ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΡΙΘΜΟΙ
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Γεώργιος Τσεκούρας

Καθηγητής
Τμήμα Πολιτισμικής Τεχνολογίας και Επικοινωνίας
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Αριθμοί

α). Σύνολο Φυσικών αριθμών: $N=\{0,1,2,3,\ldots,\infty\}$

β). Σύνολο Ακεραίων αριθμών: $Z=\{-\infty,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,\infty\}$

γ). Σύνολο Ρητών αριθμών: $Q=\left\{x : x=\dfrac{p}{q}\ \mu\varepsilon\ \ p\in Z, q\in Z\ \ \kappa\alpha\iota\ \ q\neq 0\right\}$

δ). Σύνολο Πραγματικών αριθμών: $R=\{\text{Ένωση Ρητών και Άρρητων Αριθμών}\}$

(δηλ. περιέχει όλους τους αριθμούς)

Σχέση διάταξης: Είναι η σχέση της ανισότητας, η οποία είναι δυαδική σχέση μεταξύ αριθμών, και $\forall \alpha,\beta,\gamma\in R$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1). $\alpha\leq\alpha$ (Ανακλαστική ιδιότητα)

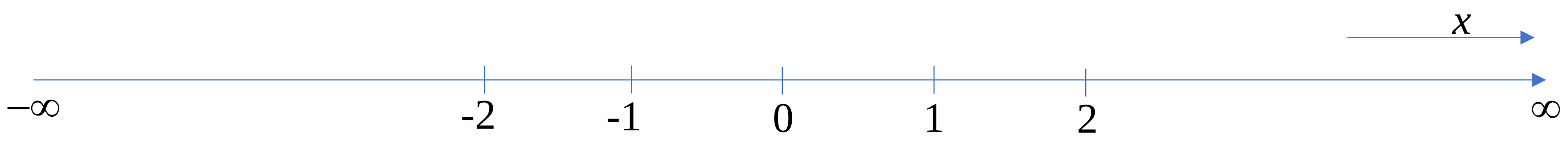
2). $\alpha\leq\beta\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \beta\leq\alpha\ \Rightarrow \alpha=\beta$ (Αντισυμμετρική ιδιότητα)

3). $\alpha\leq\beta\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \beta\leq\gamma\ \Rightarrow \alpha\leq\gamma$ (Μεταβατική Ιδιότητα)

Πράξεις μεταξύ αριθμών: (α) **πρόσθεση** και (β) **πολλαπλασιασμός**

Ιδιότητες πράξεων	**Πολλαπλασιασμός**	**Πρόσθεση**
Αντιμεταθετική	$\alpha\beta=\beta\alpha$	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$
Προσεταιριστική	$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
Επιμεριστική	$a(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Αριθμοί



Σχήμα 1. Ο άξονας των πραγματικών αριθμών *R*.

- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών *R* συμβολίζεται με μία συνεχή γραμμή, που ονομάζεται άξονας πραγματικών αριθμών, εκτεινόμενη από το $-\infty$ στο ∞ (βλέπε Σχ. 1).

- Στην γραμμή αυτή δεν υπάρχει κενό. Κάθε σημείο της γραμμής είναι κατειλημμένο από έναν αριθμό. Οπότε, αν πάρουμε μία μεταβλητή *x* να διατρέξει το σύνολο *R* τότε αυτή μπορεί να πάρει μία οποιαδήποτε τιμή του συνόλου *R* και άρα να “καθίσει” σε οποιοδήποτε σημείο πάνω στην γραμμή.

- Ο άξονας των πραγματικών αριθμών ορίζει έναν μονοδιάστατο χώρο, δηλ. τον χώρο μιας διάστασης. Κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί σε έναν και μόνο έναν αριθμό, ο οποίος είναι η συντεταγμένη του σημείου αυτού στον μονοδιάστατο χώρο.
    - ✓ Συνεπώς σε έναν μονοδιάστατο χώρο κάθε σημείο έχει μία συντεταγμένη, η οποία είναι ίση με τον αριθμό στον οποίο αντιστοιχεί το σημείο.

Αριθμοί

Ανισότητες: Κανόνες ανισότητας

Αν δύο αριθμοί α, β και γ ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή $\alpha, \beta, \gamma \in R$, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$\mathrm{I1}: \alpha \le \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \le \beta + \gamma$$
$$\mathrm{I2}: \alpha \le \beta \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \gamma \ge 0 \Rightarrow \alpha\gamma \le \beta\gamma$$
$$\mathrm{I3}: \alpha \le \beta \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \gamma \le 0 \Rightarrow \alpha\gamma \ge \beta\gamma$$
$$\mathrm{I4}: \mathrm{A}\nu \;\; \alpha, \beta \ge 0 \;\; \acute{\eta} \;\; \alpha, \beta \le 0 \;\; \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon \;\; \alpha \le \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \ge \frac{1}{\beta}$$

Τα παραπάνω ισχύουν και για την σχέση “<”.

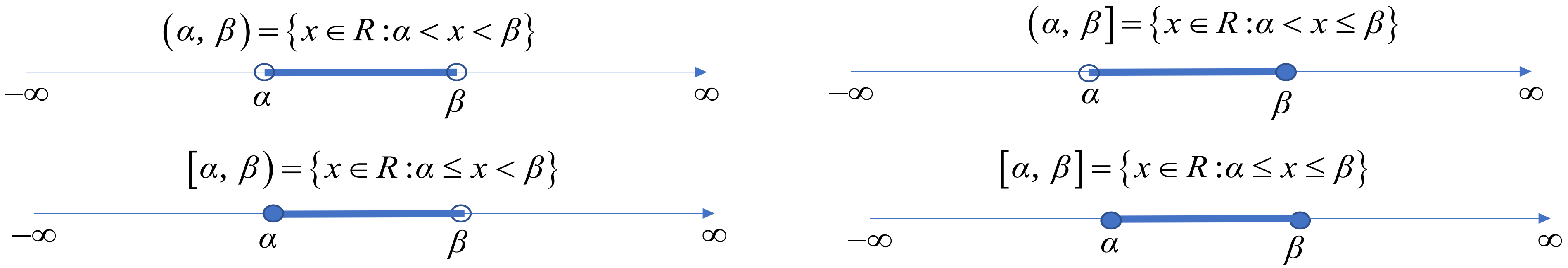
Αριθμοί

Διαστήματα Αριθμών: Φραγμένα Διαστήματα

Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha \le \beta$.

- ✓ Ως φραγμένο διάστημα ονομάζουμε το υποσύνολο του R το οποίο περιέχει όλους τους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών α και β. Ο όρος φραγμένο δηλώνει το γεγονός ότι όλοι οι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα αυτό "φράσσονται" από τους αριθμούς α και β.
- ✓ Ο αριθμός α ονομάζεται <u>κάτω άκρο</u> και ο β <u>άνω άκρο</u> του διαστήματος.
- ✓ Συνεπώς ένα διάστημα είναι ένα συνεχές υποσύνολο του R.
- ✓ Αν ένα άκρο συμπεριλαμβάνεται στο διάστημα, τότε το διάστημα είναι κλειστό ως προς το άκρο αυτό, ειδάλλως είναι ανοικτό ως προς το άκρο αυτό.
- ✓ Συμβολισμός: Το ανοικτό διάστημα ως προς ένα άκρο συμβολίζεται με παρένθεση ενώ το κλειστό με αγκύλη.

  (α, β): ανοικτό ως προς τα δύο άκρα (δηλ. δεν περιλαμβάνει κανένα από τα άκρα του)
  [α, β): κλειστό ως προς το α και ανοιχτό ως προς το β (περιλαμβάνει το α και όχι το β)
  (α, β]: ανοικτό ως προς το α και κλειστό ως προς το β (περιλαμβάνει το β και όχι το α)
  [α, β]: κλειστό ως προς τα δύο άκρα (περιλαμβάνει και τα δύο άκρα του)



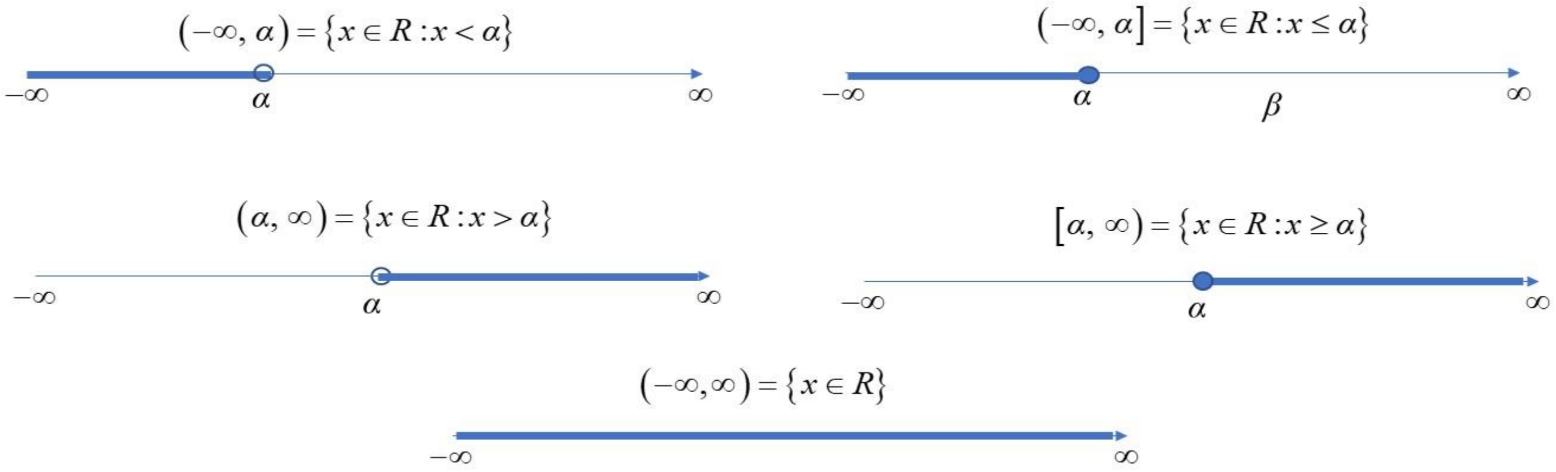
Σχήμα 2. Τύποι φραγμένων διαστημάτων (ο ανοικτός κύκλος αντιστοιχεί σε ανοικτό άκρο και ο συμπαγής κύκλος σε κλειστό άκρο)

Αριθμοί

Διαστήματα Αριθμών: Μη-Φραγμένα Διαστήματα

Έστω ένας πραγματικός αριθμός α. Ως μη-φραγμένο διάστημα ονομάζουμε το υποσύνολο του R το οποίο περιέχει όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του α ή όλους τους αριθμούς που είναι μικρότεροι του α, ή όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

- (α, ∞): Κάτω φραγμένο από το α και ανοικτό ως προς το α και άνω μη-φραγμένο
- $[\alpha, \infty)$: Κάτω φραγμένο από το α και κλειστό ως προς το α και άνω μη-φραγμένο
- $(-\infty, \alpha)$: Άνω φραγμένο από το α και ανοικτό ως προς το α και κάτω μη-φραγμένο
- $(-\infty, \alpha]$: Άνω φραγμένο από το α και κλειστό ως προς το α και κάτω μη-φραγμένο
- $(-\infty, \infty)$: Μη-φραγμένο



Σχήμα 3. Τύποι μη-φραγμένων διαστημάτων (ο ανοικτός κύκλος αντιστοιχεί σε ανοικτό άκρο και ο συμπαγής κύκλος σε κλειστό άκρο)

Αριθμοί

Διαστήματα Αριθμών: Επίλυση Ανισοτήτων

Η επίλυση ανισοτήτων είναι άμεσα συνδεδεμένη με τα διαστήματα, γιατί η λύση μιας ανισότητας είναι ένα διάστημα ή μία ένωση διαστημάτων

Παράδειγμα 1). Να επιλυθεί η ανισότητα: $2x+4<-11-4x$

Λύση:

$$2x+4<-11-4x \Rightarrow 2x-(-4x)<-11-4$$
$$\Rightarrow 6x<-15 \Rightarrow x<-2.5$$

Άρα, $x\in(-\infty,-2.5)$

Άσκηση

Να επιλυθούν οι παρακάτω ανισότητες:

(α) $4x-8>12$

(β) $5-7x\leq -2$

(γ) $4+\dfrac{3}{x-6}>6$

(δ) $\dfrac{12}{2x-6}>20$

Παράδειγμα 2). $\dfrac{5}{x+2}\geq 7$

Η ανισότητα αυτή δεν είναι προφανής όπως η παραπάνω. Οι λόγοι είναι οι εξής δύο: (α) το x+2 στον παρονομαστή πρέπει να είναι διάφορο του μηδενός οπότε $x\neq -2$, το οποίο σημαίνει ότι σίγουρα το -2 δεν υπάρχει στην λύση της ανισότητας. (β) Για να "διώξουμε" το x+2 και να το "στείλουμε" στο δεξιό μέρος της ανισότητας, πρέπει πρώτα να πολλαπλασιάσουμε με αυτό και τα δύο μέρη της ανισότητας. Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες Ι2 και Ι3 των ανισοτήτων, αν το x+2 είναι θετικό η ανισότητα δεν αλλάζει φορά, αν όμως είναι αρνητικό αλλάζει φορά. Οπότε, εν κατακλείδι, διακρίνουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις, οι οποίες προφανώς θα δώσουν διαφορετική λύση.

α) Λύση για x>-2: $\dfrac{5}{x+2}\geq 7 \Rightarrow 5\geq 7(x+2)\Rightarrow 7x\leq -9\Rightarrow x\leq -\dfrac{9}{7}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι θα πρέπει $x\neq -2$, η λύση της ανισότητας είναι το σύνολο $A=\left\{x\in R: x\leq -\dfrac{9}{7} \quad \text{και} \quad x\neq -2\right\}$, το οποίο γράφεται και ως: $x\in(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\dfrac{9}{7}\right]$. Επιπλέον όμως, η περίπτωση την οποία εξετάζουμε ισχύει για x>-2, το οποίο σημαίνει ότι $x\in(-2,\infty)$. Άρα θα πρέπει $x\in(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\dfrac{9}{7}\right]$ ΚΑΙ $x\in(-2,\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι τελικά $x\in\left(-2,-\dfrac{9}{7}\right]$.

β). Λύση για x<-2: $\dfrac{5}{x+2}\geq 7\Rightarrow 5\leq 7(x+2)\Rightarrow 7x\geq -9\Rightarrow x\geq -\dfrac{9}{7}$. Επειδή $-\dfrac{9}{7}>-2$, αυτό σημαίνει ότι το -2 δεν περιέχεται στο διάστημα επίλυσης: $A=\left\{x\in R: x\geq -\dfrac{9}{7}\right\}$, το οποίο γράφεται ισοδυνάμως και ως: $A=\left[-\dfrac{9}{7},\infty\right)$. Όμως επειδή θα πρέπει x<-2, αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε λύση της ανισότητας.

Αριθμοί

Απόσταση Μεταξύ Αριθμών

Η απόσταση μεταξύ δύο αριθμών είναι η μέτρηση του πόσο μακριά είναι δύο αριθμοί. Είναι ακριβώς η ίδια έννοια με την απόσταση που χρησιμοποιούμαι στην καθημερινότητά μας. Είναι **ΠΑΝΤΑ** θετικός αριθμός

- Συμβολίζεται με δύο κάθετες γραμμές $|...|$.
- Π.χ. η απόσταση της Αθήνας από την Θεσσαλονίκη είναι 500 χιλιόμετρα και γράφουμε: $|\text{Α}\theta\acute{\eta}\nu\alpha - \Theta\varepsilon\sigma\sigma\alpha\lambda o\nu\acute{\iota}\kappa\eta| = 500\ \chi\iota\lambda.$ και $|\Theta\varepsilon\sigma\sigma\alpha\lambda o\nu\acute{\iota}\kappa\eta - \text{Α}\theta\acute{\eta}\nu\alpha| = 500\ \chi\iota\lambda.$
- Ακολουθώντας την παραπάνω λογική, η απόσταση μεταξύ δύο αριθμών α και β συμβολίζεται ως $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$. Άρα όσο απέχει ο α από τον β, τόσο απέχει και ο β από τον α.

Παραδείγματα:

1) Απόσταση μεταξύ 7 και 21: $|7-21| = |21-7| = 14$
2) Απόσταση μεταξύ -3 και 8: $|-3-8| = |8-(-3)| = |8+3| = 11$
3) Απόσταση μεταξύ -101 και -98: $|-101-(-98)| = |-98-(-101)| = |-98+101| = |101-98| = 3$

Αριθμοί

Απόλυτη Τιμή ενός Αριθμού

Απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι η απόστασή του από το μηδέν.

Παραδείγματα:

1). Απόλυτη τιμή του 3: $|3| = |3-0| = 3$

2). Απόλυτη τιμή του -3: $|-3| = |-3-0| = |0-(-3)| = |0+3| = |3| = 3$

- Είναι προφανές ότι όσο απέχει ένας θετικός αριθμός *α*>0 από το μηδέν τόσο απέχει και αντίστοιχος αρνητικός -*α* από το μηδέν.

  Άρα οι αριθμοί *α* και -*α* έχουν την ίδια απόλυτη τιμή: $|\alpha| = |-\alpha| = \alpha$ με *α*>0.

Ιδιότητες απόλυτης τιμής

I1: $|x| = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha \text{ ή εν συντομία } x = \pm a$ (Εξ' ορισμού της απόλυτης τιμής)

I2: $|x| \le \alpha \Leftrightarrow -\alpha \le x \le \alpha$

I3: $|x| \ge \alpha \Leftrightarrow x \le -a \text{ ή } x \ge a$

I4: $|x+y| \le |x| + |y|$ (Τριγωνική Ανισότητα)

Αριθμοί

Απόλυτη Τιμή ενός Αριθμού: Επίλυση Ανισοτήτων

Παραδείγματα

1). Να επιλυθεί η ανισότητα: $|5x-4| \le 8$

$$|5x-4| \le 8 \Rightarrow -8 \le 5x-4 \le 8 \Rightarrow -8+4 \le 5x \le 8+4 \Rightarrow -4 \le 5x \le 12 \Rightarrow -\frac{4}{5} \le x \le \frac{12}{5}$$

Το οποίο σημαίνει ότι: $x \in \left[-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right]$

2). Να επιλυθεί η ανισότητα: $|7-3x| \le 5$

$$|7-3x| \le 5 \Rightarrow -5 \le 7-3x \le 5 \Rightarrow -5-7 \le -3x \le 5-7 \Rightarrow -12 \le -3x \le -2$$

$$\Rightarrow -\frac{12}{-3} \ge x \ge -\frac{2}{-3} \Rightarrow \frac{2}{3} \le x \le 4$$

Άρα το διάστημα που επιλύει την ανισότητα είναι το $A = \left[\frac{2}{3}, 4\right]$ (δηλ. $x \in \left[\frac{2}{3}, 4\right]$)

3). Να επιλυθεί η ανισότητα: $|8-2x| \ge 12$

$|8-2x| \ge 12 \Rightarrow 8-2x \le -12$ *ή* $8-2x \ge 12$

Η πρώτη μας δίνει ότι: $8-2x \le -12 \Rightarrow 2x \ge 20 \Rightarrow x \ge 10$ και άρα $x \in [10, \infty)$

Η δεύτερη μας δίνει ότι: $8-2x \ge 12 \Rightarrow 2x \le -4 \Rightarrow x \le -2$ και άρα $x \in (-\infty, -2]$

Άρα το διαστήματα που επιλύουν την ανισότητα είναι το $[10, \infty)$ ή το $(-\infty, -2]$

Άσκηση

Να επιλυθούν οι παρακάτω ανισότητες:

(α) $4 > |3x-2|$

(β) $|x-7| + 8 \ge 12$

(γ) $\dfrac{4}{|x-3|} + 7 \ge 20$

Αριθμοί

Εκθετικοί Αριθμοί-Δυνάμεις

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha\,\alpha\,\alpha\ldots.\alpha}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$$

Ιδιότητες Δυνάμεων

Για $\alpha, \beta, \nu, \mu \in R$ και

I1: $\alpha^{0} = 1$

I2: $\left(\alpha^{\nu}\right)^{\mu} = \underbrace{\alpha^{\nu}\,\alpha^{\nu}\ldots\alpha^{\nu}}_{\mu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = \underbrace{\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}\,\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}\ldots\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}}_{\mu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = \underbrace{\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu\,\mu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = \alpha^{\nu\mu}$

I3: $\dfrac{1}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{-\nu} \qquad \mu\varepsilon \quad \alpha \neq 0$

I4: $\left(\alpha\beta\right)^{\nu} = \underbrace{(\alpha\beta)(\alpha\beta)\ldots(\alpha\beta)}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = \underbrace{\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}\,\underbrace{\beta\,\beta\ldots\beta}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}$

I5: $\alpha^{\nu}\,\alpha^{\mu} = \underbrace{\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}\,\underbrace{\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\mu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = \underbrace{\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{(\nu+\mu)-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = \alpha^{\nu+\mu}$

I6: $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \left(\alpha\dfrac{1}{\beta}\right)^{\nu} = \alpha^{\nu}\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^{\nu} = \alpha^{\nu}\dfrac{1}{\beta^{\nu}} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} \qquad \mu\varepsilon \quad \beta \neq 0$

I7: $\dfrac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu}\alpha^{-\mu} = \alpha^{\nu-\mu} \qquad \mu\varepsilon \ \alpha \neq 0$

Ειδικός συμβολισμός: Έστω $\alpha \in R$ και $p, q \in Z$. Άρα, $\dfrac{p}{q} \in Q$. Τότε: $\alpha^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\alpha^{p}}$

Αριθμοί

Συμβολισμός Αθροίσματος και Γινομένου Πλήθους Αριθμών

Έστω ότι έχουμε 10 αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa$ και θέλουμε να <u>συμβολίσουμε</u> το άθροισμα και το γινόμενο τους. Μπορούμε να τα γράψουμε/συμβολίσουμε ως εξής:

$$S = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa$$
$$G = \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta\,\eta\,\theta\,\iota\,\kappa$$

- Όπως είναι εύκολα κατανοητό η παραπάνω επιλογή δεν είναι βολική, ειδικά στην περίπτωση που έχουμε εκατοντάδες ή χιλιάδες αριθμούς. Αυτό σημαίνει ότι, στα μαθηματικά, ο κατάλληλος συμβολισμός είναι πολύ βασικός τόσο για την σωστή αποκωδικοποίηση της πληροφορίας όσο και την σωστή αναπαράσταση αυτής.
- Για το παραπάνω παράδειγμα των δέκα αριθμών, ακολουθούμε την εξής σύμβαση: Διαλέγουμε κατά βούληση μόνο ένα γράμμα, π.χ. το α, και βάζουμε δείκτες κατά αύξοντα αριθμό σε αυτό το γράμμα: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{10}$. Άρα το άθροισμα και το γινόμενο αυτών γράφεται ως εξής:

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10}$$
$$G = \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6\,\alpha_7\,\alpha_8\,\alpha_9\,\alpha_{10}$$

Αριθμοί

Συμβολισμός Αθροίσματος και Γινομένου Πλήθους Αριθμών

Και πάλι όμως δεν είναι βολικό. Εν τέλει, καταλήγουμε στον εξής συμβολισμό:

Άθροισμα: $S = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$ Γινόμενο: $G = \prod_{i=1}^{10} \alpha_i$

Έτσι αν μας δίνονται ν αριθμοί έχουμε τους παρακάτω συμβολισμούς

Άθροισμα: $S = \sum_{i=1}^{v} \alpha_i$ Γινόμενο: $G = \prod_{i=1}^{v} \alpha_i$

Το άθροισμα και το γινόμενο για άπειρο πλήθος αριθμών συμβολίζονται ως εξής:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$$

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i$$

Μια πολύ βασική έννοια που σχετίζεται με το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αριθμών είναι το παραγοντικό ενός *ακεραίου ν*, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (v-1) \cdot v = \prod_{i=1}^{v} i$$

Παραδείγματα:

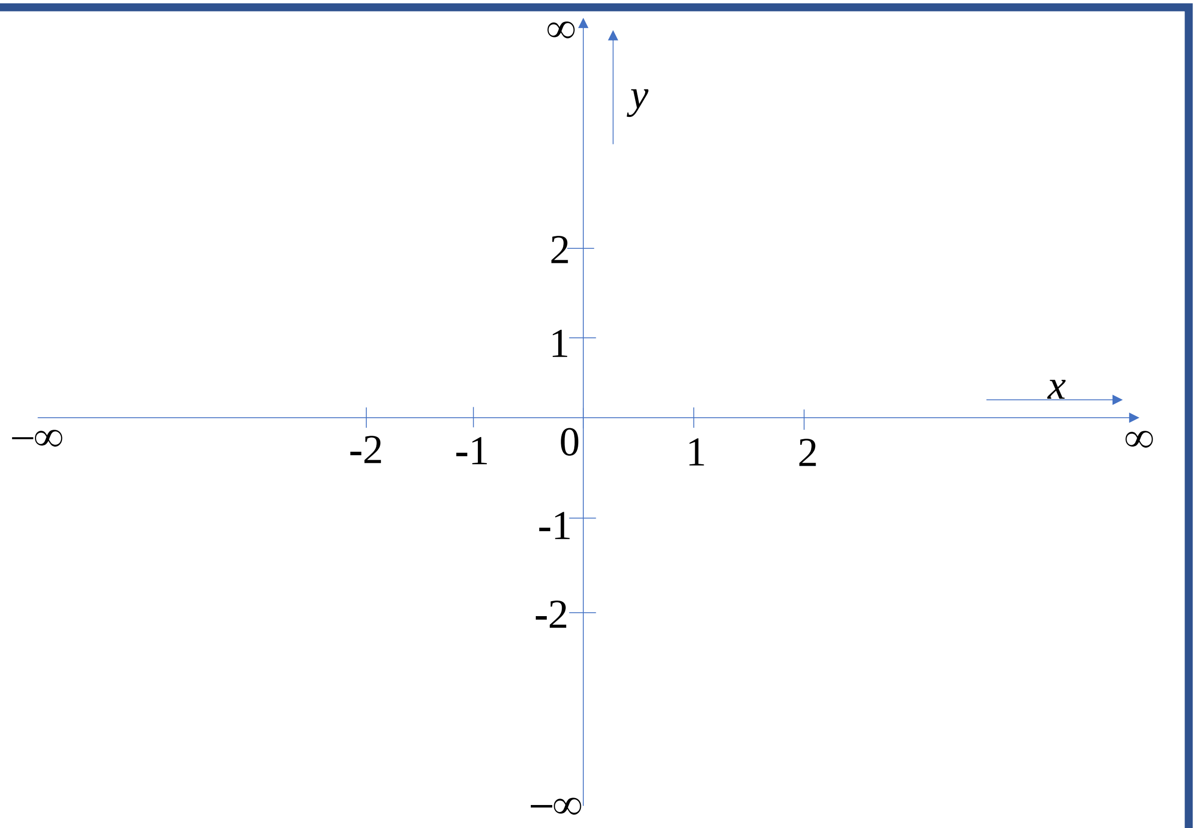
$3! = 123 = 6$

10!=1 2 3 4 5 6 7 8 9 10=3,628,800

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

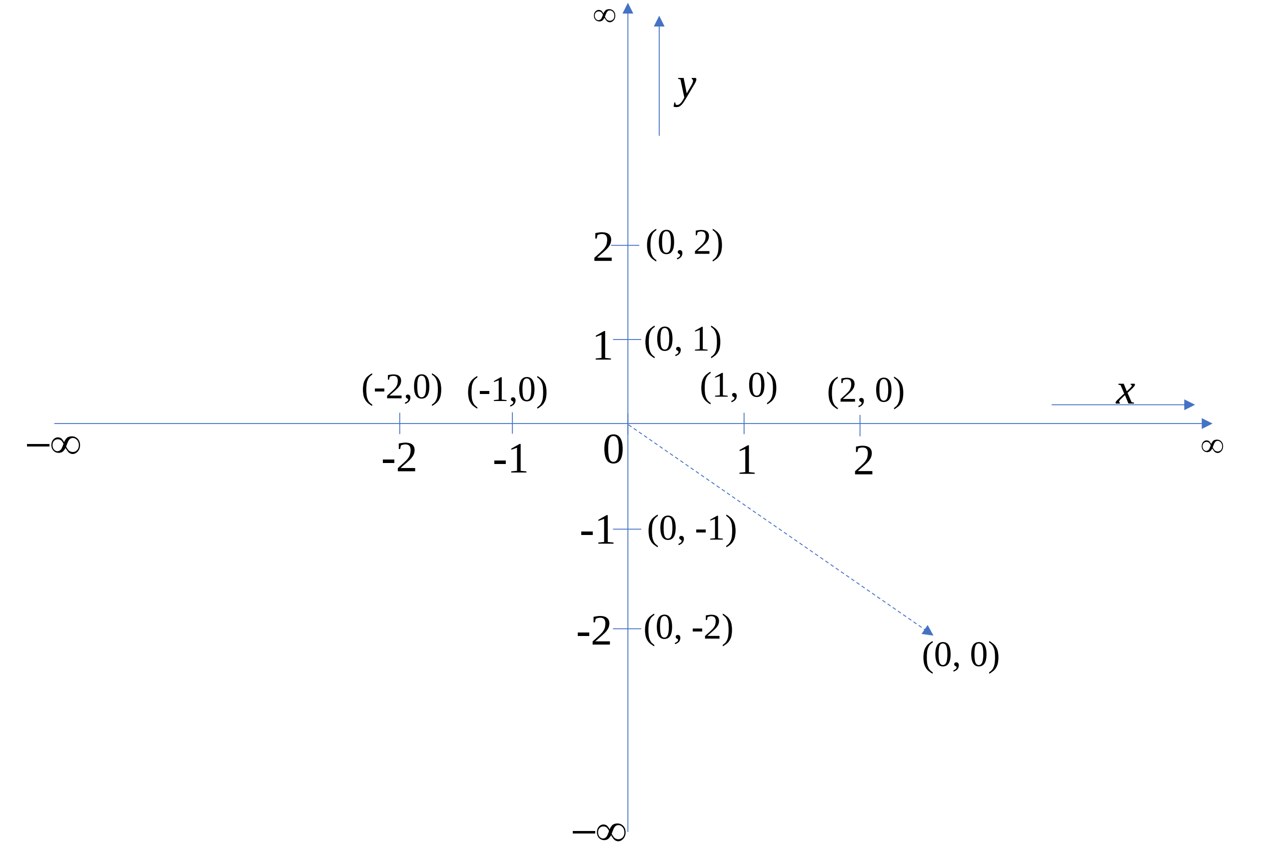
- Το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων ορίζεται από δύο κάθετους άξονες, καθένας από τους οποίους είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών
- Έχοντας υπόψη ότι ένας άξονας πραγματικών αριθμών ορίζει έναν μονοδιάστατο χώρο, οι δύο κάθετοι μεταξύ τους άξονες πραγματικών αριθμών ορίζουν έναν δυσδιάστατο χώρο, ο οποίος στην ουσία είναι επίπεδο
- Το Σχήμα 4 δείχνει την διάταξη των δύο κάθετων αξόνων, οι οποίοι ορίζουν το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (δηλ. τον δυσδιάστατο επίπεδο χώρο). Προσέξτε ότι η χρήση της μεταβλητής *x* για να διατρέχει τον οριζόντιο και της μεταβλητής *y* για να διατρέχει τον κάθετο γίνεται κατά σύμβαση (δηλ. μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όποιο γράμμα ή όνομα θέλουμε, αρκεί να το δηλώσουμε ρητά).



Σχήμα 4. Ο δυσδιάστατος επίπεδος χώρος. Κατά σύμβαση δεχόμαστε ότι τον οριζόντιο άξονα των πραγματικών αριθμών των διατρέχει η μεταβλητή *x*, ενώ τον κάθετο άξονα των πραγματικών αριθμών των διατρέχει η μεταβλητή *y*.

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

- Ένα επίπεδο (ή αλλιώς δυσδιάστατος χώρος) είναι ένα σύνολο στοιχείων, τα οποία είναι τα όλα σημεία του και προφανώς είναι άπειρα. Κατ' αναλογία με τον άξονα των πραγματικών αριθμών, ένα επίπεδο είναι συνεχές και κάθε σημείο του έχει δύο συντεταγμένες, όπου η καθεμιά ορίζεται αντίστοιχα σε έναν από τους δύο άξονες.
- <u>Κατά σύμβαση</u>, οι συντεταγμένες ενός σημείου γράφονται σε παρένθεση (ή αγκύλη), η οποία περιέχει δύο διατεταγμένους αριθμούς: πρώτα γράφουμε την συντεταγμένη του σημείου στον οριζόντιο άξονα (δηλ. τον άξονα των *x*) και μετά την συντεταγμένη στον κάθετο άξονα. Αναφορικά με το Σχήμα 4, αυτό σημαίνει ότι η αναπαράσταση των σημείων που είναι σημειωμένα με αριθμούς πάνω στους άξονες είναι λάθος.



Σχήμα 5. Σημεία στο επίπεδο: Τα σημεία που είναι πάνω στους άξονες αναπαρίστανται με δύο συντεταγμένες.

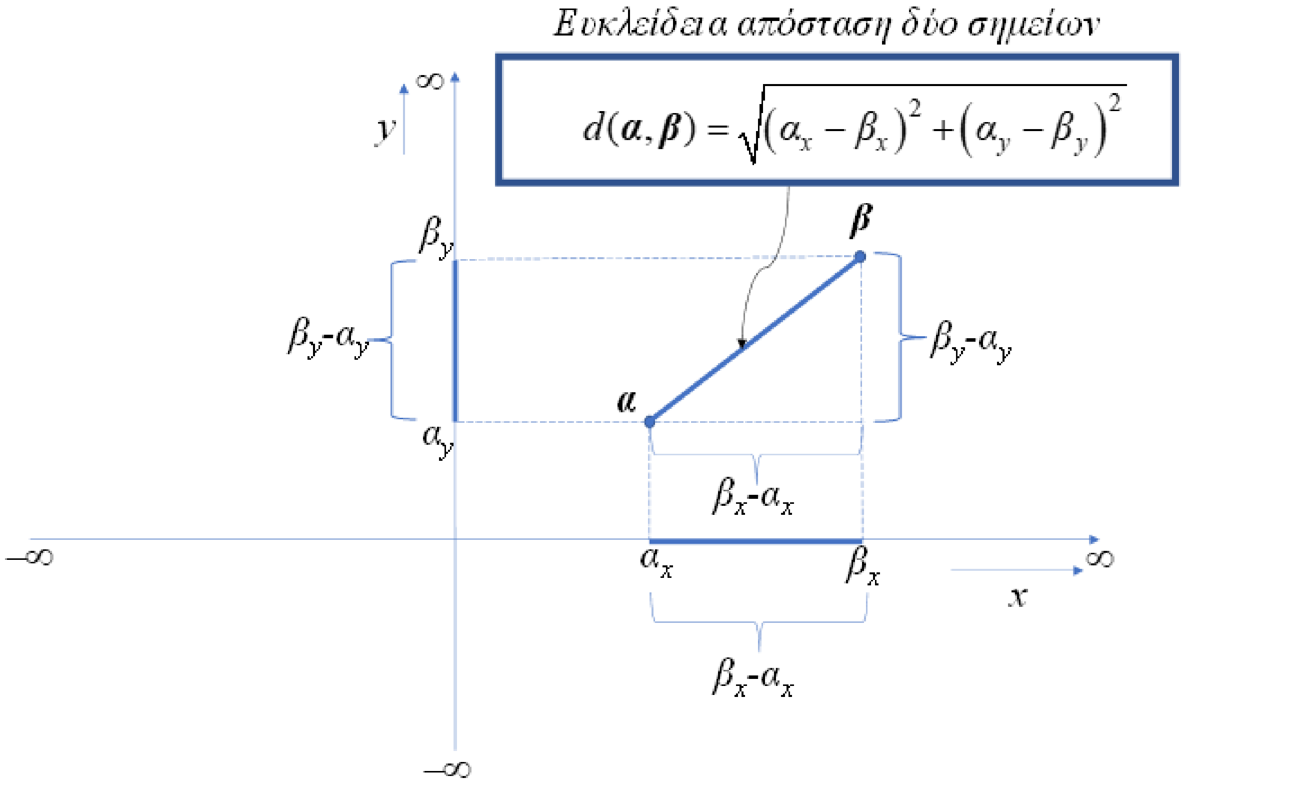
Η σωστή τους αναπαράσταση δίνεται στο Σχήμα 5, όπου π.χ. το 0 είναι το (0, 0), το σημείο 2 πάνω στον άξονα *x* είναι το (2, 0), κλπ. Όμως αυτός ο τρόπος δεν είναι βολικός. Συνεπώς κατά σύμβαση, κρατάμε τον συμβολισμό του Σχήματος 4, έχοντας υπόψη ότι ο σωστός συμβολισμός δίνεται στο Σχήμα 5.

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων: Ευκλείδεια Απόσταση

Στο Σχήμα 6 φαίνονται δύο σημεία $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ με συντεταγμένες: $\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_x, \alpha_y\right)$ και $\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_x, \beta_y\right)$.

Προσέξτε ότι, για να διαφοροποιήσουμε τα σημεία από τους αριθμούς, τα συμβολίζουμε με έντονο φόντο γραμμάτων, δείχνοντας ότι έχουν δύο τιμές και όχι μία.

Κατ' αναλογία με την απόσταση δύο αριθμών, μπορούμε να ορίσουμε και την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, η οποία ονομάζεται Ευκλείδεια απόσταση.



Σχήμα 6. Δύο σημεία στο επίπεδο και η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους.

Χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο που έχει ως υποτείνουσα την απόσταση μεταξύ των σημείων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$. Οι δύο κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι η $\beta_x - \alpha_x$ και $\beta_y - \alpha_y$. Άρα, η υποτείνουσα υπολογίζεται ως εξής:

$$\left(d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\right)^2 = \left(\alpha_x - \beta_x\right)^2 + \left(\alpha_y - \beta_y\right)^2 \Rightarrow d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{\left(\alpha_x - \beta_x\right)^2 + \left(\alpha_y - \beta_y\right)^2} \quad (1)$$

Αντί του $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, ένας άλλος συμβολισμός για την Ευκλείδεια απόσταση είναι $\left\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\right\|$.

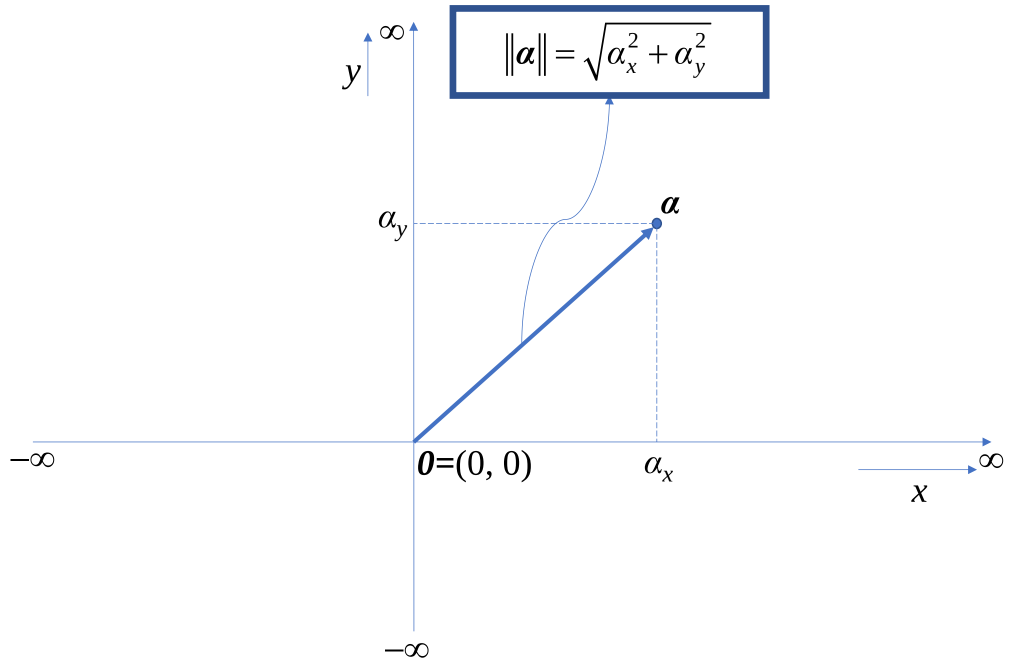
Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων: Η Έννοια του Διανύσματος

- *Κατά αντιστοιχία με την απόλυτη τιμή ενός αριθμού*, μπορούμε να ορίσουμε και την απόσταση ενός σημείου του Καρτεσιανού συστήματος από την αρχή των αξόνων, δηλ. το σημείο ***0***=(0, 0),

$$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a} - 0\| = d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{0}) = \sqrt{(\alpha_x - 0)^2 + (\alpha_y - 0)^2} = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} \qquad (2)$$

- **Διάνυσμα**: Κάθε σημείο $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y)$ του Καρτεσιανού συστήματος (δηλ. ενός δυσδιάστατου χώρου) ορίζει ένα διάνυσμα το οποίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το εν λόγω σημείο (άρα έχει συγκεκριμένη φορά). Το μέτρο του διανύσματος είναι η απόσταση του σημείου από το κέντρο των αξόνων και συμβολίζεται/υπολογίζεται ως :

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} \qquad (3)$$



Σχήμα 7. Ένα σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο αυτό, όπου μέτρο του διανύσματος είναι η Ευκλείδεια απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων.

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων: Εξίσωση Ευθείας

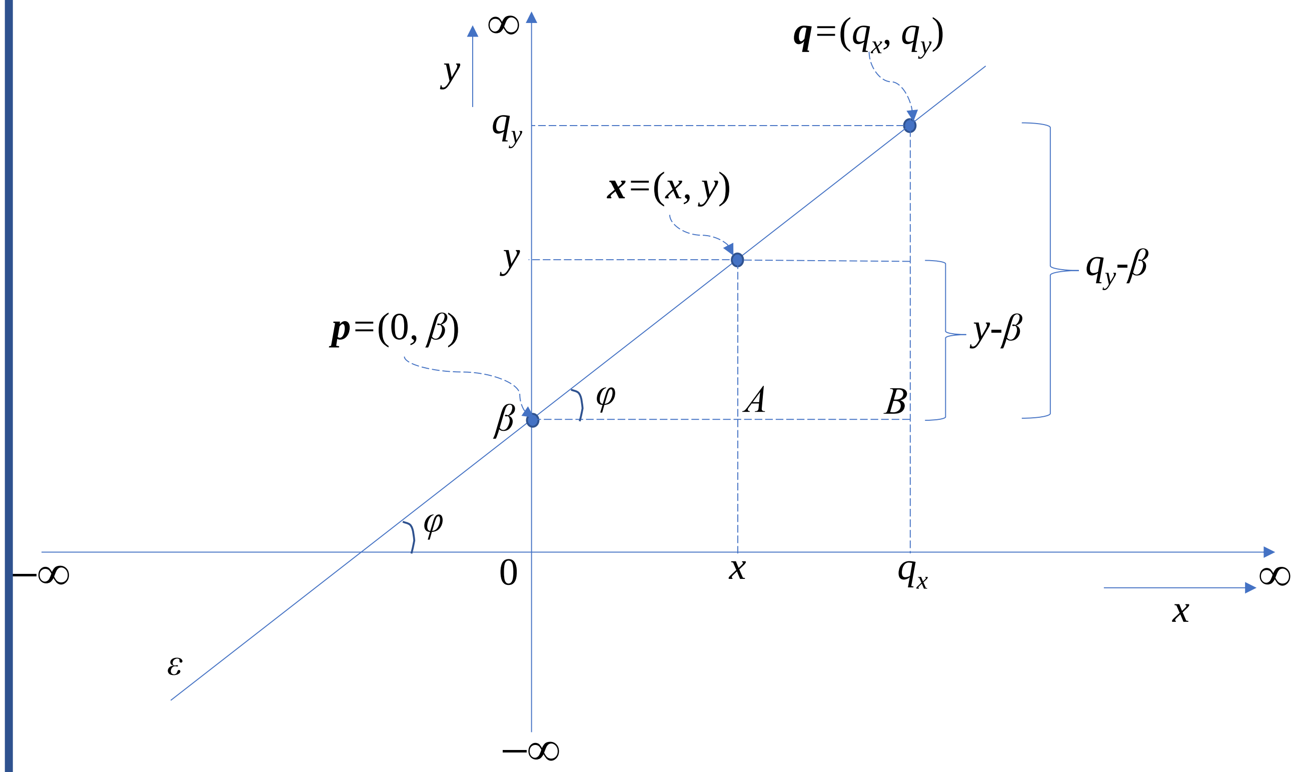
Η γενική μορφή μιας **<u>εξίσωσης ευθείας</u>** στο επίπεδο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$y = ax + b \qquad (4)$$

Όταν καλούμαστε να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας, ο στόχος είναι να υπολογίσουμε τις παραμέτρους a και b. Η γενική μεθοδολογία φαίνεται στο Σχήμα 8.

Για την ευθεία ε του Σχ. 8, επιλέγουμε τα σημεία $\boldsymbol{p}(0, \beta)$ και το $\boldsymbol{q}(q_x, q_y)$. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $\boldsymbol{x}(x, y)$, οι συντεταγμένες του οποίου πρέπει να πληρούν την Εξίσωση (4). Τα τρίγωνα $\boldsymbol{px}A$ και $\boldsymbol{pq}B$ είναι όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή στις κάθετες πλευρές των δύο αυτών τριγώνων βρίσκουμε την παρακάτω σχέση,

$$\frac{y-\beta}{q_y-\beta} = \frac{x}{q_x} \Rightarrow y-\beta = \frac{q_y-\beta}{q_x}x \qquad (5)$$



$$y = ax + b = \frac{q_y-\beta}{q_x}x + \beta = \tan(\varphi)\,x + \beta$$

Σχήμα 8. Εξίσωση ευθείας στο επίπεδο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων: Εξίσωση Ευθείας (συνέχεια)

Η εξίσωση (5) μας δίνει την εξίσωση της ευθείας (ε),

$$y = \frac{q_y - \beta}{q_x} x + \beta \tag{6}$$

Συγκρίνοντας τις Εξισώσεις (4) και (6) προκύπτει ότι,

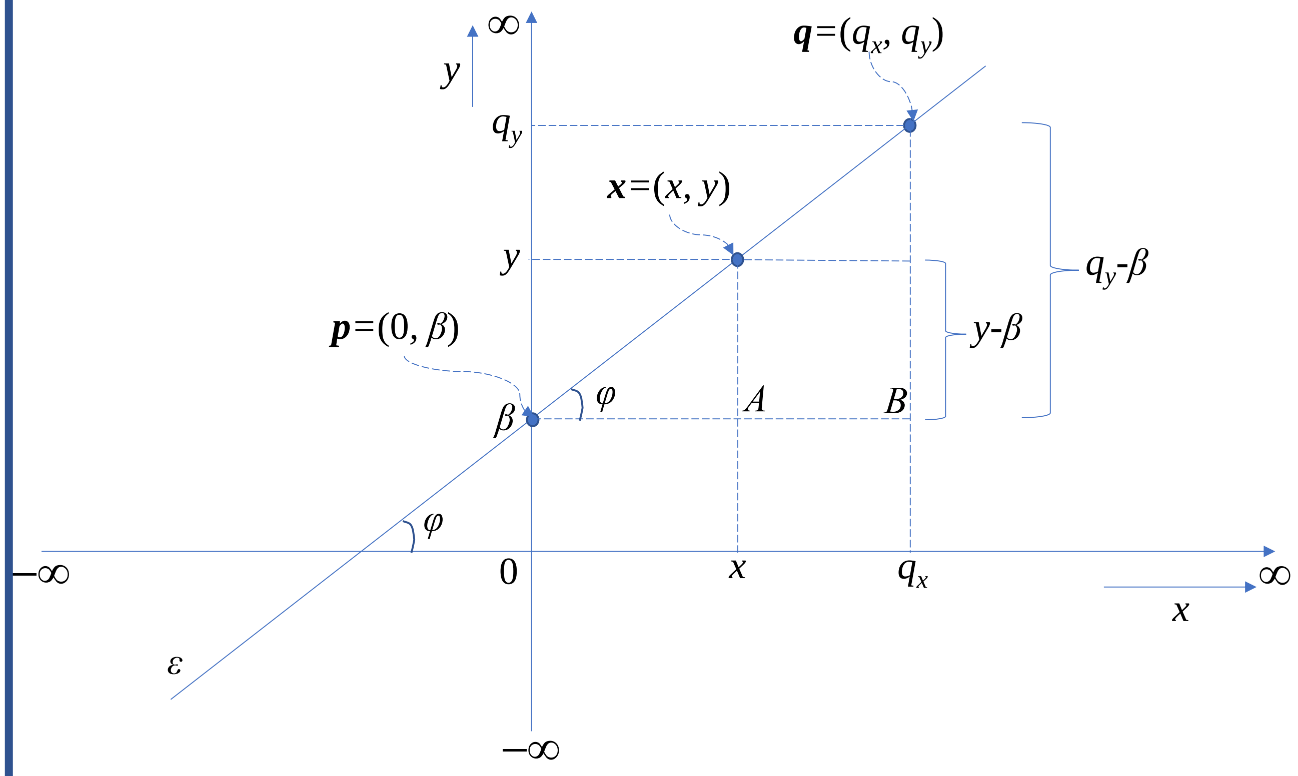
$$a = \frac{q_y - \beta}{q_x} \quad \text{και} \quad b = \beta \tag{7}$$

Όμως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\boldsymbol{pq}B$, η ποσότητα $\dfrac{q_y - \beta}{q_x}$

είναι η εφαπτομένη της γωνίας φ. Άρα η εξίσωση ε είναι,

$$y = \tan(\varphi)\, x + \beta \tag{8}$$

Όπου η γωνία φ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα των x, και β είναι το σημείο στο οποίο τέμνει τον κάθετο άξονα των y.



$$\boxed{y = ax + b = \frac{q_y - \beta}{q_x} x + \beta = \tan(\varphi)\, x + \beta}$$

Σχήμα 8. Εξίσωση ευθείας στο επίπεδο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Κατακόρυφες, οριζόντιες, κάθετες και παράλληλες ευθείες

Η ε_1 είναι κατακόρυφη: η κλίση της ως προς τον άξονα των x είναι 90^0 και άρα στην εξίσωση (8) το a είναι ίσο με

$$a = \tan(90^0) = \infty$$

Αυτό σημαίνει ότι το x παίρνει μία σταθερή τιμή x_0 για όλα τα y και η εξίσωσή της είναι $x=x_0$ για κάθε y.

Η ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες: έχουν την ίδια κλίση ως προς τον άξονα των x, δηλαδή $\varphi_2=\varphi_3$. Αυτό σημαίνει ότι έχουν το ίδιο a,

$$a = \tan(\varphi_2) = \tan(\varphi_3)$$

Η ε_4 και ε_3 είναι κάθετες: οι σχέση μεταξύ των εφαπτομένων των κλίσεων τους ως προς τον άξονα των x είναι

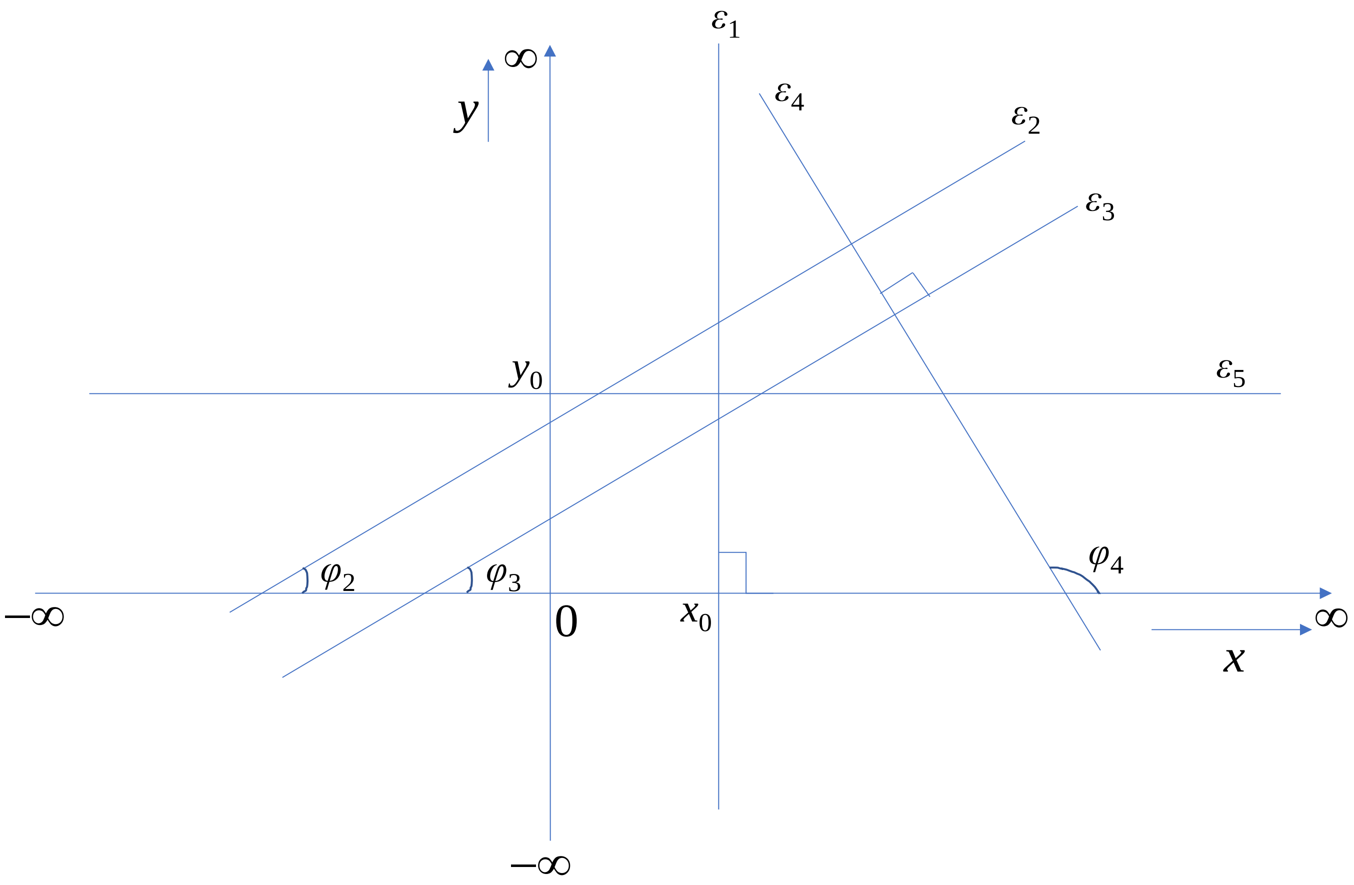
$$\tan(\varphi_3)\tan(\varphi_4) = -1$$

Η ε_4 και ε_3 είναι κάθετες και η ε_3 παράλληλη με την ε_2. Άρα και η ε_4 είναι κάθετη με την ε_2.

Η ε_5 είναι οριζόντια: η κλίση της είναι 0^0 ως προς τον άξονα των x και άρα

$$a = \tan(0^0) = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το y στην Εξ. (8) παίρνει μία σταθερή τιμή y_0 για όλα τα x και η εξίσωσή της είναι $y=y_0$ για κάθε y.



Σχήμα 9. Κατακόρυφες, οριζόντιες, κάθετες και παράλληλες ευθείες.