στα οποία ορίζεται η συνάρτηση f.

Αυτό γίνεται απλά με το να αντικαταστήσουμε το x_0 με ένα οποιοδήποτε x, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της f όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η παραπάνω εξίσωση ορίζει την παράγωγο ως συνάρτηση της μεταβλητής x και αποτελεί τον γενικό ορισμό της παραγώγου.

<u>Παρατήρηση:</u> Με βάση το θεώρημα που αποδείχθηκε προηγουμένως, όταν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της τότε είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού.

Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

1). Έστω μία σταθερή συνάρτηση $f(x) = a$. Τότε,

$$\frac{df}{dx} = \frac{da}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha - \alpha}{h} = 0$$

2). Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Τότε

$$\frac{df}{dx} = \frac{dx}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

3). Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Τότε

$$\frac{df}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - x)(x + h + x)}{h} = 2x$$

4). Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $a \in R$. Τότε με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dx^a}{dx} = \alpha x^{a-1}$$

Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

5). Έστω η συνάρτηση $f(x) = bx^a$ με $a, b \in R$. Τότε με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα,

$$\frac{d}{dx}(bx^a) = b\alpha x^{a-1}$$

6). Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση αυτή γράφεται ως δύναμη, $f(x) = x^{1/2}$. Τότε με βάση τις προηγούμενες περιπτώσεις,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

7). Παράγωγοι ημιτόνου και συνημίτονου. Μπορούν να αποδειχθούν τα παρακάτω:

$$\frac{d}{dx}(sinx) = cosx, \quad \frac{d}{dx}(cosx) = -sinx$$

8). Παράγωγος εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης. Μπορούν να αποδειχθούν τα παρακάτω:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x} \text{ για } x > 0$$

Παράγωγος Αθροίσματος Συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f και g, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x. Τότε, για το άθροισμά τους ισχύει ότι,

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

Παραδείγματα

1). Έστω η συνάρτηση $h(x) = 4x^3 + 2x^5$. Θέτοντας $f(x) = 4x^3$ και $g(x) = 2x^5$ παρατηρούμε ότι $h(x) = f(x) + g(x)$. Οπότε η παράγωγος της $h(x)$ υπολογίζεται αν υπολογίσουμε τις παραγώγους των $f(x)$ και $g(x)$ και τις αθροίσουμε,

$$\frac{d}{dx}(h(x)) = \frac{d}{dx}(4x^3) + \frac{d}{dx}(2x^5) = 12x^2 + 10x^4$$

2). Με την ίδια λογική έχουμε τα παρακάτω:

$$\frac{d}{dx}(cosx + 2sinx) = \frac{d}{dx}(cos\ x) + 2\frac{d}{dx}(sinx) = -sinx + 2cosx$$

$$\frac{d}{dx}(3x^4 + 4\text{cosx}) = 12x^3 - 4sinx$$

Παράγωγος Γινομένου Συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f και g, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x. Τότε η παράγωγος του γινομένου τους υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}\, g + f\,\frac{dg}{dx}$$

Παραδείγματα

1). Έστω η συνάρτηση $f(x) = xcosx$. Η παράγωγός της υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \frac{dx}{dx}\, cosx + x\frac{d}{dx}(cosx) = cosx - xsinx$$

2). Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x sinx$. Η παράγωγός της υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \frac{de^x}{dx}\, sinx + e^x\frac{d}{dx}(sinx) = e^x sinx + e^x cosx = e^x(sinx + cosx)$$

3). Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x \ln(x)$ με $x > 0$. Η παράγωγός της υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \frac{de^x}{dx}\ln x + e^x\frac{d}{dx}(\ln x) = e^x \ln x + e^x\frac{1}{x} = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

Παράγωγος Πηλίκου Συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f και g, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x, με $g(x) \neq 0$.
Τότε η παράγωγος του πηλίκου τους υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Παραδείγματα:

1). Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \tan x$. Η συνάρτηση αυτή είναι $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ με $\cos x \neq 0$. Οπότε χρησιμοποιούμε τον παραπάνω κανόνα της παραγώγου του πηλίκου:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x}) = \frac{\frac{d \sin x}{x}\cos x - \sin x\frac{d \cos x}{dx}}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

2). Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ με $x > 0$. Εργαζόμαστε ως εξής:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{dln\ x}{dx}x^3 - \ln x\frac{dx^3}{dx}}{(x^3)^2} = \frac{\frac{1}{x}x^3 - 3x^2\ln x}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^3}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1). Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x) = (2x^5 + 3x)(2x^2 + x\cos x)$$

Λύση. Η συνάρτηση είναι γινόμενο αθροισμάτων. Επίσης, το δεύτερο μέρος του αθροίσματος της δεύτερης παρένθεσης είναι γινόμενο. Θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες για το άθροισμα και γινόμενο παραγώγων. Καταρχήν εφαρμόζουμε τον κανόνα του γινομένου για τις δύο παρενθέσεις,

$$\frac{df}{dx} = (\frac{d}{dx}(2x^5 + 3x))\,(2x^2 + x\cos x) + (2x^5 + 3x)(\frac{d}{dx}(2x^2 + x\cos x)) \quad (1)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την πρώτη από τις παραγώγους που προέκυψαν,

$$\frac{d}{dx}(2x^5 + 3x) = 10x^4 + 3 \quad (2)$$

Η δεύτερη παράγωγος περιέχει άθροισμα και γινόμενο και υπολογίζεται ως εξής,

$$\frac{d}{dx}(2x^2 + x\cos x) = 4x + \frac{dx}{dx}\cos x + x\frac{d(\cos x)}{dx} = 4x + \cos x - x\sin x \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (2) και (3) στην (1) παίρνουμε,

$$\frac{df}{dx} = (10x^4 + 3)\,(2x^2 + x\cos x) + (2x^5 + 3x)(\,4x + \cos x - x\sin x) \quad (4)$$

Μετά από πράξεις προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα,

$$\frac{df}{dx} = (28 - 2\sin x)\,x^6 + (12\cos x)\,x^5 + (18 - 3\sin x)\,x^2 + (6\cos x)\,x$$

Ασκήσεις

Άσκηση 2). Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x) = 3e^x(\tan x + 2\ln x) \text{ με } x > 0$$

Λύση. Η συνάρτηση συνδυάζει πολλαπλασιασμό και άθροισμα συναρτήσεων.

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(3e^x)}{dx}\ (\tan x + 2\ln x) + 3e^x\,\frac{d(\tan x + 2\ln x)}{dx} \qquad (1)$$

Η πρώτη από τις παραγώγου στην (1) υπολογίζεται εύκολα ως εξής:

$$\frac{d(3e^x)}{dx} = 3e^x \qquad (2)$$

Αντιστοίχως η δεύτερη είναι άθροισμα συναρτήσεων και υπολογίζεται ως εξής,

$$\frac{d(\tan x + 2\ln x)}{dx} = \frac{d(\tan x)}{dx} + \frac{d(2\ln x)}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2} + \frac{2}{x} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (2) και (3) στην (1) παίρνουμε,

$$\frac{df}{dx} = 3e^x\ (\tan x + 2\ln x) + 3e^x\left(\frac{1}{(\cos x)^2} + \frac{2}{x}\right) = 3e^x\left(\tan x + 2\ln x + \frac{1}{(\cos x)^2} + \frac{2}{x}\right) \quad (4)$$

Ασκήσεις

Άσκηση 3). Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x\ \tan\ x + 3}{2x}$$

Λύση

Η συνάρτηση είναι πηλίκο όπου ο αριθμητής περιέχει γινόμενο και άθροισμα.

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(x \tan x + 3)\ \ (2x) - (x \tan x + 3)\ \frac{d}{dx}(2x)}{(2x)^2} \quad (1)$$

Η πρώτη από τις παραγώγους του αριθμητή υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d}{dx}(x \tan x\ \ + 3) = \frac{dx}{dx}\tan x + x\ \frac{d(\tan x)}{dx} = \tan x + \frac{x}{(\cos x)^2} \quad (2)$$

Η δεύτερη από τις παραγώγους του αριθμητή υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{d}{dx}(2x) = 2\frac{dx}{dx} = 2 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (2) και την (3) στην (1) παίρνουμε,

$$\frac{df}{dx} = \frac{(\tan x + \frac{x}{(\cos x)^2})\ 2x - 2(x \tan x + 3)}{(2x)^2} = \frac{2x \tan x + \frac{2x}{(\cos x)^2} - 2x \tan x - 6}{(2x)^2} = \frac{(\frac{x}{\cos x})^2 - 3}{2x^{\ 2}}$$

Καλό Απόγευμα