ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Γεώργιος Τσεκούρας

Καθηγητής
Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Βασικές Έννοιες Πινάκων

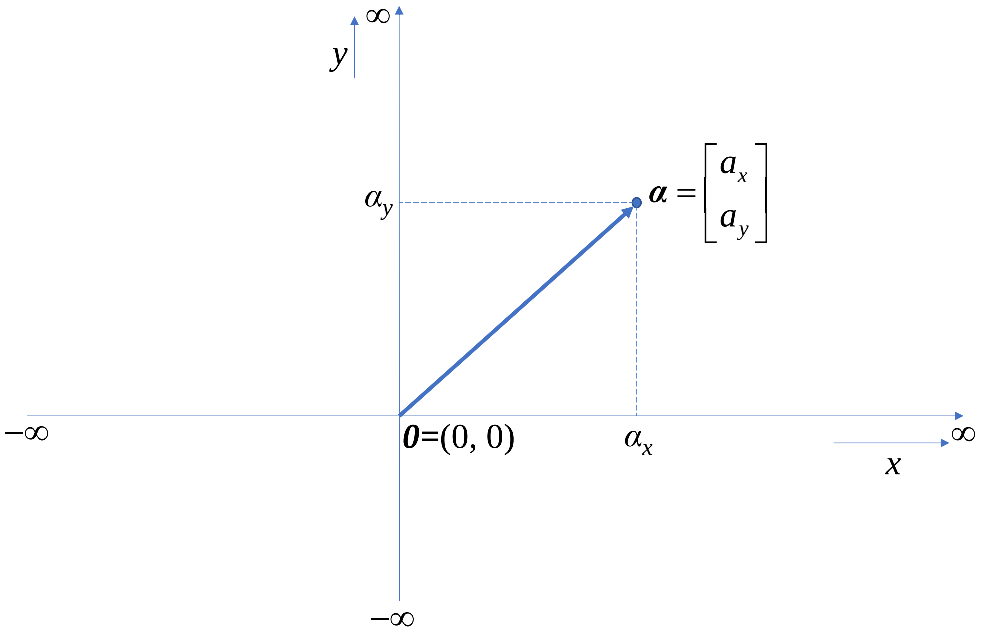
Μονοδιάστατοι Πίνακες

Διάνυσμα: Κάθε σημείο $\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_x, \alpha_y\right)$ του Καρτεσιανού συστήματος (δηλ. ενός δυσδιάστατου χώρου) ορίζει ένα διάνυσμα το οποίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το εν λόγω σημείο (άρα έχει συγκεκριμένη φορά).

Στο Σχήμα 1 φαίνεται το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix}$.

Όπως παρατηρούμε, το διάνυσμα αποτελείται από δύο τιμές, κάτι που είναι λογικό γιατί είναι σημείο στον δυσδιάστατο χώρο. Οι τιμές αυτές είναι οι συντεταγμένες του εν λόγω σημείου.

Προσέξτε ότι το σημείο $\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ έχει και αυτό δύο τιμές.



Σχήμα 1. Ένα σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο αυτό.

Συμπέρασμα: Ένα διάνυσμα το αναπαριστούμε με δύο τιμές (δηλ. τις συντεταγμένες του) μέσα σε αγκύλες την μία κάτω από την άλλη. Εν συντομία η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται ***μονοδιάστατος πίνακας*** με δύο τιμές.

Βασικές Έννοιες Πινάκων

Μονοδιάστατοι Πίνακες

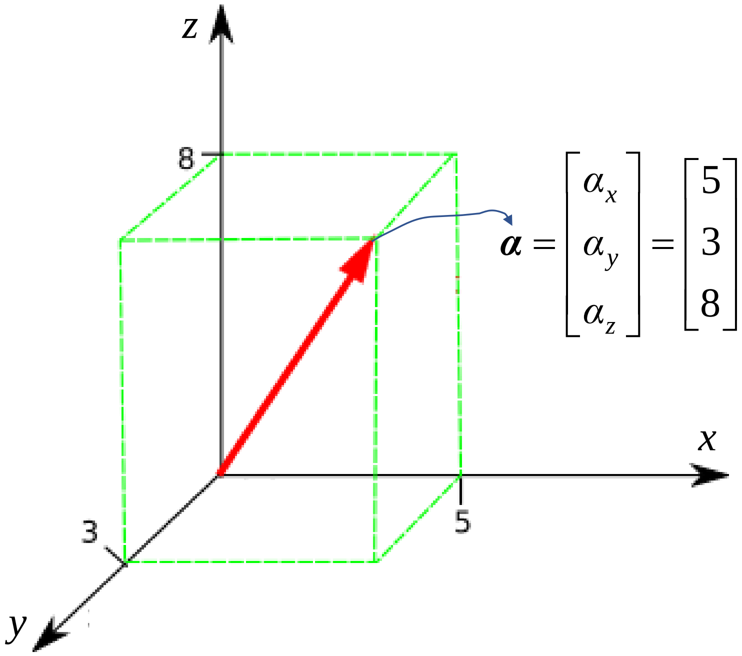
Το ίδιο συμπέρασμα παίρνουμε και στον τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων όπου τώρα ένα σημείο έχει τρεις συντεταγμένες. Στο Σχήμα 2 το σημείο $\boldsymbol{\alpha}$ αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα και γράφεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \text{ με } \alpha_x = 5,\ \alpha_y = 3,\ \alpha_z = 8.$$

Στην περίπτωση αυτή το σημείο αναπαρίσταται με ένα ***μονοδιάστατο πίνακα*** τριών τιμών.

Στην περίπτωση που έχουμε p διαστάσεις, ένα σημείο στον p-διάστατο χώρο θα έχει p συντεταγμένες και άρα θα αναπαρίσταται με έναν ***μονοδιάστατο πίνακα***, ο οποίος περιέχει p τιμές

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_p \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Σχήμα 2. Ένα σημείο του τρισδιάστατου χώρου αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο αυτό.

Ορισμός: Ένας μονοδιάστατος πίνακας $\boldsymbol{A}$ διάστασης $N \times 1$ αποτελείται από N αριθμούς που καταχωρούνται σε μία στήλη ή μία γραμμή,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \end{bmatrix}$$

Βασικές Έννοιες Πινάκων

Δυσδιάστατοι Πίνακες

Έστω ότι έχω δύο διανύσματα στο δυσδιάστατο σύστημα συντεταγμένων

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} \text{ και } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

Μπορώ να τα αναπαραστήσω και τα δύο με έναν ***δυσδιάστατο πίνακα*** ως εξής:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_x & b_x \\ \alpha_y & b_y \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A έχει 2 γραμμές και 2 στήλες.
Άρα έχει δύο διαστάσεις και γι' αυτό ονομάζεται δυσδιάστατος με διάσταση 2×2.

Αντίστοιχα, αν "ενώσω" τρία σημεία $\boldsymbol{\alpha}, b$ του δυσδιάστατου συστήματος συντεταγμένων θα πάρω έναν ***δυσδιάστατο πίνακα*** με 2 γραμμές και 3 στήλες και θα λέμε ότι έχει διάσταση 2×3.

Εκτείνοντας την παραπάνω ανάλυση με περισσότερα σημεία που βρίσκονται σε συστήματα συντεταγμένων με πολλές διαστάσεις, μπορώ να πάρω δυσδιάστατους πίνακες με πολλές γραμμές και πολλές στήλες.

Ορισμός: Ένας δυσδιάστατος πίνακας Α διάστασης $n\times m$ είναι μία διάταξη αριθμών τοποθετημένοι σε γραμμές και στήλες και αναπαρίσταται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Οι αριθμοί a_{ij} με δείκτες $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, m$ ονομάζονται στοιχεία του πίνακα.

Έτερος συμβολισμός του πίνακας είναι: $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$.

Είδη Πινάκων

Είδη Πινάκων

1. Μονοδιάστατος Πίνακας

Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, ένας μονοδιάστατος πίνακας έχει ένα αριθμό γραμμών *n* και μόνο μία στήλη ή μία γραμμή και *n* στήλες. Η διάστασή του δηλώνεται ως το γινόμενο του αριθμού των γραμμών επί αριθμού στηλών

Παραδείγματα:

(α) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ έχει διάσταση 3×1

(β) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$ έχει διάσταση $n \times 1$

(γ) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ είναι μονοδιάστατος με διάσταση 1×3

(δ) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ είναι μονοδιάστατος με διάσταση $1 \times n$

2. Δυσδιάστατος Πίνακας

Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, ένας δυσδιάστατος πίνακας έχει ένα αριθμό γραμμών *n* και έναν αριθμό στηλών *m*. Η διάστασή του δηλώνεται ως το γινόμενο του αριθμού των γραμμών επί τον αριθμό στηλών.

Παραδείγματα:

(α) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 4.4 & 8 & 9 \\ 0.5 & 6 & 2 & 0 \\ 1.23 & 12 & 5 & 65 \\ 2 & 11 & 0 & 98 \end{bmatrix}$ έχει διάσταση 4×4

(β) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3.5 & 8 & 4 & 25 & 20 \\ 1 & 2 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ έχει διάσταση 2×4

(γ) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ έχει διάσταση 3×2

(δ) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$ έχει διάσταση $n \times m$

Είδη Πινάκων

3. Τετραγωνικός Πίνακας

Τετραγωνικός ονομάζεται ο δυσδιάστατος πίνακας, ο οποίος έχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών.

Παραδείγματα:

$$(\alpha)\ \ A=\begin{bmatrix} 3 & 4.4 & 8 & 9 \\ 0.5 & 6 & 2 & 0 \\ 1.23 & 12 & 5 & 65 \\ 2 & 11 & 0 & 98 \end{bmatrix}$$

$$(\beta)\ \ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Διαγώνιες Τετραγωνικού Πίνακα

Δευτερεύουσα Διαγώνιος

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Κύρια Διαγώνιος

Ένας τετραγωνικός πίνακας έχει δύο διαγώνιους, την κύρια και την δευτερεύουσα.

Η κύρια διαγώνιος αρχίζει από το πάνω αριστερό στοιχείο και καταλήγει στο κάτω δεξιό στοιχεία. Άρα η κύρια διαγώνιος περιέχει τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Η συνθήκη που ισχύει για τους δείκτες των στοιχείων που ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι

$i=j$

Η δευτερεύουσα διαγώνιος αρχίζει από το κάτω δεξιό στοιχείο και καταλήγει στο πάνω αριστερό στοιχείο. Περιέχει τα στοιχεία $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{(n-1)2}, a_{n1}$.

Άρα η συνθήκη που ισχύει για τους δείκτες των στοιχείων είναι

$i+j=n+1$

Είδη Πινάκων

3. Τετραγωνικός Πίνακας

Άσκηση

Έστω $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

1). Να γραφεί σε μορφή αθροίσματος, το άθροισμα όλων των στοιχείων της κύριας διαγωνίου και το άθροισμα των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου.

2). Να γραφούν σε μορφή αθροίσματος τα αθροίσματα που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο ερώτημα.

3). Να γίνουν όλα τα παραπάνω και για τα αντίστοιχα γινόμενα.

Λύση

1) Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου είναι

$$S_{K\Delta}=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{(n-1)(n-1)}+a_{nn}$$

Η συνθήκη που ισχύει είναι η $i=j$. Άρα όπου j βάζω το i και προσθέτω.

$$S_{K\Delta}=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{(n-1)(n-1)}+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

Το άθροισμα των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου είναι,

$$S_{\Delta\Delta}=a_{1n}+a_{2(n-1)}+\dots+a_{(n-1)2}+a_{n1}$$

Η συνθήκη που ισχύει είναι η $i+j=n+1$, το οποίο σημαίνει ότι $j=n+1-i$.

$$S_{\Delta\Delta}=a_{1n}+a_{2(n-1)}+\dots+a_{(n-1)2}+a_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i(n+1-i)}$$

2). Το ερώτημα μας ζητάει να γράψουμε το άθροισμα $S=S_{K\Delta}+S_{\Delta\Delta}$ ως εξής,

$$S=S_{K\Delta}+S_{\Delta\Delta}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}a_{i(n+1-i)}=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii}+a_{i(n+1-i)}\right)$$

3) Τα αντίστοιχα για τα γινόμενα έχουν ως εξής:

$$G_{K\Delta}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\dots\cdot a_{(n-1)(n-1)}\cdot a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

$$G_{\Delta\Delta}=a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdot\dots\cdot a_{(n-1)2}\cdot a_{n1}=\prod_{i=1}^{n}a_{i(n+1-i)}$$

$$G_{\Delta\Delta}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}a_{i(n+1-i)}\right)=\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot a_{i(n+1-i)}$$

Είδη Πινάκων

4. Άνω και Κάτω Τριγωνικός Πίνακας

Άνω τριγωνικός ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία με δείκτες $i>j$ είναι όλα μηδέν.

Παράδειγμα

Όλοι οι παρακάτω πίνακες είναι άνω τριγωνικοί

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}3 & -6 & 8\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 10 & 2\\ 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 9\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Κάτω τριγωνικός ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία με δείκτες $i<j$ είναι όλα μηδέν

Παράδειγμα

Όλοι οι παρακάτω πίνακες είναι κάτω τριγωνικοί

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ -8 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -4 & 0\\ 2 & 10 & 3 & 9\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Είδη Πινάκων

5. Συμμετρικός Πίνακας

Συμμετρικός ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι $a_{ij} = a_{ji},\ \text{για}\ i \neq j$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \\ 1 & 11 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{με}\ a_{ij} = a_{ji}\ \ \text{όπου}\ \ i \neq j$$

Είδη Πινάκων

6. Διαγώνιος, Μοναδιαίος και Μηδενικός Πίνακας

Διαγώνιος πίνακας είναι ο πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι μηδέν (δηλαδή $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Παρατήρηση: Αυτό δεν σημαίνει ότι στην κύρια διαγώνιο δεν υπάρχουν μηδενικά στοιχεία.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Μοναδιαίος ονομάζεται ο διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι όλα ίσα με την μονάδα.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Μηδενικός Πίνακας

Ονομάζεται ο πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

Είδη Πινάκων

7. Ανάστροφος Πίνακα

Ο ανάστροφος ενός πίνακα A είναι ένας πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι οι στήλες του A και οι στήλες του είναι οι γραμμές τους A. Συμβολίζεται ως A^T.

Άρα η διάσταση του A είναι $n \times m$, η διάσταση του A^T είναι $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ -8 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -10 & 11 \\ -1 & -5 & 13 \\ 1 & 6 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -10 & -5 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{bmatrix}$$