

Άσκηση 1

Να βρεθούν τα διαστήματα λύσεις των παρακάτω ανισοτήτων και, στη συνέχεια, να βρεθούν τα κοινά διαστήματα λύσεων.

$$\alpha) |2x + 3| \leq 5 \quad \text{και} \quad \beta) |x + 1| \leq 1$$

Λύση:

α) Εφαρμόζοντας την δεύτερη ιδιότητα της απολυτής τιμής έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |2x + 3| \leq 5 &\Leftrightarrow -5 \leq 2x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow -5 - 3 \leq 2x \leq 5 - 3 \Leftrightarrow -8 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow \\ &-4 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο λύσης πρώτης της ανισότητας είναι το διάστημα:

$$A = [-4, 1].$$

β) Εφαρμόζοντας την δεύτερη ιδιότητα της απολυτής τιμής έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |x + 1| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 - 1 \leq x + 1 - 1 \leq 1 - 1 \Leftrightarrow \\ &-2 \leq x \leq 0. \end{aligned}$$

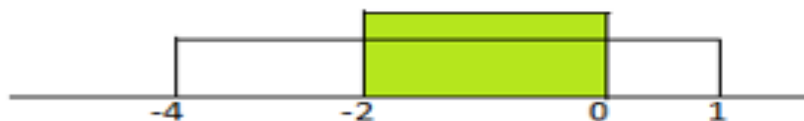
Άρα το σύνολο λύσης της ανισότητας είναι το διάστημα:

$$B = [-2, 0].$$

Το κοινό διάστημα λύσεων των δυο ανισοτήτων είναι το διάστημα:

$$\Gamma = A \cap B$$

Για να βρούμε το διάστημα Γ αναπαριστούμε τα διαστήματα A και B στον άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως παρακάτω:



Το χρωματισμένο διάστημα είναι το κοινό διάστημα λύσης των δυο ανισοτήτων. Τελικά έχουμε $\Gamma = [-2, 0]$.

Άσκηση 2

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 3)$ και $B(1, 4)$.
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1, 1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 2x + 7$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $\Delta(2, 1)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία $y = -2x + 5$.
4. Να εξετάσετε αν οι τρεις ευθείες, των προηγουμένων ερωτημάτων, είναι ανά δυο μεταξύ τους παράλληλες.

Λύση:

1. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5) και αντικαθιστώντας τα σημεία A και B προκύπτει ότι:

$$y = \frac{4 - 3}{1} x + 3 \Leftrightarrow y = x + 3.$$

2. Έστω $y = ax + b$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.
Εφόσον η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη στην $y = 2x + 7$, γνωρίζουμε ότι οι δυο ευθείες θα έχουν **ίδιο** συντελεστή διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y = 2x + 7$ είναι το 2, ενώ της ζητούμενης είναι a . Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $a = 2$.

Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό β , αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ στην ζητούμενη ευθεία και λύνουμε ως προς β .

$$y = 2x + b \xrightarrow{x=1, y=1} 1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -1.$$

Τελικά η ζητούμενη ευθεία είναι $y = 2x - 1$.

3. Έστω $y = ax + b$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.
Εφόσον η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη στην $y = -2x + 5$, γνωρίζουμε ότι το **γινόμενο** των συντελεστών διεύθυνσης των ευθειών θα ισούται με -1 .
Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y = -2x + 5$ είναι το -2 , ενώ της ζητούμενης είναι a . Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$a \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό β , αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου Δ στην ζητούμενη ευθεία και λύνουμε ως προς β .

$$y = \frac{1}{2}x + b \xrightarrow{x=2, y=1} 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \Leftrightarrow 1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Τελικά η ζητούμενη ευθεία είναι $y = \frac{1}{2}x$.

4. Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης των παραπάνω ευθειών είναι διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, άρα δεν υπάρχει ζεύγος παράλληλων ευθειών.