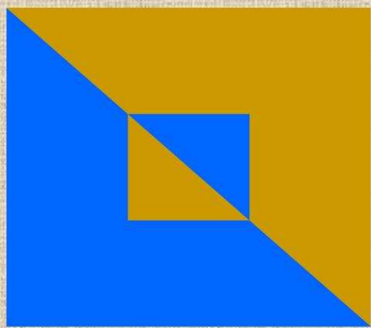
Εισαγωγή στη Μαθηματική Λογική

Κ. Δρόσος Π. Καραζέρης Ε. Παπαδοπετράκης

Εισαγωγή στη Μαθηματική Λογική



Πάτρα 2006

Απαγορεύεται η μερική ή ολική δημοσίευση του έργου αυτού χωρίς την σχετική άδεια των συγγραφέων. Επιτρέπεται η χωρίς κέρδος αναπαραγωγή του με οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και μόνον σκοπούς.

© 2006, Κ. Δρόσος, Παναγής Καραζέρης, Ε. Παπαδοπετράκης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΛΟΓΙΚΗ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

1.1 Εννοιολογική Εισαγωγή

1.1.1 Ένας Ορισμός για τη Γλώσσα

Πριν προχωρήσουμε είναι αναγκαίο να αποσαφηνίσουμε και να οριοθετήσουμε σημασιολογικά ορισμένους όρους που μας είναι απαραίτητοι.

Στον όρο γλώσσα δίνουμε το περιεχόμενο ενός συστήματος το οποίο αποτελείται από τρία **τουλάχιστον** σύνολα:

α) Ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων (ή συμβόλων) το **αλφάβητο**.

Το αλφάβητο μπορεί να αποτελείται από σύμβολα **ατομικού τύπου** δηλαδή κάθε σύμβολο να είναι ένα μεμονωμένο γράμμα, ή από σύμβολα **μοριακού τύπου**, δηλαδή συναρμογές ατομικών συμβόλων, ή ακόμη να είναι μείγμα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων. Σε ορισμένες περιπτώσεις το αλφάβητο δεν είναι πεπερασμένο. Είναι άπειρο αλλά αριθμήσιμο.

1.1.1 Παράδειγμα. Το αλφάβητο του συστήματος αρίθμησης που σήμερα είναι σε χρήση , και που αποτελεί τη «γλώσσα» των φυσικών αριθμών:

$$\{\,0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\,\}$$

είναι ένα αλφάβητο ατομικού τύπου. Απ' αυτό κατασκευάζονται οι λέξεις που αποτελούν τα ονόματα των αριθμών. Όπως $154, 100059687$ κ.τ.λ.

Αντίθετα στο αλφάβητο της φυσικής μας γλώσσας τα σύμβολα των διφθόγγων ει, οι, αι ου, μετά τη μονοφώνησή τους έγιναν σύμβολα ατομικού τύπου. Συμμετέχουν σαν να είναι ένα σύμβολο, ως συναρμογές, στο σχηματισμό των λέξεων.

β) Ένα πεπερασμένο σύνολο **κανόνων σύνταξης**. Οι κανόνες αυτοί, καθορίζουν τη σειρά με την οποία πρέπει να τεθούν τα στοιχεία του αλφάβητου ώστε να συγκροτούν **επιτρεπτές ή καλές** (γραμματικώς ορθές) ακολουθίες συμβόλων, τις **λέξεις** (ή τις **φράσεις**, αν ως αλφάβητο έχουμε το σύνολο των λέξεων της Ελληνικής γλώσσας δηλαδή ένα αλφάβητο μοριακού τύπου.)

1.1.2 Παράδειγμα. Σύμφωνα με τους συντακτικούς κανόνες του σημερινού συστήματος αρίθμησης η ακολουθία 00000013 δεν είναι αποδεκτή, δηλαδή δεν είναι λέξη της γλώσσας των αριθμών, δεν δηλώνει ένα αριθμό, ενώ η 13, όπως και κάθε άλλη που δεν αρχίζει από 0, είναι. Επίσης στη φυσική μας γλώσσα η «αικ» δεν είναι καλή ενώ η «και», που αποτελείται από τα ίδια σύμβολα, είναι.

Αν φανταστούμε το σύνολο των λέξεων της Ελληνικής γλώσσας, το Ελληνικό δηλαδή λεξιλόγιο, ως ένα μοριακού τύπου αλφάβητο, τότε με την εφαρμογή των συντακτικών κανόνων έχουμε ως αποτέλεσμα γραμματικώς ορθές ακολουθίες, δηλαδή φράσεις, της ελληνικής. Για παράδειγμα η «το παιδί πέταξε το τόπι» είναι φράση. Αντίθετα η «το παιδί πέταξε του τόπι» δεν είναι φράση αφού παραβιάζεται ένας σημαντικός κανόνας σύνταξης που υπαγορεύει ότι το αντικείμενο μιας φράσης τίθεται πάντα σε αιτιατική πτώση. Πρόκειται για μια μη γραμματικά σωστή ακολουθία λέξεων.

γ) Ένα σύνολο **σημασιολογικών κανόνων**. Οι κανόνες αυτοί αποδίδουν σημασία σε κάθε στοιχείο του αλφάβητου που συμμετέχει στη συγκρότηση μιας φράσης.

Είναι ανάγκη να διαχωρίσει κανείς τις δύο διαδικασίες που εμπλέκονται εδώ:

- **Τη διαδικασία της σηματοδότησης (S)**, που σε κάθε σημασία «$\sigma \in \Sigma$» αντιστοιχείται ένα τουλάχιστον «σήμα» ή «σύμβολο» «$S(\sigma) \in \Lambda$». Η σημασία σ, λέγεται **σημαινόμενον** ή και **σηματοδοτούμενον**, το δε σύμβολο $S(\sigma)$, λέγεται **σημαίνον** ή και **σηματοδοτούν**. Είναι βεβαίως δυνατόν σε μια σημασία να αντιστοιχούν περισσότερα του ενός σήματα.

- **Τη διαδικασία της σημασιοδότησης (E)**, όπου σε κάθε σύμβολο ή σήμα $s \in \Lambda$ αντιστοιχεί μια σημασία ή ερμηνεία $E(s) \in \Sigma$. Αναφορικά με αυτή τη διαδικασία θα μπορούσε κανείς να ονομάσει το s, σημασιοδοτούμενο, το δε $E(s)$, σημασιοδοτούν.

Σχηματικά παριστάνουμε τις δύο αντίστροφες διαδικασίες ως:

$$\Lambda \underset{S}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \Sigma$$

Μπορούμε να φανταστούμε τους σημασιολογικούς κανόνες ως διμελείς σχέσεις από το σύνολο των λέξεων Λ στο σύνολο των σημασιών Σ. Μια τέτοια σχέση E παίρνει μια λέξη x (**σημαίνον**) και την αντιστοιχεί σ' ένα στοιχείο y (**σημαινόμενο**), συγκροτώντας το **γλωσσικό σημείο** (x, y).

$$E : \Lambda \longrightarrow \Sigma \ \| \ x \mapsto E(x) = y$$

Στις γλώσσες των αριθμών που αναφέραμε η διμελής αυτή σχέση είναι συνάρτηση και μάλιστα ένα προς ένα. Η λέξη δηλαδή 17 δηλώνει πάντα τον ίδιο αριθμό που αποτελείται από μια δεκάδα και επτά μονάδες. Εδώ το σύνολο των σημασιών είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, ενώ η σημασιολογική συνάρτηση περιγράφεται από τη σχέση:

$$f(a_n \, a_{n-1} \dots a_2 \, a_1 \, a_0) = a_n \, 10^n + \dots + a_2 \, 10^2 + a_1 \, 10^1 + a_0 \, 10^0$$

όπου $a_i \in 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

Στις φυσικές γλώσσες, ιδιαίτερα όταν αυτές θεωρούνται διαχρονικά, η αντιστοίχηση αυτή δεν είναι ένα προς ένα. Η σημασία μιας λέξης εξαρτάται από τη γνωστική περιοχή και ενδεχομένως από τα συμφραζόμενα. Για παράδειγμα η λέξη *άρτιος* σε ένα μαθηματικό κείμενο σημαίνει *φυσικός αριθμός* που διαιρείται δια του δύο ενώ σ' ένα λογοτεχνικό κείμενο σημαίνει *καλοφτιαγμένος*. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **πολυσημία**.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι στις φυσικές γλώσσες τα σημαίνοντα και τα σημαινόμενα αποτελούν ένα αδιάσπαστο όλο, οργανικό συστατικό της «γλωσσικά δομημένης νόησης». Το γλωσσικό σημείο, παρά τη συμβατικότητά του, είναι ένα αδιάσπαστο όλο, μια δομή, με τον ίδιο τρόπο που είναι αδιάσπαστο ένα μόριο νερού: όταν το νερό διασπαστεί σε υδρογόνο και οξυγόνο, χάνει όλες τις ιδιότητές του, ενώ για παράδειγμα σβήνει τη φωτιά, τα προϊόντα της διάσπασής του την ευνοούν αφού το μεν υδρογόνο καίγεται, το δε οξυγόνο, με την έννοια ότι η καύση δεν είναι τίποτα άλλο από την ένωση με το οξυγόνο.

Όπως διαπιστώνει ο Λεβ Βυγκότσκι η σημασία μιας λέξης είναι ταυτόχρονα και γλωσσικό και νοητικό φαινόμενο. Το γλωσσικό λοιπόν σημείο είναι μια, εξελισσόμενη δομή, διαλεκτική σύνθεση μεταξύ σημαίνοντος και σημαινόμενου:

$$\boxed{\text{σημαινόμενο}} \longrightarrow \ominus \longleftarrow \boxed{\text{σημαίνον}}$$

Η συνδυασμένη εφαρμογή των συντακτικών και σημασιολογικών κανόνων πάνω στο λεξιλόγιο, μια καθόλου γραμμική διαδικασία, αποτελεί μια υλοποίηση, μια πραγμάτωση, της γλώσσας. Το αποτέλεσμα της πραγμάτωσης αυτής είναι **ο λόγος**. **Γραπτός** μεν εάν το αλφάβητο είναι σύνολο γραφημάτων, **προφορικός** δε εάν το αλφάβητο είναι σύνολο φωνημάτων. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας υλοποίησης καθώς και του αποτελέσματος, δηλαδή του λόγου, εξαρτώνται απόλυτα από το είδος της γλώσσας που υλοποιείται. Το παραπάνω πλαίσιο αποτελεί αναλυτικό ορισμό για τις τεχνητές γλώσσες, ενώ αγκαλιάζει μόνο τους τρεις βασικούς τομείς των φυσικών γλωσσών (αλφάβητο, σύνταξη, σημασιολογία) αφήνοντας απέξω άλλους σημαντικούς τομείς όπως η φωνολογία, η ετυμολογία, η ορθογραφία κ.τ.λ

Το γεγονός ότι το πλαίσιο του ορισμού που δώσαμε παραπάνω αποτελεί αναλυτικό ορισμό για τις τεχνητές γλώσσες σημαίνει ότι αν δοθούν τα τρία αυτά σύνολα η γλώσσα είναι πλήρως ορισμένη, ενώ σε ότι αφορά τις φυσικές γλώσσες αγκαλιάζει μόνο τους τρεις βασικούς τομείς που μας ενδιαφέρουν εδώ.

1.1.2 Μια Ταξινόμηση των Γλωσσών

Οι γλώσσες αναπτύσσονται στη βάση της ανάγκης για επικοινωνία. Απ' αυτή τη σκοπιά μπορούμε να τις διακρίνουμε σε **φυσικές**, που είναι οι γλώσσες οι οποίες διαμορφώνονται μέσα από την ανάγκη για διανθρώπινη επικοινωνία, αυτές δηλαδή που ιστορικά αναπτύχθηκαν μ' ένα φυσικό τρόπο, και σε **τεχνητές**, που είναι οι γλώσσες που δημιουργούνται από τον άνθρωπο κάτω από την ανάγκη επικοινωνίας ανθρώπου με τη μηχανή ή μηχανής με μηχανή ή μερών της ίδιας μηχανής, όπως είναι οι γλώσσες των υπολογιστών.

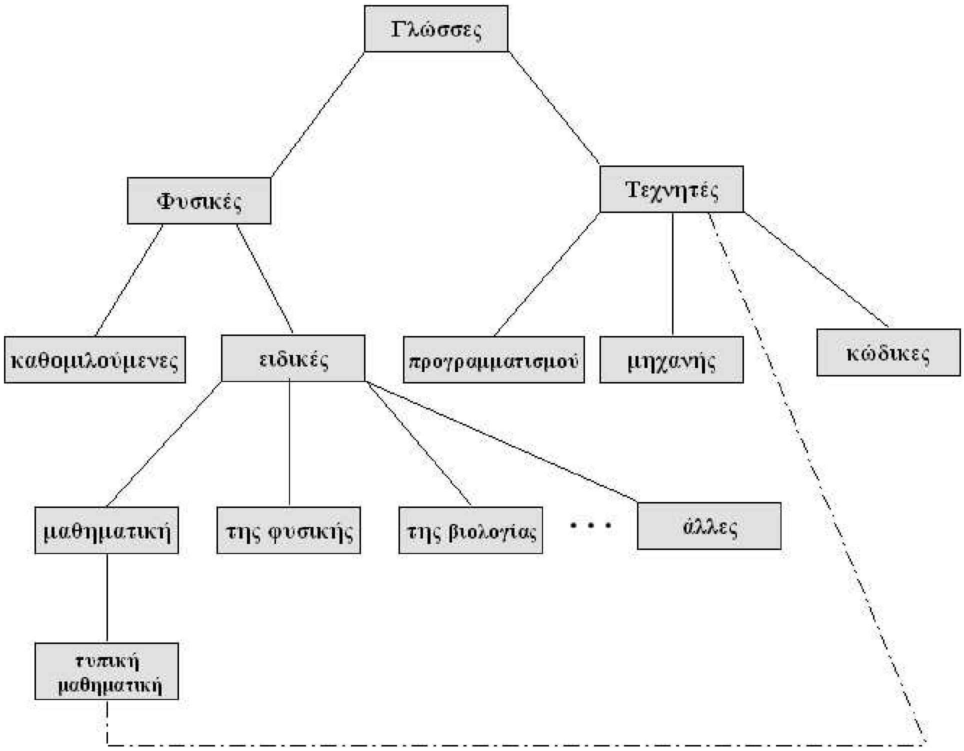
Οι φυσικές γλώσσες διακρίνονται σε **καθομιλούμενες** γλώσσες , που είναι οι γλώσσες που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για διανθρώπινη επικοινωνία στα πλαίσια της καθημερινότητας, και σε **ειδικές** οι οποίες δημιουργούνται από την ανάγκη καταγραφής, επεξεργασίας και ανταλλαγής πληροφοριών που αναφέρονται σε μια πολύ συγκεκριμένη, συχνά αυστηρά ορισμένη, γνωστική περιοχή, όπως είναι τα Μαθηματικά, η Φυσική, η Ιατρική, η Ναυπηγική, κ.τ.λ..

Εξετάζοντας τις απαρχές του Ελληνικού μαθηματικού λόγου(;), τον οποίο πρέπει να βλέπουμε ως υλοποίηση της μαθηματικής γλώσσας, διαπιστώνουμε ότι **μια ειδική γλώσσα διαμορφώνεται, στα πρώτα της στάδια, μέσα στα πλαίσια της καθομιλουμένης, με σταδιακές αλλαγές αρχικά στο σύστημα των σημασιολογικών κανόνων**, ενώ για τις νέες έννοιες που έρχονται στο φως είναι δυνατόν να πλάθονται και νέες λέξεις για να τις εκφράσουν. Τέτοιες γλώσσες είναι όλες οι εξειδικευμένες επιστημονικές γλώσσες, όπως η γλώσσα της Ιατρικής, της Βιολογίας, της Μαθηματικής κ.τ.λ.

Αξίζει να τονίσουμε ότι καθ' όλη τη διάρκεια της κλασικής αρχαιότητας η ειδική γλώσσα των Μαθηματικών διέθετε το ίδιο αλφάβητο και σύνταξη με τη καθομιλούμενη της εποχής, διέφερε μόνο ως προς τους σημασιολογικούς κανόνες, οι λέξεις δηλαδή είχαν διαφορετικό περιεχόμενο. Τα σύμβολα ως συντομογραφίες αρχικά κάποιων λέξεων εμφανίσθηκαν πολύ αργότερα. Η εμφάνισή τους σηματοδοτεί την αλλαγή και του αλφάβητου και των συντακτικών κανόνων. Έχουμε δηλαδή μια ακόμα μεγαλύτερη διαφοροποίηση από τη καθομιλούμενη. Η διαφοροποίηση αυτή έγινε ακόμα μεγαλύτερη στις αρχές του αιώνα μας. Η εισαγωγή από τον Cantor της έννοιας του συνόλου στα μαθηματικά, περί τα τέλη του 19ου αιώνα, τα παράδοξα που ακολούθησαν και η προσπάθεια υπέρβασης της κρίσης που δημιούργησαν, έδωσαν όπως είναι γνωστό, μεγάλη ώθηση στην ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής και του μαθηματικού φορμαλισμού. Μέσα σ' αυτό το γόνιμο κλίμα των αρχών του αιώνα μας, η προσπάθεια αυστηρής οριοθέτησης των εκφραστικών μέσων της μαθηματικής γλώσσας στην οποία ενυπάρχουν όλες οι «αδυναμίες» της καθομιλουμένης από την οποία προέρχονται, είναι ένας από τους κύριους παράγοντες δημιουργίας των «τυπικών» μαθηματικών γλωσσών που έχουν όλα τα χαρακτηριστικά των τεχνιτών Γλωσσών και οι οποίες είναι αντικείμενο μελέτης της Μαθηματικής Λογικής.

Οι τεχνητές τέλος γλώσσες, κατασκευασμένες κατά κανόνα από τον άνθρωπο για πολύ συγκεκριμένους σκοπούς, είναι πολύ φτωχές συγκρινόμενες με τις φυσικές. Διαθέτουν ένα πολύ μικρό, συγκριτικά, αριθμό από τυπικούς κανόνες σύνταξης, με έναν τουλάχιστον από τους κανόνες αναδρομικό, ενώ η σημασιολογία τους είναι αυστηρά οριοθετημένη. Η σημειοσυνάρτησή τους, η απεικόνιση δηλαδή που δίνει περιεχόμενο (σημασία) στις λέξεις, είναι ένα προς ένα. Το διάγραμμα της ταξινόμησης που προτείνουμε παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.

Η τυπική μαθηματική γλώσσα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν και ιστορικά έχει προκύψει από την ειδική γλώσσα των μαθηματικών, έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τις τεχνητές γλώσσες, δηλαδή τυπικούς κανόνες σύνταξης σημασιολογίας. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι η φυσική γλώσσα διαθέτει μεγάλη εκφραστικότητα αλλά μικρή ακρίβεια, ενώ οι τυπικές-τεχνητές γλώσσες έχουν μεγάλη ακρίβεια αλλά μικρή εκφραστικότητα. Η πορεία από τις φυ-



Σχήμα 1.1: Ταξινόμηση Γλωσσών

σικές γλώσσες στις τυπικές μαθηματικές γλώσσες και τη μαθηματική λογική σκιαγραφείται από το ακόλουθο σχήμα:

$$\boxed{\text{Φυσική Γλώσσα}} \xrightarrow{\text{τυποποίηση-αφαίρεση}} \boxed{\text{Τυπικές Γλώσσες}}$$

$$\boxed{\text{Τυπικές Γλώσσες}} \xrightarrow{\text{Μαθηματικοποίηση}} \boxed{\text{Μαθηματική Λογική}}$$

Κατά την αφαιρετική διαδικασία οι δύο αδιάσπαστοι πόλοι του διαλεκτικού γλωσσικού σημείου εντάσσονται σε διαφορετικούς τομείς: το «σημαίνον» στη **σύνταξη** το δε «σημαινόμενο» στη **σημασιολογία**, και μελετώνται ξεχωριστά. Ένα αξίωμα ή θεώρημα μπορεί να ειδωθεί από δύο σκοπιές: Μπορεί να θεωρηθεί ως μια «γραπτή πρόταση» που γράφεται στο χαρτί ή να θεωρήσουμε την «σημασία» της πρότασης, το γεγονός δηλαδή στο οποίο αναφέρεται η πρόταση. Η σύνταξη και η σημασιολογία είναι τα δύο βασικά μέρη της λογικής με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια. Η γραπτή πρόταση είναι ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, ενώ η σημασία συνήθως είναι μια αφηρημένη μαθηματική έννοια. Έτσι μελετώντας το συντακτικό μέρος προσεγγίζουμε το αφηρημένο με το συγκεκριμένο. Ωστόσο ο απώτερος στόχος είναι η σημασιολογία, η μελέτη δηλαδή των μαθηματικών εννοιών. Μπορούμε δηλαδή,

> να μελετούμε τις έννοιες που συλλαμβάνονται και εκφράζονται από ένα μαθηματικό αξιωματικό σύστημα, μελετώντας την δομή των «γραπτών προτάσεων» που τυπικά εκφράζουν τα αξιώματα, μελετώντας δηλαδή το αντίστοιχο τυπικό σύστημα.

Ένα από τα θαυμαστά φαινόμενα που επηρεάζουν τα θεμέλια των μαθηματικών είναι η διαπίστωση ότι στη γλώσσα των μαθηματικών αντανακλάται η δομή που διαθέτουν οι «μαθηματικές έννοιες» και επομένως είναι αρθρωμένη ως μια δομή, που μπορεί κατά συνέπεια να μελετηθεί με μαθηματικές μεθόδους. Το μεγάλο ερώτημα τη λογικής είναι κατά πόσον η σύνταξη εκφράζει σημασιολογία!

Στις τυπικές τεχνητές γλώσσες, όπως για παράδειγμα οι γλώσσες προγραμματισμού, Basic, Pascal, C^{++}, κ.τ.λ. η αλληλεπίδραση μεταξύ εννοιών και συμβόλων παύει να είναι ζωντανή, παύει στην ουσία να υπάρχει έτσι που ο διαχωρισμός σε σύμβολα και έννοιες είναι φυσιολογικά δυνατός με τη δομή των εννοιών να αντανακλάται στη δομή της γλώσσας. Η τυπική μαθηματική γλώσσα θα είναι αντικείμενο μελέτης της κατηγορηματικής λογικής στο Κεφάλαιο 3.

Στην πιο πάνω συζήτηση υπάρχουν δύο συγκεκριμένες πλευρές που θα πρέπει να τονισθούν. Η έννοια της «τυποποίησης» και η έννοια της «μαθηματικοποίησης». Η τυποποίηση έχει πάντοτε να κάνει με τον αυστηρό καθορισμό μιας «γλώσσας» συμβόλων και μηχανικών διαδικασιών (αλγορίθμων). Ένα **τυπικό σύστημα** είναι ένα αξιωματικό σύστημα, στο οποίο μπορούμε να κάνουμε αποδείξεις που μπορούν να ελεγχθούν μηχανικά.

Ένα τυπικό σύστημα λοιπόν χονδρικά, είναι **το συντακτικό μέρος ενός αξιωματικού συστήματος** και είναι ένα είδος «μηχανικής νοημοσύνης» που είναι δυνατόν να συλλαμβάνει και να εκφράζει, μέσα από τη «δομή» των προτάσεων της γλώσσας, τη «σημασία» των εννοιών που συλλαμβάνει το αντίστοιχο μαθηματικό αξιωματικό σύστημα.

Από την άλλη μεριά η «μαθηματικοποίηση» δεν είναι αναγκαία ένα «τυπικό σύστημα» αλλά είναι μια αξιωματική σύλληψη της «δομής» κάποιου μέρους μιας «πραγματικότητας». Συνήθως τέτοιες «μαθηματικοποιήσεις» εκφράζονται σήμερα ή με τη χρήση της συνολοθεωρίας (σύνολα, σχέσεις, συναρτήσεις, δομές, ομομορφισμοί κ.λπ.) ή με τη χρήση της Θεωρίας Κατηγοριών και βασίζονται όλες πάνω στην γενική έννοια του «αξιωματικού συστήματος». *Η μαθηματικοποίηση του τυπικού συστήματος της μαθηματικής λογικής είναι ακριβώς η έκφραση των «γλωσσικών δομών» της τυπικής γλώσσας με τη χρήση καθιερωμένων μαθηματικών δομών και αξιωματικών συστημάτων. Επί πλέον οι ερμηνείες της τυπικής γλώσσας γίνονται στον κόσμο των μαθηματικών αντικειμένων.* Τα αξιωματικά συστήματα είναι το κοινό στοιχείο των τυπικών και των μαθηματικών συστημάτων.

Όταν παρουσιάζουμε την μαθηματική λογική, προσπαθούμε να δείξουμε ότι η τυποποίηση μπορεί να επιτευχθεί, αλλά ποτέ δεν επιμένουμε στην πλήρη και αυστηρή έκθεση της τυποποίησης.

1.1.3 Γλώσσα και Λογική

Ας σκεπτόμαστε τη γλώσσα ως σύστημα όπως την έχουμε περιγράψει και ας θεωρήσουμε ότι για αλφάβητο έχουμε το ατομικού τύπου αλφάβητο A με τα 24 σύμβολα (τα κεφαλαία γράμματα) και ως συντακτικούς και σημασιολογικούς κανόνες αυτούς που είναι ενσωματωμένοι στο γλωσσικό μας αισθητήριο, και οι οποίοι καθορίζουν τη σειρά με την οποία τίθενται τα στοιχεία του αλφάβητου για να δώσουν καλές ακολουθίες τις *λέξεις*, ανεξάρτητα από το αν διαθέτουμε ή όχι αναλυτική γνώση αυτών των κανόνων. Μια πραγμάτωση της γλώσσας αυτής θα έχει ως αποτέλεσμα το σύνολο των λέξεων της Ελληνικής γλώσσας, δηλαδή το λεξιλόγιο Λ. Την πραγμάτωση αυτή θα την ονομάσουμε **πραγμάτωση πρώτου βαθμού**.

Αν τώρα θεωρήσουμε ως αλφάβητο το $A \cup \Lambda$ που είναι ένα αλφάβητο μοριακού τύπου, και ως σύνολο κανόνων σύνταξης και σημασιολογίας αυτούς που πάλι διαθέτουμε στο γλωσσικό μας αισθητήριο και που μας καθορίζουν τη σειρά με την οποία τίθενται οι λέξεις για να δώσουν γραμματικώς ορθές ακολουθίες δηλαδή φράσεις, τότε η πραγμάτωση αυτής της γλώσσας δεν θα είναι τίποτε άλλο από το σύνολο των φράσεων Φτης ελληνικής γλώσσας. Κρατώντας την προηγούμενη ορολογία την υλοποίηση αυτή θα πρέπει να την ονομάσουμε **πραγμάτωση δευτέρου βαθμού**.

Μπορούμε τώρα να θέσουμε το εξής ερώτημα: *Με αλφάβητο το $A \cup \Lambda \cup \Phi$ είναι δυνατή μια πραγμάτωση τρίτου βαθμού;* Είναι φανερό πως ναι. *Όμως ποιος είναι ο χαρακτήρας των συντακτικών κανόνων. Τι μας υπαγορεύει τη σειρά με την οποία θα τεθούν οι φράσεις ώστε να δώσουν αποδεκτές ακολουθίες.* Ας εξετάσουμε κάποια παραδείγματα. Ας υποθέσουμε ότι, σχεδιάζουμε ένα φανταστικό σενάριο για να ανοίξουμε μια συζήτηση για τους κύκνους και ότι διατυπώνουμε δύο εισαγωγικές φράσεις τις:

φ_1 : *Βρισκόμαστε στην άκρη της λίμνης.*

φ_2 : *Ένας κατάλευκος κύκνος έπεσε φτερουγίζοντας στο νερό.*

Η σειρά με την οποία θα εκφέρουμε τις δύο φράσεις είναι προφανώς $\varphi_1\varphi_2$ και όχι $\varphi_2\varphi_1$ εκτός και λόγοι λογοτεχνικού ύφους επιβάλουν μια τέτοια αντιστροφή της σειράς. Οι δύο φράσεις αποτελούν μέρος μιας διήγησης η οποία περιγράφει κάποια γεγονότα που συνέβησαν σε κάποια μικρή περιοχή της πραγματικότητας. Τα γεγονότα αυτά συνέβησαν με μια σειρά η οποία υποβάλει και τη ροή του αφηγηματικού λόγου, δηλαδή τη σειρά εκφοράς των φράσεων.

Όμως γιατί κάνουμε αναφορά σε λίμνη, γιατί δηλαδή επιλέγουμε ως τοποθεσία τη λίμνη και όχι την κορυφή του Ολύμπου; Η επιλογή αυτή έχει γίνει με βάση ένα πολύ συγκεκριμένο κανόνα τον οποίο έχουμε αυθόρμητα εφαρμόσει. Τόσο αυθόρμητα, δηλαδή χωρίς αναλυτική σκέψη, όσο αυθόρμητα έχουμε θέσει τη λέξη λίμνη στη φ_1 σε γενική πτώση και όχι σε αιτιατική. Ο κανόνας έχει λειτουργήσει στα πλαίσια ενός συλλογισμού που έχει πραγματοποιηθεί στο βάθος της σκέψης μας ως εξής:

– *Όλα τα αντικείμενα που είναι κύκνοι ζουν κοντά σε νερό*
– *Το αντικείμενό μας* (αυτό στο οποίο θέλουμε να αναφερθούμε) *είναι κύκνος*

– *Ο κύκνος μας ζει κοντά σε νερό*

Σημειώστε ότι η οριζόντια γραμμή στον πιο πάνω συλλογισμό σημαίνει *τότε*, ή *άρα*, ή *οπότε*, παίζει γενικά το ρόλο ενός συμπερασματικού συνδέσμου, μιας λέξης δηλαδή που τίθεται μπροστά από μια φράση για να δείξει πως η φράση αυτή είναι το αποτέλεσμα ενός συλλογισμού.

Η λειτουργία του ίδιου λογικού κανόνα υπαγορεύει το χαρακτηρισμό *λευκός* (ή *κατάλευκος* για έμφαση) στη φ_2:

– *Όλα τα αντικείμενα που ανήκουν στη κλάση των κύκνων είναι λευκά*
– *Το αντικείμενό μας είναι κύκνος*

– *Ο κύκνος μας είναι λευκός*

Το συλλογιστικό αυτό σχήμα μελετήθηκε, μαζί με άλλα, για πρώτη φορά από τον Αριστοτέλη στον οποίο οφείλεται το κλασσικό παράδειγμα:

– *Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί*
– *Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος*

– *Ο Σωκράτης είναι θνητός*

Της ίδιας μορφής είναι και το:

– *Όλα τα πτηνά είναι σαρκοφάγα*
– *Το γεράκι είναι πτηνό*

– *Το γεράκι είναι σαρκοφάγο*

Από τα δύο τελευταία το μεν πρώτο δεν προξενεί καμιά αμφιβολία, κάτι που δεν ισχύει για το δεύτερο, αφού ναι μεν *Το γεράκι είναι σαρκοφάγο* δεν είναι όμως σωστό ότι *Όλα τα πτηνά είναι σαρκοφάγα.*

Σε μια γενική διατύπωση ο κανόνας αυτός είναι:

– *Όλα τα αντικείμενα που ανήκουν στο A είναι B*
– *Το a ανήκει στο A*

– *Άρα το a είναι B*

ή ακόμα σε περισσότερο τυπική γλώσσα:

$-(\forall x \in A)P(x), \quad a \in A.$

$-P(a)$

Ακόμη, κάποιοι κανόνες οι οποίοι ξεφεύγουν από τη γραμματική και το συντακτικό, που διέπουν λογικές διαδικασίες, μας υπαγορεύουν τον τρόπο που διατυπώνουμε τη σκέψη μας και τη σειρά στην οποία θα διατυπώσουμε τις φράσεις που είναι φορείς της σκέψης μας.

Αν και θα είμαστε σε θέση να εξετάσουμε αναλυτικά τέτοια παραδείγματα αφού δούμε ορισμένα στοιχεία από την προτασιακή λογική, θα αναφέρουμε ένα τέτοιο παράδειγμα. Πότε κάποιος είναι σε θέση να διατυπώσει τις φράσεις:

Είναι μέρα. Έχει φως

χωρίς να υπάρχει περίπτωση να διαψευστεί; Φυσικά όταν τη στιγμή που τις διατυπώνει είναι μέρα. Ποια είναι όμως η αντανάκλαση του γεγονότος αυτού στη διαδικασία εκφοράς των φράσεων αυτών και με αυτή τη σειρά; Εδώ λειτουργεί ένα συμπερασματικό σχήμα [1], το εξής:

[1]το σχήμα είναι ένα από τα πέντε **συμπερασματικά σχήματα** τα οποία είχαν μελετήσει οι Στωϊκοί φιλόσοφοι, οι πρώτοι στην ιστορία της ανθρώπινης σκέψης που μελέτησαν ποτέ τέτοιου είδους σχήματα και τον τρόπο να βγάζουμε σωστά συμπεράσματα. Το προηγούμενο παράδειγμα συλλογισμού οι Στωϊκοί το διατύπωναν: «εἰ τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον· ἀλλὰ μὴν τὸ πρῶτον· τὸ ἄρα δεύτερον.»

– *Εάν είναι μέρα τότε έχει φως*
– *Είναι μέρα*

– *Άρα έχει φως*

Αυτό σημαίνει πως είναι γνωστό από την ανθρώπινη εμπειρία και αδιαμφισβήτητο ότι πάντα όταν είναι μέρα έχει φως. Οποτεδήποτε λοιπόν κάποιος μας διαβεβαιώσει ότι είναι μέρα τότε αβίαστα και αυθόρμητα βγαίνει το συμπέρασμα ότι έχει φως.

Αν συμβολίσουμε τις προτάσεις που εμφανίζονται εδώ με γράμματα: Την «*είναι μέρα*» με το A, και την «*έχει φως*» με το B, τότε το σχήμα εκφράζεται ως:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B, \\ \underline{A \qquad\qquad} \\ B \end{array}$$

Οποιεσδήποτε και να είναι οι προτάσεις A και B, ανεξάρτητα δηλαδή από τις σημασίες των A και B, το σχήμα αυτό είναι πάντα σωστό, που σημαίνει πως πρόταση B είναι λογική συνέπεια, ή συμπέρασμα των $A \rightarrow B$ και A.

Η λογικός συλλογισμός (η ουσία της Λογικής) λοιπόν είναι σύμφυτος με τη γλώσσα, και βασίζεται στην τυπική-συντακτική μορφή των προτάσεων, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που η γραμματική και το συντακτικό είναι σύμφυτα με τη φυσική γλώσσα, και εκφράζουν τις «σωστές» από συντακτικής και γραμματικής απόψεως προτάσεις.

Η λογική ξεκίνησε, ήλθε δηλαδή στο προσκήνιο της ιστορίας, ως διερεύνηση της σκέψης σε συνάρτηση με τη γλωσσική έκφραση. Συγκεκριμένα και τα δύο φιλοσοφικά ρεύματα της κλασικής αρχαιότητας, ο Αριστοτέλης δηλαδή και οι Περιπατητικοί από τη μια και οι Στωϊκοί με το Χρύσιππο από την άλλη, που είναι οι πατέρες της Λογικής, επιχείρησαν να συγκροτήσουν μια θεωρία για τη διαλεκτική–για την τέχνη δηλαδή της συζήτησης– και δημιούργησαν την πρώτη Κατηγορηματική και Προτασιακή Λογική αντίστοιχα.

Παράλληλα η γλωσσική επιστήμη διερευνά τη γλώσσα και το λόγο σε συνάρτηση με τη σκέψη που εκφράζεται.

1.2 Στοιχεία από τον Λογισμό των Προτάσεων

1.2.1 Φράση, Πρόταση, Τιμή αλήθειας μιας Πρότασης

Ο άνθρωπος συνεννοείται, επικοινωνεί με τους συνανθρώπους του με τη βοήθεια **καταλλήλων συνόλων από λέξεις**. Τα σύνολα αυτά είναι δομημένα σύμφωνα με τους γραμματικο-συντακτικούς κανόνες της γλώσσας αλλά και σύμφωνα με λογικούς κανόνες όπως στη προηγούμενη παράγραφο έχουμε συζητήσει. Η μικρότερη ακολουθία από λέξεις η οποία αποτελείται από ένα ονοματικό και ένα ρηματικό σύνταγμα, το λέμε ατομική φράση (ή περίοδο). Πρόκειται για εκείνο το κομμάτι λόγου που οι φιλόλογοι ονομάζουν πρόταση:

Ο Σωκράτης είναι σοφός

Τα δύο βασικά συστατικά της φράσης είναι το ονοματικό σύνταγμα (το αποτέλεσμα δηλαδή μιας διαδικασίας σύνταξης που έχει αξία ονόματος) και το ρηματικό σύνταγμα. Στη πιο πάνω φράση είναι: Το «*Ο Σωκράτης*», είναι το ονοματικό σύνταγμα και το: «*είναι σοφός*» το ρηματικό.

Η φράση, από σημασιολογική σκοπιά, είναι το μικρότερο κομμάτι λόγου με αυτοτελές περιεχόμενο (ή σημασία).

Οι φράσεις ανάλογα με το περιεχόμενό τους, διακρίνονται σε **ερωτηματικές**, **προστακτικές**, **αποφαντικές**, **θαυμαστικές**, κ.τ.λ. Στο σύνολο των φράσεων, όπως μια ερωτηματική φράση εκφράζει μια ερώτηση, μια προστακτική φράση εκφράζει μια προσταγή, μια ευκτική φράση εκφράζει μια ευχή ή μια επιθυμία κ.τ.λ. έτσι και **μια αποφαντική** (ή δηλωτική) φράση εκφράζει **μια πρόταση**. Προτάσσει αυτό που ενδεχομένως συμβαίνει.

Αν το γεγονός που δηλώνεται συμβαίνει τότε λέμε ότι η φράση λέει την αλήθεια , ή ότι η αντίστοιχη πρόταση είναι σημασιολογικά αληθής, αν δεν συμβαίνει λέμε ότι είναι ψέμα, ή ψευδής η αντίστοιχη πρόταση. Προς το παρόν μας αρκεί η διαισθητική αυτή περιγραφή των εννοιών «*αλήθεια*» και «*ψεύδος*».

1.2.1 Παράδειγμα. **1)** «*Ο αριθμός x είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3*»

Η ακολουθία αυτή είναι μία φράση.

2) «*3 άρτιος ξ του και ο είναι αριθμός πολλαπλάσιοι*»

Η ακολουθία αυτή **δεν** είναι φράση, γιατί οι λέξεις που την απαρτίζουν δεν έχουν τεθεί σε μια σειρά προβλεπόμενη από τους γραμματικο-συντακτικούς κανόνες, δεν είναι «δομημένη» σύμφωνα με τους κανόνες της γλώσσας.

3) *«Το τρίγωνο ενός τετραγώνου είναι διαιρέτης του 3»*

Η ακολουθία αυτή δεν φράση, γιατί ενώ ακολουθεί τους τυπικούς συντακτικούς κανόνες, αποτελείται από ένα ονοματικό σύνταγμα το *«Το τρίγωνο ενός τετραγώνου»* και ένα ρηματικό το *«είναι διαιρέτης του 3»*, αγνοεί εντελώς τους σημασιολογικούς κανόνες, δεν εκφράζει λοιπόν κάποιο νόημα.

4) *«Για κάθε πραγματικό αριθμό x,* $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$*»*

Η ακολουθία αυτή είναι μία φράση της Μαθηματικής Γλώσσας. Ιδού και μερικά ακόμη παραδείγματα φράσεων :

5) *«Υπάρχει ένας τουλάχιστο φυσικός αριθμός x μεγαλύτερος του* 10*»*

6) *«Το χιόνι είναι μαύρο και ο ουρανός είναι καταγάλανος»*

7) *«Ένα από τα βιβλία του Καζαντζάκη έχει τίτλο Καπετάν Μιχάλης,άρα ο Καπετάν Μιχάλης είναι ένας ήρωας μυθιστορήματος»*

8) *«Ο φυσικός αριθμός x είναι πολλαπλάσιο του φυσικού αριθμού* 100*»*

9) *«Εάν ταξιδέψω, τότε θα σας αποχαιρετήσω»*

10) *«Ένα τρίγωνο είναι ισογώνιο, μόνο αν είναι ισόπλευρο»*

11) *«Το χιόνι είναι μαύρο»*

12) *«Ο αριθμός* 14 *είναι άρτιος»*

Όταν μελετάμε την αριθμητική είναι πολύ βολικό να συμβολίζουμε τα αντικείμενα τα οποία θέλουμε να μελετήσουμε με γράμματα, του Ελληνικού ή Λατινικού, αλφάβητου. Έτσι η διατύπωση του κανόνα:

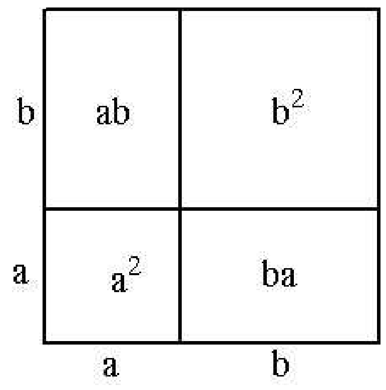
«Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο οποιωνδήποτε φυσικών αριθμών είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών αυτών, συν το διπλάσιο γινόμενό τους»

με τη βοήθεια της γλώσσας της αριθμητικής, γράφεται:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Ενώ με γεωμετρικά εκφραστικά μέσα, στη γλώσσα δηλαδή της γεωμετρίας, ο κανόνας αυτός περιγράφεται από το σχήμα:

Η συνήθεια αυτή στα μαθηματικά είναι τόσο καθημερινή που περνά απαρατήρητη. Αφού όμως εδώ υποσχόμαστε να μελετήσουμε με Μαθηματικό



Σχῆμα 1.2: Σχηματική αναπαράσταση του $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

τρόπο και μέθοδο ορισμένες πλευρές του τρόπου που σκεπτόμαστε, να μελετήσουμε τις προτάσεις και τις ιδιότητές τους, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία αυτή.

Θα συμβολίζουμε λοιπόν με γράμματα και μάλιστα τα κεφαλαία του Ελληνικού αλφάβητου τις απλούστερες προτάσεις. Ένα γράμμα δηλαδή, έστω το A, θα συμβολίζει μια πρόταση δηλαδή το περιεχόμενο κάποιας αποφαντικής φράσης που δεν ξέρουμε ποια είναι ούτε μας ενδιαφέρει. Αυτό για το οποίο είμαστε βέβαιοι είναι ότι αυτή η πρόταση έχει δύο δυνατότητες να είναι αλήθεια (α) ή να είναι ψέμα (ψ). Το γράμμα A δηλαδή μπορεί να πάρει δύο τιμές, με τον ίδιο τρόπο που το γράμμα x στη συμβολική γλώσσα της αριθμητικής των θετικών ακεραίων μπορεί να πάρει μια από τις τιμές $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Είναι λοιπόν και το A μια μεταβλητή και μάλιστα μια **προτασιακή μεταβλητή** δηλαδή $A \in \{\alpha, \psi\}$. Τις δύο τιμές α και ψ τις λέμε **τιμές αλήθειας** ή **αληθοτιμές**.

Υπάρχουν όμως και αποφαντικές φράσεις για τις οποίες δεν είναι δυνατόν να απαντήσουμε αν το γεγονός που δηλώνουν είναι αληθινό ή όχι, όπως είναι η απόφανση:

Το πλήθος των αστεριών είναι περιττό

Μια τέτοια απόφανση δεν εκφράζει μια πρόταση. Τις αποφάνσεις αυτές τις λέμε **άδηλες**[2]

[2]Τον όρο αυτό τον είχαν χρησιμοποιήσει πρώτοι οι Στωϊκοί. Τις **άδηλες** τις εξαιρούσαν από το λογισμό των προτάσεων που είχαν οικοδομήσει.

Η ανάλυση είναι συμβατή με τη θεωρία τους, για την αλήθεια και το ψέμα τα οποία, όπως υποστήριζαν είναι χαρακτηριστικά που δεν αποδίδονται στις διατυπωμένες φράσεις

Υπάρχουν ακόμα αποφαντικές φράσεις οι οποίες οπουδήποτε και αν διατυπωθούν και οτιδήποτε κι αν συμβαίνει στο περιβάλλον μέσα στο οποίο διατυπώνονται, χωρίς πρόσθετη πληροφόρηση μπορούμε αβίαστα να αποφανθούμε αν οι αντίστοιχες προτάσεις είναι αληθείς ή όχι. Πρόκειται για τις **ταυτολογίες** της μορφής: *αύριο θα βρέξει* ή *αύριο δεν θα βρέξει*, (συνήθως διατυπώνεται: *αύριο θα βρέξει ή δεν θα βρέξει*) που είναι πάντα αληθείς και τις αρνήσεις τους που είναι πάντα ψευδείς και λέγονται **αντιλογίες** όπως η: *είναι λάθος ότι αύριο θα βρέξει ή αύριο δεν θα βρέξει* που διατυπώνεται *αύριο δεν θα βρέξει και αύριο θα βρέξει.*

1.2.2 Σύνδεσμοι, Προτάσεις και Πίνακες Αληθείας

(Άτυπη περιγραφή) Το μικρότερο κομμάτι λόγου το οποίο αποτελείται από ένα ονοματικό και ένα ρηματικό σύνταγμα το λέμε **ατομική φράση**. Από σημασιολογική άποψη είναι το μικρότερο κομμάτι λόγου που έχει ένα ολοκληρωμένο νόημα, εκφράζει δηλαδή ένα απλό γεγονός. Τέτοιες είναι οι φράσεις στα παραδείγματα $4, 5, 8, 11$ και 12 που συναντήσαμε παραπάνω, καθώς και οι: «*ο 2 είναι πρώτος αριθμός*», «*είναι μέρα*», Σε ορισμένα άλλα παραδείγματα όπως τα $1, 6, 7, 9$ και 10 οι φράσεις απαρτίζονται από ατομικές φράσεις που είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με ορισμένους συνδέσμους. Οι φράσεις αυτές είναι **σύνθετες φράσεις**.

Κατ' αναλογία λοιπόν θα λέμε **ατομική πρόταση** αυτό που εκφράζεται από μια ατομική φράση και θα το συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα του ελληνικού αλφάβητου, $A, B, \Gamma, \Delta, \ldots A_1, A_2, \ldots$ ενώ **σύνθετη πρόταση** ή απλά **πρόταση** θα λέμε μια ακολουθία που χτίζεται από ατομικές προτάσεις συνδεδεμένες μεταξύ τους με την βοήθεια των συνδέσμων και σύμφωνα με κάποιους αυστηρούς κανόνες που θα εξετάσουμε στη συνέχεια. Τα σύμβολα των ατομικών προτάσεων $A, B, \Gamma, \Delta, \ldots A_1, A_2, \ldots$ θα τα λέμε **προτασιακές μεταβλητές** ή **προτασιακά σύμβολα**[3].

Οι σύνδεσμοι δεν είναι άλλοι από τους συνδέσμους που χρησιμοποιεί

(τα σημαίνοντα), που είναι υλικά πράγματα, ούτε στα πράγματα ή στα γεγονότα, αλλά στα λεκτά (τα σημαινόμενα) και μάλιστα όχι σε όλα αλλά μόνο στα αξιώματα (δηλαδή στις προτάσεις):

«περί τῷ σημαινομένῳ τό ἀληθές τε καί ψεῦδος ὑπεστήσαντο...ἕν δε ἀσώματον, ὥσπερ το σημαινόμενον πρᾶγμα, καί λεκτόν, ὅπερ ἀληθές τε γίνεται ἤ ψεῦδος.» [Σ.Ε. 8.11.3-8.12.9] Υπάρχουν όμως και αξιώματα, συνεχίζει ο Σέξτος Εμπειρικός, για την αλήθεια ή το ψέμα των οποίων δεν μπορούμε να αποφανθούμε, τα οποία ονόμαζαν *άδηλα* όπως το: «ἀρτίους εἶναι τούς ἀστέρας καί τό περισσούς»

[3]Τα αριθμητικά *πρῶτον, δεύτερον, τρίτον* εμφανίζονται ως σύμβολα μεταβλητών στη Λογική των Στωϊκών. Ο Σέξτος όμως έχει διασώσει και μια διατύπωση της αρχής της ταυτότητας όπου χρησιμοποιείται η αντωνυμία *τὸδε* ως μεταβολή: «εἰ τόδε, τόδε» [Σ.Ε. 8.276.5]

η φυσική μας γλώσσα για να συνδέει αποφαντικές φράσεις. Μερικοί απ' αυτούς οι πιο συνηθισμένοι, δηλώνονται από τις λέξεις ή συναρμογές λέξεων *και, ή, αν...τότε,... αν και μόνο αν..., ή...ή...*, και το *όχι* για την άρνηση.

Όπως εισάγαμε σύμβολα για τις προτάσεις, θα εισάγουμε επίσης και σύμβολα για τους συνδέσμους. Ενώ θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν έχουμε δύο προτάσεις την A και την B τότε θα μπορούμε να συμβολίζουμε με «*A και B*» την σύνθετη πρόταση που προκύπτει από αυτές όταν συνδεθούν με το και, προτιμούμε να χρησιμοποιούμε και για το και ένα σύμβολο αφού η λέξη και ταιριάζει καλύτερα μεταξύ αποφαντικών φράσεων και όχι μεταξύ του περιεχομένου των φράσεων αυτών. Θα εισάγουμε λοιπόν ένα σύμβολο για καθένα από τους λογικούς συνδέσμους, το οποίο θα σηματοδοτεί και θα αντανακλά τη λειτουργία και το συντακτικό τους περιεχόμενο στη φυσική γλώσσα.

Έτσι για τον **και** θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\wedge$
για τον **ή** θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vee$
για τον **αν...τότε** θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\rightarrow$
για τον **αν και μόνο αν** θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\leftrightarrow$
και για τον **όχι** (ή δεν, μη) θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\neg$

Παρακάτω μαζί με αυτούς τους συμβολισμούς των συνδέσμων, θα συμβολίζουμε με A την πρόταση *«είναι μέρα»* ενώ με B την *«έχει φως»*. Κάθε τέτοιος σύνδεσμος μπορεί να θεωρηθεί ότι συμβολίζει μια λογική πράξη μέσα στο σύνολο των προτάσεων:

- «$\wedge$» που συμβολίζει την πράξη της λογικής σύζευξης:
  «*είναι μέρα*» **και** «*έχει φως*» συμβολικά: $(A \wedge B)$ (εκφωνείται: άλφα και βήτα)

- «$\vee$» που συμβολίζει την πράξη της λογικής διάζευξης:
  «*είναι μέρα*» ***ή*** «*έχει φως*» συμβολικά: $(A \vee B)$ (εκφωνείται: άλφα ή βήτα)

- « $\rightarrow$ » που συμβολίζει την πράξη της λογικής συνεπαγωγής:
  αν «είναι μέρα» ***τότε*** «*έχει φως*» συμβολικά: $(A \rightarrow B)$ (εκφωνείται: άλφα συνεπάγεται βήτα)

- « $\leftrightarrow$ » που συμβολίζει την πράξη της λογικής ισοδυναμίας:
  «*είναι μέρα*» ***αν και μόνο αν*** «*έχει φως*» συμβολικά: $(A \leftrightarrow B)$ (εκφωνείται: άλφα ισοδυναμεί με βήτα)

- «¬» που συμβολίζει την πράξη της λογικής άρνησης:
  δεν «*είναι μέρα*» συμβολικά: $(\neg A)$ (εκφωνείται: όχι άλφα)

> Στην ανάπτυξη που θα ακολουθήσουμε στις σημειώσεις αυτές, θα θεωρούμε γνωστές ορισμένες βασικές μαθηματικές έννοιες όπως **σύνολο**, **συνάρτηση**, **σχέση**, **πράξη μέσα σ' ένα σύνολο**, **δομή**, που είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με πράξεις ή/και σχέσεις, **ομομορφισμός** κτλ.

Αν συμβολίσουμε με Π το σύνολο των προτάσεων, είτε αυτές είναι απλές είτε είναι σύνθετες, τότε ο σύνδεσμος της λογικής σύζευξης $\wedge$ ως πράξη, είναι μια διμελής πράξη, δηλαδή μια συνάρτηση από το $\Pi \times \Pi$ στο Π:

$$\wedge : \Pi \times \Pi \ \rightarrow \ \Pi \ /\!\!/ \ (A, B) \mapsto (A \wedge B)$$

Για το λόγο αυτό ο $\wedge$ λέγεται διμελής σύνδεσμος. Με άλλα λόγια το σύμβολο $\wedge$ είναι ένα σύμβολο δύο θέσεων, μια δεξιά και μια αριστερά που καταλαμβάνονται από προτάσεις. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για τους υπόλοιπους συνδέσμους $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ή οποιοδήποτε άλλο διμελή σύνδεσμο, όπως για παράδειγμα το αποκλιστικό ή. Θα δούμε αργότερα ότι υπάρχουν ακριβώς 16 τέτοιοι σύνδεσμοι. Γενικά ένας διμελής σύνδεσμος είναι μια διμελής πράξη[4] ως εξής:

$$\square : \Pi \times \Pi \ \rightarrow \ \Pi \ /\!\!/ \ (A, B) \mapsto (A \square B)$$

όπου $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \}$

Η άρνηση είναι μια μονομελής πράξη μέσα στο σύνολο Π των προτάσεων, δηλαδή μια συνάρτηση από το Π στο Π:

$$\neg : \Pi \longrightarrow \Pi \ /\!\!/ \ A \mapsto \neg A$$

Δηλαδή παίρνει μια πρόταση και την στέλνει σε μια νέα που δεν είναι άλλη από την άρνησή της. Για το λόγο αυτό ο σύνδεσμος $\neg$ είναι ένας μονομελής

[4] Αφού το Π ορίζεται, όπως θα δούμε, αναδρομικά, είναι φανερό ότι και αυτού του είδους οι πράξεις θα πρέπει να ορισθούν επίσης αναδρομικά.

σύνδεσμος. Με άλλα λόγια το σύμβολο $\neg$ είναι ένα σύμβολο μιας θέσης, δεξιά, η οποία καταλαμβάνεται από πρόταση.

Με τις πράξεις που αναφέραμε παραπάνω κατασκευάζονται οι σύνθετες[5] προτάσεις.

> Το ερώτημα το οποίο είναι τώρα ενδιαφέρον να εξετάσουμε και να απαντήσουμε είναι **η αλήθεια** ή **το ψεύδος** μιας σύνθετης πρότασης όταν είναι γνωστή η αλήθεια ή το ψεύδος των προτάσεων που την απαρτίζουν. Με άλλα λόγια η τιμή αλήθειας, ή όπως συνοπτικά λέμε, η αληθοτιμή μια σύνθετης πρότασης όταν είναι γνωστές οι αληθοτιμές των προτάσεων που συμμετέχουν στην κατασκευή της.

▸ Η άρνηση

Ας εξετάσουμε αρχικά πώς λειτουργεί η άρνηση στη φυσική μας γλώσσα, στο επίπεδο δηλαδή των αποφάνσεων. Ας δούμε ορισμένα παραδείγματα:

13) «*είναι μέρα*». Η άρνηση της είναι η «*δεν είναι μέρα*»

14) «*είναι αναμμένο το φως*». Η άρνηση της είναι η «*δεν είναι αναμμένο το φως*»

15) «*είναι μαύρο το χιόνι*» Η άρνηση της είναι η «*δεν είναι μαύρο το χιόνι*»

16) «*το χιόνι είναι μαύρο*» Η άρνηση της είναι η «*το χιόνι δεν είναι μαύρο*» ή «*είναι λάθος ότι το χιόνι είναι μαύρο*»

17) «*Ο αριθμός 14 είναι άρτιος*» Η άρνησή της είναι η «*Ο αριθμός 14 δεν είναι άρτιος*»

---

[5]Οι σύνθετες προτάσεις, μελετήθηκαν για πρώτη φορά στην ιστορία της Λογικής από τους Στωϊκούς και ορίστηκαν ως τα μη απλά αξιώματα τα οποία αποτελούνται από δύο ή περισσότερα αξιώματα και συνδέσμους ή και από ένα μόνο αξίωμα το οποίο επαναλαμβάνεται και συνδέσμους [Σ.Ε. 8.108.5]. Ο Διογένης ο Λαέρτιος αναφέρει ως μη απλά αξιώματα «τό συνημμένον» (συνεπαγωγή) «τό συμπεπλεγμένον» (σύζευξη) «τό διεζευγμε΄νον» (διάζευξη) και ακόμα «τό παρασυνημμένον», «τό αἰτιῶδες», «τό διασαφοῦν τό μᾶλλον», και «τό δασαφοῦν τό ἧττον». Στο λογισμό των Στωϊκών εμφανίζονται μόνο τα τρία πρώτα.

Από τα παραδείγματα αυτά δίνεται η εντύπωση πως η άρνηση μιας πρότασης φτιάχνεται αν μπροστά από το ρήμα, γύρω από το οποίο συγκροτείται το ρηματικό σύνταγμα της φράσης, τοποθετήσουμε ένα αρνητικό μόριο, όπως για παράδειγμα το **δεν**.

Όμως τα πράγματα δεν είναι έτσι!

Η άρνηση, για παράδειγμα, της φράσης:

«*όλοι οι μη εμβολιασμένοι αρρώστησαν*»

θα ήταν η,

«*όλοι οι μη εμβολιασμένοι δεν αρρώστησαν*»

Με άλλα λόγια

«*κανείς μη εμβολιασμένος δεν αρρώστησε*»

Όμως η άρνηση της αρχικής μας απόφανσης είναι ότι:

«*<u>είναι λάθος</u> ότι όλοι οι μη εμβολιασμένοι αρρώστησαν*»

Με άλλα λόγια

«*Ορισμένοι μη εμβολιασμένοι δεν αρρώστησαν*»

ή

«*υπάρχουν μη εμβολιασμένοι που δεν αρρώστησαν*»

ή

«*κάποιοι μη εμβολιασμένοι που δεν αρρώστησαν*»

Είναι προφανές λοιπόν ότι δεν αρκεί η άρνηση μιας απόφανσης να πλεονάζει απλά της απόφανσης κατά ένα αρνητικό μόριο, θα πρέπει το αρνητικό μόριο να τίθεται στην αρχή της απόφανσης, να προτάσσεται της απόφανσης, όπως ακριβώς προβλέπει η λειτουργία του $\neg$ ως μονομελούς πράξης:

$$\neg : \Pi \to \Pi \;/\!\!/\; A \mapsto \neg A$$

Αν έχουμε μια αποφαντική φράση που δηλώνει ένα γεγονός που συμβαίνει, για παράδειγμα την φράση «είναι μέρα», τότε η πρόταση A που εκφράζει η αποφαντική αυτή φράση είναι αλήθεια. Η άρνησή της, «δεν είναι μέρα» δηλώνει το αντίθετο του προηγούμενου γεγονότος, ένα γεγονός δηλαδή που δεν συμβαίνει, άρα η πρόταση που εκφράζει είναι η «*όχι* A» και είναι ψευδής.

Αφού όμως έχουμε δεχθεί ότι άλλη δυνατότητα από αυτές τις δύο δεν υπάρχει είναι φανερό ότι αν μια πρόταση είναι αληθινή τότε η άρνησή της είναι ψέμα και αν είναι ψέμα τότε η άρνηση της είναι αλήθεια. Έτσι η *(όχι(όχιA))* λέει ότι και η A. Την παρατήρηση αυτή την είχαν κάνει οι Στωϊκοί[6] ήδη από τον τρίτο αιώνα π.Χ.

► Η σύζευξη

Οι αποφάνσεις δηλώνουν γεγονότα. Η σύζευξη δύο αποφάνσεων δηλώνει ακριβώς ένα σύνθετο γεγονός: *«είναι μέρα» και «έχει φως»*. Είναι φανερό ότι αν ένα από τα δύο γεγονότα δεν συμβαίνει, τότε ούτε και το νέο (σύνθετο) γεγονός συμβαίνει.

Κατ' αναλογία λοιπόν η σύνθετη πρόταση που προκύπτει από τη σύζευξη δύο άλλων θα είναι αληθινή μόνο στην περίπτωση που και οι δύο συμβαλλόμενες προτάσεις είναι αληθινές. Με άλλα λόγια αν μια τουλάχιστον από τις συμβαλλόμενες είναι ψέμα τότε όλη είναι ψέμα.

Στη καθημερινή ζωή το *«και»*, ως λογική σύζευξη, εμφανίζεται μεταξύ φράσεων που έχουν κάποια νοηματική σχέση ή νοηματική συγγένεια, μεταξύ τους. Αυτό δεν είναι απαραίτητο στην τυπική περίπτωση. Εδώ είναι καθόλα νόμιμη η σύζευξη: *«είναι μέρα» και «ο 7 είναι άρτιος»*.

Εξίσου νόμιμη είναι και η σύζευξη μιας πρότασης με την άρνησή της, όπως στην περίπτωση *«αύριο δεν θα βρέξει» και «αύριο θα βρέξει»*. Γενικά αν έχουμε μια οποιαδήποτε πρόταση την A η σύζευξη (A και (όχι A)) είναι μια καθόλα νόμιμη σύνθετη πρόταση και μάλιστα μια πρόταση πάντα ψευδής, δηλ. μια αντιλογία. Το *«πάντα»* εδώ σημαίνει οποιαδήποτε και να είναι η πρόταση A .

► Η διάζευξη

Η διάζευξη ξεχωρίζει, (δια-στέλλει) τα γεγονότα με το ίδιο τρόπο που η σύζευξη τα ενώνει, έτσι το νέο γεγονός θεωρείται ως μη πραγματοποιούμενο μόνο αν κανένα από τα αντιδιαστελώμενα γεγονότα δεν πραγματοποιείται:

[6] Σύμφωνα με τους Στωικούς η άρνηση μιας πρότασης (*αντικείμενον αξίωμα*) λαμβάνεται μόνο με την τοποθέτηση ενός αρνητικού μορίου (ούκ, ουχί) μπροστά από τη πρόταση: «ὅταν μὴ ψιλῶς τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἀποφάσει πλεονάζῃ. ἀλλ᾽ ὅταν ἡ ἀπόφασις προτάττηται τοῦ ἀξιώματος» [Σ.Ε. 8.90.8]. Μια τέτοια πρόταση λέγεται *αποφατικόν αξίωμα*. Η περίπτωση της πρότασης με ενσωματωμένη κατά διάφορους τρόπους την άρνηση, αναλύεται επίσης διεξοδικά: Εάν το αξίωμα αποτελείται από ένα αρνητικό μόριο και το κατηγόρημα όπως το «οὐδείς περιπατεῖ», λέγεται *αρνητικό*, ενώ αν αποτελείται από στερητικό ονοματικό σύνταγμα και το κατηγόρημα, όπως «ἀφιλάνθρωπός ἐστιν οὗτος», λέγεται *στερητικό*. Ο νόμος της διπλής άρνησης (*υπεραποφατικόν αξίωμα*) τους είναι επίσης γνωστός. Όμως για το θέμα αυτό ο Σέξτος δεν αναφέρει τίποτα ενώ ο Διογένης ο Βιογράφος δίνει σωστό ορισμό: «ὑπεραποφετικὸν δ᾽ ἐστὶν ἀποφατικὸν ἀποφατικοῦ».

«αύριο θα βρέξει» ή *«αύριο θα χιονίσει»*.

Η διάζευξη μιας πρότασης με την άρνησή της, είναι μια επίσης νόμιμη πρόταση όπως στην περίπτωση «αύριο θα βρέξει» ή «αύριο δεν θα βρέξει». Γενικά αν έχουμε μια οποιαδήποτε πρόταση την A, η διάζευξη (A ή (όχι A)) είναι μια καθόλα νόμιμη σύνθετη πρόταση και μάλιστα μια πρόταση πάντα αληθής, μια ταυτολογία δηλαδή. Το πάντα, και πάλι εδώ, σημαίνει οποιαδήποτε και να είναι η πρόταση A .

Σχόλιο:

Η παρατήρηση ότι οι προτάσεις της μορφής,

$$(A \textbf{ και } (\text{όχι}\, A)) \quad \text{και} \quad (A \textbf{ ή } (\text{όχι}\, A))$$

έχουν σταθερή τιμή αλήθειας, η μεν πρώτη ψέμα και η δε δεύτερη αλήθεια, ανεξάρτητα από το ποια είναι και τι λέει η πρόταση A,, σημαίνει ότι οι προτάσεις αυτές είναι σταθερές. Έτσι την μεν πρώτη που είναι αντιλογία θα την συμβολίζουμε με $\perp$, ενώ τη δεύτερη που είναι ταυτολογία θα τη συμβολίζουμε με $\top$.

► **Η συνεπαγωγή**

Η συνεπαγωγή εκφράζεται στη νεοελληνική γλώσσα είτε από το μονολεκτικό συνεπάγεται είτε από τη περίφραση *αν...,τότε...*, είτε με κάποια από τις πολλές ακόμα συνώνυμες εκφράσεις που υπάρχουν. Στη φυσική μας λοιπόν γλώσσα με τις $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ να συμβολίζουν αποφάνσεις που δηλώνουν γεγονότα που συνδέονται μεταξύ τους από μια αιτιακή σχέση, η έκφραση είναι:

αν $\mathcal{E}_1$, *τότε* $\mathcal{E}_2$, ή
αν $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_1$ *συνεπάγεται* $\mathcal{E}_2$ *ή* $\mathcal{E}_1$ *συνεπώς* $\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_1$ *μόνο αν* $\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_1$ *κατά συνέπεια* $\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_1$ *είναι ικανή συνθήκη για* $\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_2$ *είναι αναγκαία συνθήκη για* $\mathcal{E}_1$
Υπόθεση: $\mathcal{E}_1$, *συμπέρασμα*: $\mathcal{E}_2$

στη θέση δε του αν ενδεχόμενα να συναντούμε το εάν.

Ας δούμε ορισμένα παραδείγματα:

18) *«Εάν ανέβει η θερμοκρασία, το δωμάτιο θα είναι ζεστό»*.

19) *«Εάν ο Αρχιμήδης γεννήθηκε το 285 και πέθανε το 210 π.Χ., έζησε 75 χρόνια»*.

20) *«Εάν ο Αρχιμήδης γεννήθηκε το 280 και πέθανε το 210 π.Χ., έζησε 70 χρόνια».*

21) *«Αν το αυτοκίνητο του δράστη είναι ασφαλισμένο, την αποζημίωση του θύματος θα την πληρώσει η ασφάλεια».*

Στην καθομιλούμενη τα δυο γεγονότα σχετίζονται μεταξύ τους με μια αιτιακή σχέση. Πρόκειται για τη **φυσική συνεπαγωγή** στην οποία η υπόθεση και το συμπέρασμα έχουν μια χρονική διαδοχή μη αντιστρέψιμη: για να είναι αληθής πρέπει υποχρεωτικά να συμβεί (να αληθεύσει) η υπόθεση και αν αυτό γίνει τότε θα συμβεί και το συμπέρασμα. Για παράδειγμα:

22) *«Εάν σταματήσει η καρδιά τότε επέρχεται μοιραία ο θάνατος»*

Εδώ η χρονική βαθμίδα είναι αναγκαία: πρώτα πρέπει να πραγματοποιηθεί το δηλούμενο από την υπόθεση (το αίτιο) να σταματήσει δηλαδή η καρδιά και χρονικά υστερότερα να συμβεί το δηλούμενο από το συμπέρασμα να επέλθει ο θάνατος.

Στη λογική συνεπαγωγή αυτό δεν είναι απαραίτητο. Ενδεχόμενα οι $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ να είναι αποφάνσεις που δηλώνουν γεγονότα που **δεν** συνδέονται μεταξύ τους με αιτιακή, σχέση αλλά απλά από λογική σχέση. Εδώ η χρονική βαθμίδα είναι ανύπαρκτη:

23) *«Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι οξεία, τότε το άθροισμα των δύο άλλων είναι μεγαλύτερο από* 90 *μοίρες».*

24) *«Αν ένας αριθμός διαιρείται δια* 2*, τότε διαιρείται δια* 4*».*

25) *«Αν ένας αριθμός δεν διαιρείται δια* 2*, τότε δεν διαιρείται δια τέσσερα».*

Όταν η πρώτη φράση, η υπόθεση ($\mathcal{E}_1$), δηλώνει ένα γεγονός που συμβαίνει τότε η όλη σύνθετη φράση αν $\mathcal{E}_1$ τότε $\mathcal{E}_2$ ανταποκρίνεται στα πράγματα μόνο στη περίπτωση που και η δεύτερη, το συμπέρασμα ($\mathcal{E}_2$), δηλώνει ένα γεγονός που συμβαίνει. Αν τώρα συμβολίσουμε με σ_1 τη πρόταση που εκφράζει η $\mathcal{E}_1$ και με σ_2 τη πρόταση που εκφράζει η $\mathcal{E}_2$ τότε η πρόταση $\sigma_1 \to \sigma_2$ είναι αληθινή.

Όταν η πρώτη φράση ($\mathcal{E}_1$), δηλώνει ένα γεγονός που δεν συμβαίνει τότε δεν μπορεί κανείς να ισχυριστεί για όλη τη σύνθετη φράση αν $\mathcal{E}_1$, τότε $\mathcal{E}_2$ ότι δεν ανταποκρίνεται στα πράγματα, ανεξάρτητα από το τι γίνεται με το γεγονός που δηλώνεται από τη δεύτερη φράση, το συμπέρασμα ($\mathcal{E}_2$) Ας εξετάσουμε για παράδειγμα την (25)· είναι ιστορικό γεγονός ότι το βάρβαρο χέρι του Ρωμαίου στρατιώτη έκοψε το νήμα της ζωής του Αρχιμήδη στα 75 χρόνια του. Η δεύτερη λοιπόν φράση δηλώνει ένα γεγονός που συμβαίνει.

Το περιεχόμενο της πρώτης όμως δεν ανταποκρίνεται στα ιστορικά γεγονότα αφού ο Μεγάλος γνώστης γεννήθηκε το 287 π.Χ. και δολοφονήθηκε κατά την άλωση των Συρακουσών το 212 π.Χ. Κανείς δεν μπορεί ωστόσο να χαρακτηρίσει ως άτοπη και ψευδή ολόκληρη τη φράση αυτή. Ανάλογα και για την (26) κανείς δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι είναι αντιφατική και ψευδής, είναι λογικότατη παρόλο που και η $\mathcal{E}_1$, και η $\mathcal{E}_2$ δηλώνουν γεγονότα που δεν συμβαίνουν. Για να είμαστε λοιπόν συμβατοί με τη κοινή λογική, με τη λογική δηλαδή της καθημερινής γλώσσας θεωρούμε πως η συνεπαγωγή $\sigma_1 \to \sigma_2$ είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η πρώτη σ_1 είναι αληθής και η δεύτερη σ_2 ψευδής. Επειδή ως πρότυπό μας είναι κύρια η μαθηματική πρακτική διατύπωσης αποφάνσεων συλλογισμών και αποδείξεων, θα δώσουμε δύο παράδειγμα από τα μαθηματικά.

Πρώτο παράδειγμα: Μια πολύ συνηθισμένη μορφή αποφάνσεων στα μαθηματικά είναι της μορφής:

$$\text{Για κάθε πραγματικό αριθμό} \quad x, \text{αν} \quad x > 0 \quad \text{τότε} \quad x^{1/2} \in \mathbb{R}$$

Κανείς δεν αμφιβάλει, σύμφωνα με τη συνήθη μαθηματική πρακτική, ότι οποιαδήποτε τιμή κι αν πάρει το x η πρόταση:

$$p : (x > 0) \to (x^{1/2} \in \mathbb{R})$$

είναι αληθής.

Ας εξετάσουμε τις τιμές $1, 0, -1$. Αν $x = 1$, τότε η $x > 0$ είναι αληθής, όπως επίσης και η $x^{1/2} \in \mathbb{R}$. Στην πρόταση p λοιπόν έχουμε το συνδυασμό (αλήθεια, αλήθεια), – δηλαδή *αλήθεια συνεπάγεται αλήθεια*–, και κανείς δεν αμφισβητεί στην περίπτωση αυτή την αλήθεια ολόκληρης της p.

Αν $x = 0$, τότε η $x > 0$ είναι ψευδής, ενώ η $x^1/2 \in \mathbb{R}$ παραμένει αληθής. Οπότε και για το συνδυασμό (ψέμα, αλήθεια), δηλαδή ψέμα συνεπάγεται αλήθεια, η p παραμένει αληθής.

Αν τώρα $x = -1$, η $x > 0$ είναι πάλι ψευδής, αλλά και η $x^{1/2} \in \mathbb{R}$ είναι επίσης ψευδής, άρα και για το συνδυασμό (ψέμα, ψέμα), –δηλαδή *ψέμα συνεπάγεται ψέμα*–, η p είναι αληθής.

Αφού όμως ένας πραγματικός αριθμός ή είναι θετικός ή αρνητικός ή μηδέν, άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, δηλαδή ο συνδυασμός (αλήθεια, ψέμα), –δηλαδή *αλήθεια συνεπάγεται ψέμα*–, δεν εμφανίζεται ποτέ, και αφού ο συνδυασμός αυτός είναι ο μοναδικός που θα έκανε ψευδή την p, η p είναι πάντα αληθής.

Μέσα, λοιπόν στα πλαίσια της συνήθους μαθηματικής πρακτικής η συνεπαγωγή θεωρείται αληθής σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς εκτός από το συνδυασμό (αλήθεια, ψέμα).

Δεύτερο παράδειγμα: : Λέμε ότι το κενό είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου, δηλαδή:

$$\text{Για κάθε} \quad X, \quad \emptyset \subseteq X$$

Από πού συνάγεται αυτό;

Σύμφωνα με τον ορισμό του υποσυνόλου, το σύνολο X είναι υποσύνολο του Y ανν κάθε στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y:

$$X \subseteq Y \quad \Leftrightarrow_{\text{oρ}} \quad (\forall x)[(x \in X) \rightarrow (x \in Y)]$$

Αν στη θέση του X θέσουμε το κενό, έχουμε:

$$\emptyset \subseteq Y \quad \Leftrightarrow_{\text{oρ}} \quad (\forall x)[(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in Y)]$$

Στη συνεπαγωγή $(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in Y)$, η πρώτη, η $(x \in \emptyset)$, είναι πάντα ψευδής, οπότε όλη είναι πάντα αληθής, ανεξάρτητα από το τι είναι η δεύτερη, η $(x \in Y)$.

Έτσι η δεξιά μεριά της ισοδυναμίας είναι πάντα αληθής άρα και η αριστερή που έχει τεθεί εξ ορισμού ισοδύναμή της.

Μια σύνθετη πρόταση που περιέχει τη συνεπαγωγή, λέγεται και απλά συνεπαγωγή ή και υποθετική πρόταση (αν $\mathcal{E}_1$, τότε $\mathcal{E}_2$). η $\mathcal{E}_1$, λέγεται υπόθεση ενώ η $\mathcal{E}_2$ συμπέρασμα ή θέση.

► Η Λογική Ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή ή Δισυνεπαγωγή

Η λογική ισοδυναμία, ή δισυνεπαγωγή ή διπλή συνεπαγωγή, εκφράζεται στη νεοελληνική γλώσσα είτε από το μονολεκτικό «ισοδυναμεί» είτε από τη περίφραση «αν και μόνο αν» είτε με κάποια από τις πολλές ακόμα συνώνυμες εκφράσεις που υπάρχουν. Στη φυσική μας λοιπόν γλώσσα με τις $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ να συμβολίζουν αποφάνσεις που δηλώνουν γεγονότα η έκφραση είναι:

$\mathcal{E}_1$ *ισοδυναμεί* $\mathcal{E}_2$ ή
$\mathcal{E}_1$ *αν και μόνο αν* $\mathcal{E}_2$ $\mathcal{E}_1$ *εαν και μόνο εαν* $\mathcal{E}_2$ $\mathcal{E}_1$
συνεπάγεται
$\mathcal{E}_2$ *και αντιστρόφως*
$\mathcal{E}_1$ *συνεπώς* $\mathcal{E}_2$ *και αντιστρόφως*
$\mathcal{E}_1$ *κατά συνέπεια* $\mathcal{E}_2$ *και αντιστρόφως*
$\mathcal{E}_1$ *είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για* $\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_1$ *πρέπει και αρκεί* $\mathcal{E}_2$

Η λογική ισοδυναμία είναι αληθής κάθε φορά που και οι δύο συμβαλλόμενες είναι αληθείς ή και οι δύο ψευδείς.

1.2.2 Ασκήσεις. 1. Διατυπώστε τις αρνήσεις των φράσεων $12, 12, 8, 6, 5, 9$.

2. Για κάθε μια από τις παρακάτω φράσεις βρείτε την άρνησή της και διατυπώστε αναλυτικά μια φράση που να έχει το ίδιο περιεχόμενο με την άρνηση αυτή:

   i) *Το σύνολο X έχει τουλάχιστον 5 στοιχεία*

   ii) *Το σύνολο X έχει το πολύ 5 στοιχεία*

   iii) *Το 2 είναι και άρτιος και πρώτος*

   iv) *Αφού $xy = 0$ άρα $x = 0$ ή $y = 0$*

   v) *Αν το x είναι περιττός τότε το $x^2 + 1$ είναι πρώτος*

   vi) *Ο Νίκος θα πάρει γλυκό ή ο Κώστας θα πάρει φρούτο*

   vii) *Ή ο Νίκος θα πάρει γλυκό ή ο Κώστας θα πάρει φρούτο*

   iix) *Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, τα ύψη του είναι διχοτόμοι και διάμεσοι.*

   ix) *Ή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο ή είναι ισογώνιο*

3. Γράψτε με σύμβολα τις προτάσεις των αποφάνσεων (iii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii), και (ix) της Άσκησης 2.

4. Γράψτε συμβολικά κάθε μια από τις παρακάτω σύνθετες αποφάνσεις, αφού συμβολίσετε με ένα γράμμα τις απλές αποφάνσεις που τις συνθέτουν:

   i) *Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες στην ϵ τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.*

   ii) *Αν ο x είναι ρητός και ο y άρρητος, τότε ο $x + y$ είναι άρρητος.*

   iii) *Αν η ζήτηση παραμένει σταθερή και οι τιμές αυξηθούν, τότε ο τζίρος θα πέσει.*

   iv) *Το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιο αν και μόνο άν και οι δύο είναι άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.*

   v) *Για να είναι το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών περιττός πρέπει και αρκεί ο ένας από τους δύο προσθετέους να είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.*

   vi) *Οι γωνίες της βάσης του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες, κατά συνέπεια το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, και αντιστρόφως.*

   vii) *Αφού ο y είναι ακέραιος άρα ο z δεν είναι πραγματικός, οπότε ο x είναι ρητός.*

   iix) *Αφού αν είναι μέρα τότε έχει φως και είναι μέρα, άρα έχει φως.*

   ix) *Σ' αυτό το σπίτι μένει ο Νίκος ή ο Γιάννης, ενδεχόμενα και οι δυό.*

   x) *Μια ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη ώστε ένα τρίγωνο να χωρίζεται σε δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι μια γωνία του να είναι τριπλάσια κάποιας άλλης.*

   xi) *Εάν μια από τις βάσεις ενός τραπεζίου είναι διπλάσια της άλλης, τότε, και μόνο τότε, η διάμεσός του τριχοτομείται από τις διαγώνιές του.*

xii) *Τα τραπέζια ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι ίσα όταν έχουν τις βάσεις τους μία προς μία ίσες και τις διαγώνιές τους μία προς μία ίσες.*

xiii) *Οι διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες μεταξύ τους, και αντίστροφα.*

5. Διατυπώστε την άρνηση κάθε μιας από τι παρακάτω αποφάνσεις:

i) *Ο αριθμός* $10^{10} - 1$ *δεν είναι πρώτος.*

ii) *Ο δύο είναι άρτιος και πρώτος.*

iii) *Τα σύνολα Α και Β είναι κενά.*

iv) *Τα σύνολα Α και Β είναι ξένα.*

v) *Αν ταξιδέψω θα σας αποχαιρετήσω.*

vi) *Αν ο* x *είναι περιττός τότε ο* $x^2 + 1$ *είναι πρώτος.*

vii) *Αφού* $xy = 0$, *άρα* $x = 0$ *ή* $y = 0$.

iix) *Οι γωνίες της βάσης του τριγώνου ABG είναι ίσες ενώ δεν είναι ισοσκελές το τρίγωνο ΑΒΓ.*

ix) *Το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιο, αν και μόνο αν, οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.*

x) *Αν το τραίνο έλθει στις 9, εσύ να με περιμένεις, και αν έλθει στις 10 εσύ πάλι να με περιμένεις.*

xi) *Είτε το τραίνο έλθει τις 9, είτε έλθει στις 10, εσύ να με περιμένεις.*

Έστω ότι κ, π και ϱ συμβολίζουν αληθινές προτάσεις ενώ η τ μια ψευδή. Προσδιορίστε την αλήθεια ή το ψέμα κάθε μιας από τις παρακάτω σύνθετες προτάσεις:

i) $(\pi$ *και* $\kappa\ )$*και* τ

ii) π *και* $(\kappa$ *και* $\tau)$

iii) *Αν* π *τότε* τ

iv) *Αν* τ *τότε* $(\pi$ *και* $\varrho)$

v) *Αν* $(\tau$ *και* $\varrho)$ *τότε* $(\pi$ *και* $\tau)$

vi) $(\pi$ *συνεπάγεται* $\tau)$ *αν και μόνο αν* τ

vii) *Αν* π *τότε* $(\kappa$ *ισοδυναμεί με* $(\varrho$ *συνεπάγεται* $t)$

iix) *Αν* π *τότε* κ, *και αν* τ *τότε πάλι* κ, *ισοδυναμεί με, είτε* π *είτε* τ *τότε* κ.

1.3 Η Γλώσσα της Προτασιακής Λογικής

α) Το Αλφάβητο

Το αλφάβητο $\mathcal{A}$ της γλώσσας της προτασιακής λογικής αποτελείται από τρία υποσύνολα:

(A_1) : **Προτασιακές Μεταβλητές ή Προτασιακά Σύμβολα.** Διαθέτουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο Π_0 που περιέχει τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού αλφάβητου, με ή χωρίς υποδείκτες, και τα οποία συμβολίζουν τις απλές (ή ατομικές) ατομικές προτάσεις και λέγονται **προτασιακές μεταβλητές** ή **προτασιακά σύμβολα** ή **ατομικές προτάσεις** ή **απλές προτάσεις**. Δηλαδή:

$$\Pi_0 := \{ A, B, \Gamma, \dots, A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots \}$$

(A_2) : **Τα σύμβολα για τους Λογικούς Συνδέσμους** που απλά λέγονται και **σύνδεσμοι**, και είναι τα ακόλουθα:

- **Μηδενικομελείς Σύνδεσμοι**: $\mathcal{O}_0 := \{ \bot, \top \}$. Οι σύνδεσμοι αυτοί είναι, όπως θα δούμε όταν εξετάσουμε τη σημασιολογία της γλώσσας της προτασιακής λογικής, είναι λογικές σταθερές και εκφράζουν την αντιλογία ($\bot$), δηλαδή τη πρόταση που είναι πάντα ψευδής, και την ταυτολογία ($\top$), δηλαδή τη πρόταση που είναι πάντα αληθής.
- **Μονομελείς Σύνδεσμοι**: $\mathcal{O}_1 := \{ \neg \}$, και τέλος οι,
- **Διμελείς Σύνδεσμοι ή σύνδεσμοι δύο θέσεων**:

$$\mathcal{O}_2 := \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$$

Έτσι οι σύνεσμοι είναι το σύνολο,

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = \{ \bot, \top, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$$

(A_3) : **Τα σύμβολα στίξης**, που είναι η παρένθεση που ανοίγει η παρένθεση που κλείνει και το κόμμα: $(,)$, και πολλές φορές και οι τετράγωνες αγκύλες, $[,]$.

Τα πιο πάνω σύνολα $(A_1), (A_2), (A_3)$ υποτίθεται πάντα ότι είναι ξένα μεταξύ τους.

Τελικά το αλφάβητο της προτασιακής λογικής είναι το ακόλουθο σύνολο:

$$\mathcal{A} := \Pi_0 \cup \mathcal{O} \cup \{(,\ ),\ [,\ ],\ ,\}$$

β) Η Σύνταξη της Προτασιακής Λογικής [ή Αναδρομικός Ορισμός των Προτάσεων (ΑΟΠ)]

Ο αναδρομικός ορισμός του συνόλου Π των προτάσεων, βασίζεται στους ακόλουθους τρεις συντακτικούς κανόνες, που καθορίζουν ποιες πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων (συμβολοσειρές) από το αλφάβητο αποτελούν προτάσεις και ποιες όχι:

(AO_0) Τα προτασιακά σύμβολα και οι λογικές σταθερές $\bot, \top$, είναι προτάσεις, έτσι,

$$\Pi_0 \cup \{\bot, \top\} \subseteq \Pi$$

(AO_1) Αν ϱ και σ είναι προτάσεις [7] τότε προτάσεις είναι και οι:

$$(\neg\varrho), (\varrho \wedge \sigma), (\varrho \vee \sigma), (\varrho \rightarrow \sigma), (\varrho \leftrightarrow \sigma)$$

(AO_2) Προτάσεις είναι μόνο ότι κατασκευάζεται με βάση τους κανόνες (AO_0) και (AO_1).

1.3.1 Σχόλιο. Οι πιο πάνω κανόνες εκφράζουν στην ουσία ότι, το σύνολο των καλοσχηματισμένων προτάσεων Π είναι *το ελάχιστο υποσύνολο συμβολοσειρών (κανόνας* (AO_2)*), που είναι κλειστό ως προς τους συνδέσμους* $\mathcal{O}$, *θεωρούμενους ως πράξεις επί του* Π *(κανόνας* (AO_1)*, και περιέχουν το σύνολο των ατομικών προτάσεων,* Π_0, *(κανόνας* (AO_0)*.*

Στη συνέχεια θα δώσουμε πιο κατασκευαστικό τρόπο σχηματισμού του συνόλου Π, από τα συστατικά του Π_0 και $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Ας δώσουμε όμως πρώτα μερικά παράδειγματα συμβολοσειρών που ανήκουν στο Π, και μερικών που δεν ανήκουν.

1.3.2 Παράδειγμα. Οι παρακάτω ακολουθίες συμβόλων από το αλφάβητο της προτασιακής λογικής $\mathcal{A}$ είναι προτάσεις:

$(\neg A)$

$(A \wedge (\neg A))$

$((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow \Gamma)$

$((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow (B \wedge \Gamma))$

[7] Τα σύμβολα ϱ, σ δεν ανήκουν στην γλώσσα της προτασιακής λογικής, αλλά είναι σύμβολα της μεταγλώσσας, που εδώ είναι η Ελληνική, και συμβολίζουν συμβολοσειρές της γλώσσας της προτασιακής λογικής . Η χρήση των μεταγλωσσικών αυτών συμβόλων είναι εξαιρετικά βολική, αφού αντί να γράφουμε π.χ. $((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow ((\neg\Delta) \vee (A \wedge B)))$ θέτουμε $\varrho := ((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow ((\neg\Delta) \vee (A \wedge B)))$ και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την μεταγλωσσική μεταβλητή ϱ.

$((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow ((\neg\Delta) \vee (A \wedge B)))$

$((\neg(\neg(\neg A))) \rightarrow A))$.

Ενώ δεν είναι προτάσεις οι ακολουθίες :

$(\neg A$

$((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow (\Gamma\wedge))$

$(A \rightarrow \vee)$,

$(\neg \wedge A)$,

$) \vee ($,

$(\vee)$,

$((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow ((\neg) \vee (A \wedge B)))$.

Είναι φανερό ότι η υλοποίηση των παραπάνω συντακτικών κανόνων μπορεί να παράγει, να δώσει, μια ατομική από το (Σ_1) ή μια σύνθετη πρόταση, από το (Σ_2) το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί όσες φορές θέλουμε. Κάθε τέτοια μοναδική εφαρμογή θα τη λέμε **βήμα**, ενώ το συνολικό αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για τη κατασκευή μιας πρότασης θα τη λέμε **μήκος** της πρότασης.

Έτσι η πρόταση $((A \leftrightarrow \Gamma) \rightarrow \Gamma)$ έχει μήκος 2, όπως και η $(A \wedge (\neg A))$, ενώ η $((\neg(\neg(\neg A))) \rightarrow A))$ έχει μήκος 4.

1.3.3 Σχόλιο. Ας δούμε τώρα έναν εναλλακτικό ορισμό του επαγωγικού συνόλου Π, που είναι πιο κατασκευαστικός και θυμίζει πολύ την κατασκευή των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Πρίν όμως θα εισάγουμε έναν χρήσιμο συμβολισμό. Έστω X ένα σύνολο προτάσεων, τότε ορίζουμε το σύνολο X^+ ως ακολούθως:

$$X^+ :=^{8} \{\varrho \,\square\, \sigma \,|\, \varrho, \sigma \in X \quad \text{και} \quad \square \in \mathcal{O}_2\} \cup \{\neg\varrho \,|\, \varrho \in X\}$$

Έτσι το X^+ είναι το σύνολο των τύπων που δημιουργείται αν «κλείσουμε» το X ως προς τους λογικούς συνδέσμους του $\mathcal{O}_2$ και του $\mathcal{O}_1$.

Ας δούμε τώρα τα βήματα σχηματισμού του συνόλου Π συγκρίνοντάς τα ταυτόχρονα με τα βήματα σχηματισμού του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

[8] Το σύμβολο := σημαίνει ίσα εξ' ορισμού

Φυσικοί Αριθμοί	$\Leftrightarrow$	Προτασιακοί Τύποι
$0 := \emptyset$	$\Leftrightarrow$	Π_0
$1 := 0 \cup \{0\}$	$\Leftrightarrow$	$\Pi_1 := \Pi_0 \cup \Pi_0^+$
$2 := 1 \cup \{1\}$	$\Leftrightarrow$	$\Pi_2 := \Pi_1 \cup \Pi_1^+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+1 := n \cup \{n\}$	$\Leftrightarrow$	$\Pi_{n+1} := \Pi_n \cup \Pi_n^+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{N} := \bigcup_{n=0}^{\infty} n$	$\Leftrightarrow$	$\Pi := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$

Ο πιο πάνω ορισμός είναι ένας τυπικός επαγωγικός ορισμός του συνόλου Π των προτάσεων της προτασιακής λογικής, ανάλογος του επαγωγικού ορισμού του $\mathbb{N}$.

Τα δύο βασικά βήματα κατασκευής του είναι τα εξής:

Βασικό Βήμα 0 :

$$\Pi_0 := \{A, B, \Gamma, \ldots, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\} \cup \{\perp, \top\}$$

Επαγωγικό Βήμα n+1 : $\Pi_{n+1} := \Pi_n \cup \Pi_n^+$ όπου οι προτάσεις Π_n^+ κατασκευάζονται από τις ήδη κατασκευασμένες:

$$\Pi_n^+ := \{\, \sigma_1 \Box \sigma_2 \,|\, \sigma_1, \sigma_2 \in \Pi_n \quad \& \quad \Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}\} \cup \{\, \neg\sigma \,|\, \sigma \in \Pi_n \,\}$$

και τελικά το σύνολο των προτάσεων της προτασιακής λογικής είναι το:

$$\Pi := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$$

Τέτοια σύνολα που ορίζονται με αναδρομή λέγονται **επαγωγικά σύνολα**. Ακριβέστερα ένα σύνολο θα λέγεται **επαγωγικό** αν ορίζεται ως:

> «το ελάχιστο σύνολο που περιέχει ένα δοσμένο σύνολο (π.χ. το Π_0) και είναι κλειστό ως προς κάποιες δοσμένες πράξεις (π.χ. τις $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$»)

Η ιδιομορφία των επαγωγικών συνόλων, όπως για παράδειγμα το $\mathbb{N}$, συνίσταται στο γεγονός ότι **κάθε συνάρτηση που θα θελήσουμε να ορίσουμε πάνω σ' αυτά θα πρέπει επίσης να οριστεί αναδρομικά, με τον ίδιο δηλαδή τρόπο.**

1.3.4 Σχόλιο. **(i)** Είναι λοιπόν φανερό ότι κάθε πρόταση φ, έχει μία και μόνο από τις παρακάτω δυνατότητες:

1. Η φ είναι μια προτασιακή μεταβλητή (ένα προτασιακό σύμβολο).

2. $\varphi = (\neg\sigma)$ όπου σ είναι μια πρόταση.

3. $\varphi = (\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ όπου σ_1 και s_2 είναι προτάσεις.

4. $\varphi = (\sigma_1 \vee \sigma_2)$ όπου σ_1 και σ_2 είναι προτάσεις.

5. $\varphi = (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$ όπου σ_1 και σ_2 είναι προτάσεις.

6. $\varphi = (\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$ όπου σ_1 και σ_2 είναι προτάσεις.

Επιπλέον οι σ_1 και σ_2 είναι μονοσήμαντα ορισμένες στις περιπτώσεις $3, 4, 5,$ και 6.
(ii) Σε κάθε σύνθετη πρόταση οι παρενθέσεις συγκροτούν ζεύγη, μία που ανοίγει μία που κλείνει, τα οποία περικλείουν μικρότερες προτάσεις. Δύο ζεύγη των παρενθέσεων διατάσσονται είτε $(\underbrace{\quad\quad})\cdots(\underbrace{\quad\quad})$, είτε $((\underbrace{\quad\quad}))$, αλλά όχι $(_1 \quad (_2 \quad)_{1'} \quad)_{2'}$.

Η διαδικασία κατασκευής μιας οποιασδήποτε πρότασης (η σύνταξής της) μπορεί να περιγραφεί από ένα «δενδροδιάγραμμα» το **συντακτικό (ή γενεαλογικό) δέντρο** της πρότασης που για κάθε πρόταση είναι μοναδικό.

Για παράδειγμα το συντακτικό δέντρο της $((A \leftrightarrow \varGamma) \rightarrow (B \wedge \varGamma))$ είναι

Το συντακτικό δέντρο μπορεί να αναπαρασταθεί και: Με αυτή τη μορφή το συντακτικό δέντρο αναπαριστά τον τρόπο με το οποίο αρχίζοντας από τα προτασιακά σύμβολα, παράγουμε μια πρόταση ακολουθώντας τον Αναδρομικό Ορισμό των Προτάσεων.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το σύνολο των προτάσεων που παράγονται με αυτόν τον τρόπο δεν είναι άλλο από το σύνολο των προτάσεων της προτασιακής λογικής το οποίο συμβολίζουμε με $\varPi$. Με $\varPi_0$ συμβολίσουμε τα προτασιακά σύμβολα, που είναι μήκους μηδέν και αντιπροσωπεύουν τις απλές προτάσεις, με $\varPi_1$ όλες τις προτάσεις μήκους 1, με $\varPi_2$ όλες τις προτάσεις μήκους 2, με $\varPi_3$ όλες τις προτάσεις μήκους 3, κτλ.. Τότε το $\varPi$ είναι:

$$\varPi = \varPi_0 \cup \varPi_1 \cup \varPi_2 \cup \ldots \cup \varPi_k \cup \ldots := \bigcup_{n=0}^{\infty} \varPi_n$$

Οι σύνθετες προτάσεις:

$$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$$

είναι οι μικρότερες δυνατές σύνθετες προτάσεις που είναι δυνατόν να κατασκευαστούν, απαιτείται ένα βήμα για την κατασκευή τους, είναι λοιπόν μήκους ένα. Η διαδικασία κατασκευής είναι δυνατόν να επαναληφθεί όσες φορές το επιθυμούμε. Έτσι σύνθετες προτάσεις είναι και οι:

$$\neg(A \wedge B), \neg(\neg A), ((A \vee B) \wedge (A \vee B))$$

που χρειάζονται δύο βήματα στην κατασκευή τους. Όπως και οι:

$$((\neg A) \leftrightarrow (A \vee B)), ((A \rightarrow B) \vee (A \leftrightarrow B)),$$
$$((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)), ((A \vee B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$$

που χρειάζονται 3 βήματα στην κατασκευή τους, κ.τ.λ..

Το μήκος λοιπόν μιας πρότασης δεν είναι ουσιαστικά τίποτα άλλο από μια απεικόνιση μ:

$$\mu : \Pi \rightarrow \mathbb{N} \;/\!\!/\; \sigma \mapsto \mu(\sigma)$$

όπου $\mu(\sigma)$ είναι ο ελάχιστος φυσικός n τέτοιος ώστε $\sigma \in \Pi_n$.

Οι τύποι που ανήκουν στο Π_n έχουν μήκος μικρότερο ή ίσο του n, οι δε τύποι που ανήκουν στο σύνολο:

$$\Pi_{n+1} - \Pi_n := \Pi_n^+$$

έχουν μήκος ακριβώς $n + 1$.

Ο αναδρομικός ορισμός του συνόλου των προτάσεων Π, συνεπάγεται και το επαγωγικό τρόπο απόδειξης ισχυρισμών σχετικά με το Π. Αν λοιπόν θέλουμε να αποδείξουμε ότι όλες οι προτάσεις της προτασιακής λογικής, όλα δηλαδή τα στοιχεία του Π, έχουν κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα, αρκεί να αποδείξουμε ότι οποιοδήποτε μήκος και να έχει η πρόταση πληροί την ιδιότητα αυτή. **Θα πρέπει με άλλα λόγια να κάνουμε επαγωγή στο μήκος των προτάσεων**. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι πρέπει να ακολουθήσουμε τα βήματα Σ_0 και Σ_1 του αναδρομικού ορισμού των προτάσεων και να αποδείξουμε ότι οτιδήποτε παράγεται από αυτά τα βήματα έχει την ιδιότητα που συζητάμε. Με άλλα λόγια αφού το Π είναι κατασκευασμένο ως επαγωγικό σύνολο, μπορούμε να διατυπώσουμε μια αρχή επαγωγής για τις προτάσεις ως εξής:

Αν μια ιδιότητα ικανοποιεί τα εξής:

(i) Ισχύει για τις προτάσεις του $\Pi_0 \cup \{\bot, \top\}$. και

(ii) Υποθέτοντας ότι ισχύει για τις προτάσεις του Π_n (Υπόθεση της Επαγωγής (ΥΕ)), αποδείξουμε ότι ισχύει και για τις προτάσεις του Π_{n+1},

τότε η ιδιότητα ισχύει για κάθε πρόταση του Π.

Ας παρακολουθήσουμε αυτήν την αποδεικτική διαδικασία, με επαγωγή στο μήκος των προτάσεων, στο παρακάτω θεώρημα:

1.3.5 Θεώρημα. *Σε κάθε πρόταση της προτασιακής λογικής το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων είναι ίσο με το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων.*

Απόδ.: **i)** Το θεώρημα ισχύει για τα προτασιακά σύμβολα, τις προτάσεις δηλαδή του $P_0 \cup \{\bot, \top\}$: Μηδέν παρενθέσεις ανοίγουν και μηδέν κλείνουν.
ii) (Υ.Ε.) Έστω ότι ισχύει για τις προτάσεις σ_1 και σ_2, από το P_n . Τότε:

• Θα ισχύει για την $(\neg\sigma_1)$, αφού από την Υ. Ε. η σ_1 έχει την ιδιότητα οπότε η $(\neg\sigma_1)$ θα έχει όσες δεξιές και αριστερές όσες και η s_1 και ακόμα μία δεξιά και μια αριστερή.

• Ανάλογα σκεπτόμαστε και για την $(\sigma_1 \Box \sigma_2)$ όπου $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Από τις i) και ii) συμπεραίνουμε πως η ιδιότητα αυτή, ότι δηλαδή, *το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων είναι ίσο με το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων*, ισχύει για κάθε πρόταση της προτασιακής λογικής. ⊣

Συμβολισμός

Όταν μια πρόταση σ αποτελείται από ατομικές προτάσεις, για παράδειγμα τις A, B, Γ, θα γράφουμε την πρόταση αυτή ως $\sigma(A, B, \Gamma)$. Μια πρόταση, λοιπόν, είναι μια ακολουθία συμβόλων του αλφάβητου βαλμένα στη σειρά σύμφωνα με τους συντακτικούς κανόνες που είδαμε. Ενδεχόμενα όμως μια υπακολουθία συμβόλων στη πρόταση αυτή να είναι και αυτή πρόταση, όπως η

$$((\neg\Delta)\vee(A\wedge B)) \text{ ή η } (A\leftrightarrow\Gamma) \quad \text{στην} \quad ((A\leftrightarrow\Gamma)\to((\neg\Delta)\vee(A\wedge B))).$$

Προφανώς οι μικρότερες δυνατές υπακολοθίες που είναι προτάσεις είναι τα προτασιακά σύμβολα που συμμετάσχουν στο σχηματισμό μιας πρότασης. Οι προτάσεις αυτές μπορούν να αντικατασταθούν από άλλες προτάσεις και το αποτέλεσμα να είναι πάλι πρόταση.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια πρόταση είναι «περίπτωση-αντικατάστασης» μιας άλλης.

1.3.6 Ορισμός. Μια «**περίπτωση-αντικατάστασης**» μιας δοθείσης πρότασης είναι μια άλλη πρόταση που προκύπτει από τη δοθείσα με αντικατάσταση σε όλο το εύρος της, μιας (ή περισσοτέρων) από τις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται σ' αυτή, από μια άλλη πρόταση (ή κάποιες άλλες προτάσεις).

Εξυπακούεται ότι κάθε μεταβλητή που αντικαθίσταται, αντικαθίσταται από την ίδια πρόταση. Για παράδειγμα ο τύπος $(\varphi\to\psi)\vee\neg(\varphi\to\psi)$ είναι μια περίπτωση-αντικατάστασης του τύπου $\sigma\vee\neg\sigma$. Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα είναι οι ακόλουθοι δύο τύποι:

$$A\to B \quad\vee\quad \neg(\neg A\wedge B) \tag{1.1}$$

$$\Gamma\vee\Delta\to A \quad\vee\quad \neg(\neg(\Gamma\vee\Delta)\wedge A) \tag{1.2}$$

Τότε ο τύπος (1.2) είναι περίπτωση-αντικατάστασης του τύπου (1.1), αφού ο τύπος (1.2) προκύπτει από τον (1.1) με την αντικατάσταση της μεταβλητής A, και στις δύο της εμφανίσεις, από τον τύπο $(\Gamma\vee\Delta)$ και την αντικατάσταση της μεταβλητής B από τον τύπο A.

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει το γενικό αποτέλεσμα.

1.3.7 Θεώρημα. *(Αντικατάστασης προτάσεων) Έστω*

$$\sigma(A_1,A_2,\ldots\varrho\ldots,A_n) \quad \textit{και} \quad \tau$$

προτάσεις. Τότε και η $\sigma(A_1,A_2,\ldots\tau,\ldots A_n)$ είναι πρόταση.

Απόδ.: Θα αποδείξουμε το θεώρημα αυτό με επαγωγή στο μήκος των προτάσεων .

i) Εάν η σ είναι προτασιακό σύμβολο, έστω το A, τότε προφανώς το αποτέλεσμα της αντικατάστασης του A από την τ είναι πρόταση τ.

ii) (Υ.Ε.) Έστω

$$\sigma_1(A_1, A_2, \ldots, \varrho, \ldots, A_n) \quad \text{και} \quad \sigma_2(A_1, A_2, \ldots, \varrho, \ldots, A_n)$$

δύο προτάσεις για τις οποίες ισχύει το θεώρημα, τότε ισχύει και για τις $(\neg\sigma_1), (\sigma_1 \wedge \sigma_2), (\sigma_1 \vee \sigma_2), (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$ και $(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

Πράγματι:

α) Αφού η $\sigma_1(A_1, A_2, \ldots, \tau, \ldots, A_n)$ είναι πρόταση από την Υ.Ε. άρα και η $(\neg\sigma_1(A_1, A_2, \ldots, \tau, \ldots, A_n))$ είναι πρόταση σύμφωνα με το ii) του ΑΟΠ.

β) Επίσης αφού οι $\sigma_1(A_1, A_2, \ldots \tau \ldots An)$ και $\sigma_2(A_1, A_2, \ldots \tau, \ldots, A_n)$ είναι προτάσεις σύμφωνα με την Υ.Ε. άρα και οι,

$$(\sigma_1(A_1, A_2, \ldots, \tau, \ldots, A_n) \,\square\, \sigma_2(A_1, A_2, \ldots, \tau, \ldots, A_n))$$

όπου $\square \in \{\ \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\ \}$, είναι προτάσεις σύμφωνα με το ii) του ΑΟΠ. ⊣▮

1.3.8 Ασκήσεις. 1. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες συμβόλων είναι προτάσεις και ποιες όχι:

i) $((A \vee B) \rightarrow G) \leftrightarrow (A \wedge (A \rightarrow \neg))$

ii) $(((\neg a) \rightarrow \neg(\neg A)) \leftrightarrow \neg(\neg(\neg A)))$

iii) $A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee (\ldots A_n))) \equiv (A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee (\ldots A_n))$

iv) $A_1 \wedge (A_2 \wedge (A_3 \wedge ((\ldots A_n))) \equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge (\ldots A_n)$

v) $((A \vee B) \rightarrow (G \wedge D) \rightarrow (A \vee (B \vee G)))$

vi) $(((A \Rightarrow B) \rightarrow G) \wedge D)$

vii) $A \wedge (B \wedge (g \wedge ((\ldots G))) \equiv (A \wedge A \wedge G \wedge (\ldots A)$

viii) $(((A \wedge B) \wedge 2) \leftrightarrow A)$

ix) $(A \vee (\neg A \wedge \sigma)) \leftrightarrow (A \vee B)$

x) $(((\neg A) \vee B) \leftrightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg B)$

xi) $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \wedge \neg B)$

2. Βρείτε το μήκος κάθε μιας από τις προτάσεις που δίνονται στην άσκηση 1.

3. Ας υποθέσουμε ότι περιορίζουμε το αλφάβητό μας στα προτασιακά σύμβολα A και B και στα σύμβολα συνδέσμων $\neg$ και$\wedge$.Γράψτε αναλυτικά τα στοιχεία των συνόλων Π_0,Π_1, Π_2.

4. **i)** Όπως και στην άσκηση 2 με τους συνδέσμους $\vee$ και $\rightarrow$.

   ii) Πιο είναι το μήκος των προτάσεων που περιέχει κάθενα από τα Π_0,Π_1, Π_2.

5. Συμβολίζουμε με $l(\sigma)$ το μήκος της πρότασης σ και $\square$ ένα διμελή σύνδεσμο. Εξετάστε τι από τα παρακάτω ισχύει και αποδείξτε το. Για ότι δεν ισχύει δώστε αντιπαράδειγμα.

   i) $l(\sigma_1 \square \sigma_2) \leq l(\sigma_1) + l(\sigma_2)$

   ii) $l(\sigma_1 \square \sigma_2) = l(\sigma_1) + l(\sigma_2) + 1$

6. Συμβολίζουμε με $C(\sigma)$ τον αριθμό των θέσεων που έχουν καταληφθεί από σύμβολα συνδέσμων στην πρόταση σ. Εξετάστε αν για κάθε σ ,$l(\sigma) \leq C(\sigma)$

7. Δείξτε ότι σε κάθε πρόταση το πλήθος των θέσεων που έχει καταληφθεί από προτασιακό σύμβολο υπερέχει κατά 1 του πλήθους των θέσεων που έχουν καταληφθεί από διμελείς συνδέσμους.

8. Βρείτε το μήκος κάθε μιας από τι παρακάτω προτάσεις και κατασκευάστε το συντακτικό της δέντρο:

   i) $((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A))$

   ii) $((A \wedge ((\neg A) \vee B)) \leftrightarrow (A \wedge B))$

   iii) $((A \rightarrow B) \vee ((\neg A) \rightarrow B))$

   iv) $((A \rightarrow B) \rightarrow (((A \rightarrow G) \rightarrow B) \rightarrow B))$

   v) $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee G) \rightarrow (B \vee G)))$

   vi) $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow G) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \wedge G)))$

   vii) $((A \leftrightarrow (B \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow G))$

   viii) $(((\neg A) \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(A \leftrightarrow B)))$

   ix) $((A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (A_4 \rightarrow B)))) \leftrightarrow ((A_1 \wedge (A_2 \wedge (A_3 \wedge A_4))) \rightarrow B))$

Κεφάλαιο 2

ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

2.1 Εννοιολογική Εισαγωγή

Η σημασιολογία ή «σημαντική» είναι η διαδικασία με την οποία αποδίδουμε κάποιο νόημα ή σημασία στα ξερά και δίχως νόημα σύμβολα της γλώσσας. Γι' αυτό πολλές φορές αναφερόμαστε στην διαδικασία αυτή και ως «ερμηνεία».

Επειδή στην περίπτωση της Προτασιακής Λογικής οι προτάσεις μας αποτελούν το περιεχόμενο αποφαντικών ή δηλωτικών προτάσεων, η διαδικασία απόδοσης νοήματος ή σημασίας στις προτάσεις μας έχει ως τελικό αποτέλεσμα να κάνει την πρόταση είτε «αληθή» είτε «ψευδή», και αυτό ανεξάρτητα από το θεματικό εμπειρικό αντικείμενο ερεύνης (π.χ. Φυσική, Χημεία, ψυχολογία, κ.λπ.). Τελικά **όλη η σημασιολογική διαδικασία απόδοσης νοήματος στις προτάσεις του Π, συνοψίζεται, σε τελευταία ανάλυση, στην απονομή τιμών αλήθειας για αυτές**.

Η απόδοση αυτή γίνεται, όπως έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή, από μια συνάρτηση. Επειδή εδώ οι προτάσεις μας αποτελούν το περιεχόμενο αποφαντικών ή δηλωτικών φράσεων, δεχόμαστε ότι αποδίδοντας νόημα σε μια πρόταση αυτή έχει μόνο δύο δυνατότητες, είτε να πάρει τη τιμή «αληθής», που θα την συμβολίζουμε με 1, είτε να πάρει την τιμή «ψευδής» που θα την συμβολίζουμε με 0.

Για παράδειγμα η φράση της φυσικής μας γλώσσας:

«*Το νερό βράζει στους 100 βαθμούς*»

γίνεται αληθής, δηλαδή παίρνει την τιμή 1 όταν πράγματι εξετάσουμε το σημασιολογικό περιεχόμενο της φράσης, πειραματιστούμε δηλαδή και διαπιστώσουμε ότι αυτό που δηλώνει η φράση πράγματι συμβαίνει. Έτσι η τιμή αληθείας 1 συνοψίζει όλες τις εμπειρικές έρευνες για την αλήθεια τις πρότασης, και ταυτόχρονα ανεξαρτητοποιεί την σημασιολογία μας από ειδικά πλαίσια ερεύνης.

Η σημασιολογική λοιπόν διαδικασία συνοψίζεται στον κατάλληλο ορισμό μια συνάρτησης,

$$v(\cdot) : \Pi \longrightarrow \{0,1\}.$$

Ο κατάλληλος ορισμός και οι ιδιότητες τέτοιων συναρτήσεων θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση των λογικών συνδέσμων, που αποτελούν τα συστατικά των «πράξεων» στον καθορισμό των επαγωγικών συνόλων που σχετίζονται με την Λογική. Κάθε λογικός σύνδεσμος, μπορεί να θεωρηθεί από δύο σκοπιές:

1. **Από την γλωσσική-συντακτική σκοπιά, της τυπικής γλώσσας**. Η συμπεριφορά του λογικού συνδέσμου (ενός απλού συμβόλου) καθορίζεται εδώ από τους συντακτικούς κανόνες της τυπικής γλώσσας, με στόχο την αναδρομική κατασκευή καλοσχηματισμένων συμβολοσειρών.

2. **Από τη μαθηματική σκοπιά.** Κάθε λογικός σύνδεσμος μπορεί να θεωρηθεί ως μια «**πράξη**» επί του **συνόλου** Π. Έτσι το σύνολο Π εφοδιασμένο με τις «πράξεις» των λογικών συνδέσμων, γίνεται μια άλγεβρα. Η μελέτη της άλγεβρας αυτής, στην ουσία συμπίπτει με την αλγεβρική μελέτη της λογικής. Για μια αλγεβρική διαπραγμάτευση της λογικής βλ. το [21]. Εξυπακούεται ότι αφού το Π είναι επαγωγικό σύνολο, τότε και κάθε π.χ. διμελής πράξη $\Box : \Pi \times \Pi \longrightarrow \Pi$ θα πρέπει να ορισθεί επίσης επαγωγικά, οπότε η διαδικασία κατασκευής καλοσχηματισμένων συμβολοσειρών (σύνταξη) και η ενέργεια της πράξης (άλγεβρα) π.χ. της $\Box$, είναι το ίδιο πράγμα. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα καλοζυγισμένο μείγμα μαθηματικών (αλγεβρικών) και συντακτικών-γλωσσικών μεθόδων για τις έννοιες της Λογικής. Ο απώτερος στόχος είναι η καλλίτερη κατανόηση αλλά και η ομοιόμορφη διαπραγμάτευση λογικών και μαθηματικών εννοιών.

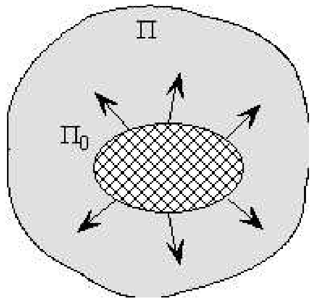
2.2 Απονομές και Αποτιμήσεις Αληθείας

Είναι φανερό ότι όταν οι προτάσεις μας αποκτούν μια σημασία, τότε μπορούμε να αποφανθούμε για την σημασιολογική αλήθεια ή το ψεύδος της πρότασής μας. Έτσι τελικά η απονομή σημασίας ταυτίζεται με το αποτέλεσμα της απονομής τιμών αλήθειας για την πρόταση. Η σημασιολογική λοιπόν συνάρτηση α είναι αυτή που απονέμει τιμές στα προτασιακά σύμβολα, είναι λοιπόν μια συνάρτηση από το Π_0 στο $2 := \{0, 1\}$:

$$\alpha : \Pi_0 \to \{0,1\} \quad /\!\!/ \quad A \mapsto \alpha(A)$$

και λέγεται **απονομή αλήθειας**.

Γνωρίζουμε ότι $\Pi_0 \subseteq \Pi$:



Είναι εξάλλου γνωστό ότι κάθε συνάρτηση μπορεί συνήθως να επεκταθεί σε υπερσύνολα κατά περισσότερους από ένα τρόπους. Επειδή θέλουμε σε οποιαδήποτε πρόταση, οποιουδήποτε μήκους, να μπορούμε να της αποδίδουμε μια μοναδική αληθοτιμή, το ερώτημα που μας ενδιαφέρει εδώ είναι, αν είναι δυνατόν να επεκτείνουμε την α από το Π_0 στο Π κατά μοναδικό τρόπο. Πράγματι η επαγωγική δομή του Π μας εξασφαλίζει αυτή τη δυνατότητα:

2.2.1 Θεώρημα. *Για κάθε απονομή αλήθειας,*

$$\alpha : \Pi_0 \longrightarrow \{0,1\}$$

υπάρχει μια και μοναδική επέκταση της α, που θα την συμβολίζουμε με v_α ή και $[\![\cdot]\!]_\alpha$,

$$[\![\cdot]\!]_\alpha \equiv v_\alpha : \Pi \longrightarrow \{0,1\}$$

Απόδ.: (Με επαγωγή στο μήκος των προτάσεων).

Έστω, $\alpha : \Pi_0 \longrightarrow \{0,1\}$ μια απονομή αλήθειας.

Ορίζουμε επαγωγικά μια συνάρτηση $v_\alpha : \Pi \longrightarrow \{0,1\}$ ως εξής:

i) $v_\alpha(A) = \alpha(A)$, για κάθε $A \in P_0$

ii) Ας υποθέσουμε (ΥΕ) ότι έχουμε ορίσει τα $v_\alpha(A)$ και $v_\alpha(B)$ για κάθε $A, B \in \Pi_n$

Οι προτάσεις που ανήκουν στο Π_n^+ θα είναι της μορφής: $\neg A$, για $A \in \Pi_n$ και $A \Box B$ με $\Box \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow\}$ και $A, B \in \Pi_n$.

Έτσι λοιπόν ορίζουμε:

$$\begin{aligned} v_\alpha(\neg A) &= \neg_2 v_\alpha(A) \\ v_\alpha(A \Box B) &= v_\alpha(A) \Box_2 v_\alpha(B) \end{aligned}$$

Που συμπληρώνει τον επαγωγικό ορισμό της $v_\alpha : \Pi \longrightarrow \{0, 1\}$.

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η v_α είναι η μοναδική επέκταση της α. Πράγματι έστω v_1, v_2 δύο διαφορετικές επεκτάσεις της α, που ταυτίζονται επί του Π_0 :

$$v_i : \Pi \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{με} \quad v_i(A) = v(A), \quad i = 1, 2$$

θα δείξουμε με επαγωγή ότι ταυτίζονται παντού.

i) Στο Π_0 οι v_1, v_2 ταυτίζονται εξ ορισμού.

ii) Εστω τώρα ότι $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$ για κάθε $\varphi \in \Pi_n$, θα δείξουμε ότι $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$ για κάθε $\varphi \in \Pi_n^+$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} v_1(\neg\varphi) &= \neg_2 v_1(\varphi) \\ &= \neg_2 v_2(\varphi) \quad \text{από την υπόθεση της επαγωγής} \\ &= v_2(\neg\varphi) \end{aligned}$$

και με $\Box \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow\}$:

$$\begin{aligned} v_1(A \Box B) &= v_1(A) \Box_2 v_1(B) \\ &= v_2(A) \Box_2 v_2(B) \\ &= v_2(A \Box B) \quad \dashv \end{aligned}$$

2.2.2 Ορισμός. Για κάθε απονομή αλήθειας,

$$\alpha : \Pi_0 \rightarrow \{0, 1\}$$

τη μοναδική της επέκταση v_α θα την ονομάζουμε **εκτίμηση** ή **αποτίμηση αλήθειας**.

Η v_α έχει την ακόλουθη **καθολική ιδιότητα**: Είναι η μοναδική συνάρτηση που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα αντιμεταθετικό, **για κάθε** απονομή α:

$$\begin{tikzcd} \Pi_0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "(v_\alpha \circ i =) \forall \alpha"'] & \Pi \arrow[d, dashed, "\exists ! v_\alpha"] \\ & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

Πιο αναλυτικά από τον ορισμό της v_α έχουμε:

$$\begin{array}{rcl} v_\alpha(\neg A) & = & \neg_2 v_\alpha(A) \\ v_\alpha(A \wedge B) & = & v_\alpha(A) \wedge_2 v_\alpha(B) \\ v_\alpha(A \vee B) & = & v_\alpha(A) \vee_2 v_\alpha(B) \\ v_\alpha(A \to B) & = & v_\alpha(A) \to_2 v_\alpha(B) \\ v_\alpha(A \leftrightarrow B) & = & v_\alpha(A) \leftrightarrow_2 v_\alpha(B) \\ v_\alpha(\bot) = 0 & \& & v_\alpha(\top) = 1 \end{array}$$

Δηλαδή η εκτίμηση ή αποτίμηση αλήθειας v_α αποτελεί έναν ομομορφισμό μεταξύ των ακόλουθων αλγεβρικών δομών (δηλ. συνόλων εφοδιασμένων με διάφορες πράξεις):

$$\langle \Pi, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, \bot, \top \rangle \xrightarrow{v_\alpha} \langle \{0,1\}, \neg_2, \wedge_2, \vee_2, \to_2, \leftrightarrow_2, 0, 1 \rangle$$

Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο πιο συμπαγή ορισμό,

2.2.3 Ορισμός. Κάθε ομομορφισμός $v : \Pi \longrightarrow 2$, δηλαδή κάθε συνάρτηση $v : \Pi \longrightarrow 2$, τέτοια ώστε,

$$\begin{array}{rcl} v(\neg\sigma) & := & \neg_2 v(\sigma) \\ v(\sigma \Box \psi) & := & v(\sigma) \Box_2 v(\psi) \\ v(\top) := 1 & \& & v(\bot) = 0 \end{array}$$

όπου, $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ και $\Box_2 \in \{\wedge_2, \vee_2, \to_2, \leftrightarrow_2\}$, λέγεται **αποτίμηση** ή **εκτίμηση αλήθειας**.

2.2.4 Σχόλιο. Το σύνολο $\{0,1\}(\equiv 2)$ εφοδιασμένο με τις πράξεις $\neg_2, \wedge_2, \vee_2$ αποτελεί μια **άλγεβρα Boole**, $\langle 2, \neg_2, \wedge_2, \vee_2, 0, 1 \rangle$ που καλείται **τετριμμένη άλγεβρα Boole**. Από την δομή $\langle \Pi, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, \bot, \top \rangle$ μπορεί κανείς να κατασκευάσει κατάλληλα μια άλλη άλγεβρα Boole (Lindenbaum-Tarski) $\langle \Pi/\!\equiv, \neg, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$. Σε επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε διεξοδικά τα θέματα αυτά.

2.2.5 Ορισμός. Έστω σ μια πρόταση με προτασιακές μεταβλητές μεταξύ των $A_1, A_2, \ldots, A_n$, που θα τη συμβολίζουμε συνήθως ως: $\sigma(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Η διατεταγμένη ν-άδα $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ από αληθοτιμές ($\varepsilon_i \in \{1, 0\}$) ονομάζεται **απονομή τιμών** στα προτασιακά σύμβολα της σ.

Η σημασιολογική συνάρτηση, η εκτίμηση ή αποτίμηση αλήθειας δηλαδή που περιγράψαμε προηγουμένως, η οποία για κάθε απονομή τιμών στα προτασιακά σύμβολα μιας πρότασης αντιστοιχεί μια μοναδική αληθοτιμή στην πρόταση, περιγράφεται από τον πίνακα της πρότασης, ο οποίος περιέχει όλες τις δυνατές απονομές τιμών, και λέγεται **αληθοπίνακας** της πρότασης.

Οι αληθοπίνακες των σύνθετων προτάσεων μήκους 1 είναι :

A	B	$(\neg A)$	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \to B)$	$(A \leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Ο αληθοπίνακας μιας πρότασης μεγάλου μήκους κατασκευάζεται ως εξής:

Όπως έχουμε πει οι σύνθετες προτάσεις κτίζονται από απλούστερες με αναδρομικό τρόπο και με την παρεμβολή των λογικών συνδέσμων μεταξύ των προτάσεων του προηγούμενου βήματος. Για να βρεθεί η αληθοτιμή μιας πρότασης πρέπει να βρεθούν πρώτα οι αληθοτιμές των προτάσεων του προηγούμενου βήματος που την απαρτίζουν. Η διαδικασία αυτή συνοψίζεται στην κατασκευή του αληθοπίνακα της πρότασης.

2.2.6 Παράδειγμα. Θα δούμε τη διαδικασία αυτή μέσα από ένα παράδειγμα, την κατασκευή του αληθοπίνακα της πρότασης $((A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B))$. Οι συμβαλλόμενες προτάσεις στη σύνθετη αυτή πρόταση είναι οι: $A, B, (\neg A), (\neg A \vee B), (A \to B)$

A	B	$(\neg A)$	$((\neg A) \vee B)$	$(A \to B)$	$((A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B))$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Μπορούμε να έχουμε μια γρήγορη απάντηση για την αληθοτιμή που παίρνει κάποια πρόταση από μια συγκεκριμένη απονομή τιμών, ακολουθώντας το συντακτικό δέντρο της πρότασης, και αντικαθιστώντας σε κάθε βήμα υλοποίησης του Α.Ο.Π. την παραγόμενη υποπρόταση από την αληθοτιμή που της δίνει η απονομή τιμών που εξετάζουμε.

2.2.7 Παράδειγμα. Ας εξετάσουμε την αληθοτιμή της

$$((A \leftrightarrow \Gamma) \to (B \wedge (\neg\Gamma)))$$

ως προς την απονομή τιμών $(1, 1, 0)$.

Κατασκευάζουμε το συντακτικό (ή γενεαλογικό) δέντρο της πρότασης:

$$\begin{tikzcd}
(1)A \arrow[dr] & & (0)\Gamma \arrow[dl] & & & & (1)B \arrow[dr] & & (1)\Gamma \arrow[dl] \\
& (0)(A \leftrightarrow \Gamma) \arrow[drrr] & & & & & & (1)(B \wedge (\neg\Gamma)) \arrow[dlll] & \\
& & & & (1)((A \leftrightarrow \Gamma) \to (B \wedge (\neg\Gamma) & & & &
\end{tikzcd}$$

και απονέμουμε τις αληθοτιμές στα προτασιακά σύμβολα.

Μπορούμε με τη μέθοδο αυτή να συμπληρώνουμε τον αληθοπίνακα μιας πρότασης χωρίς να περιλαμβάνουμε τις στήλες για τις υποπροτάσεις. Ένα τέτοιο αληθοπίνακα θα τον λέμε **βραχύ αληθοπίνακα**.

Από τα παραπάνω είναι εύκολο να συμπεράνει κανείς ότι κάθε πρόταση έχει ένα πίνακα αλήθειας, ο οποίος στην ουσία είναι μια γραφική αναπαράσταση μιας συνάρτησης αλήθειας ή συνάρτησης του Boole.

Έτσι κάθε προτασιακός τύπος $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ επάγει μια συνάρτηση αληθείας, $\bar{\varphi} : 2^n \longrightarrow 2$.

Ακριβέστερα, αν $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ είναι ένας προτασιακός τυπος, που θα μπορούσαμε να τον εκφράσουμε συναρτησιακά ως:

$$\varphi : \Pi_0 \times \ldots \times \Pi_0 \equiv \Pi_0^n \longrightarrow \Pi \;\; /\!\!/ \;\; (A_1, \ldots, A_n) \mapsto \varphi(A_1, \ldots, A_n)$$

και ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια απονομή αληθείας

$$\alpha : \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

και τη μοναδικά ορισμένη αποτίμηση v_α, αν επίσης,

$$\alpha^n := \overbrace{\alpha \times \ldots \times \alpha}^{n \text{ φορές}} : \Pi_0^n \longrightarrow 2^n \;/\!\!/\; (A_1, \ldots, A_n) \mapsto (\alpha(A_1), \ldots, \alpha(A_n)),$$

τότε έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
\Pi_0^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha^n"'] \arrow[dr, dotted] & \Pi \arrow[d, "v_\alpha"] \\
2^n \arrow[r, "\bar{\varphi}"'] & 2
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varphi(A_1, \ldots, A_n) \arrow[d, mapsto] \\
(\alpha(A_1), \ldots, \alpha(A_n)) \arrow[r, mapsto] & \begin{array}{c} v_\alpha(\varphi(A_1,\ldots,A_n)) = \\ = \bar{\varphi}(\alpha(A_1),\ldots,\alpha(A_n)) \end{array}
\end{tikzcd}$$

που δείχνει ακριβώς τον τρόπο που η $\bar{\varphi}$ επάγεται από την φ. Το αντίστροφο είναι επίσης εξαιρετικά ενδιαφέρον! Μπορεί κανείς να δείξει με επαγωγή στο μήκος των προτασιακών τύπων ότι:

Κάθε συνάρτηση $b : 2^n \longrightarrow 2$ λαμβάνεται με τον πιο πάνω τρόπο από έναν προτασιακό τύπο $\varphi_b(A_1, \ldots, A_n)$.

Το θέμα αυτό θα μας απασχολήσει και στη συνέχεια, στην εξέταση επαρκών συνόλων συνδέσμων και κανονικών μορφών, βλ.§§2.6.1, 2.6.2.

- **Σύμβαση για την απλούστευση της γραφής**

Η τυπική ή φορμαλιστική γλώσσα για την Προτασιακή Λογική, είναι εξ' ορισμού μια γλώσσα που θα μπορούσαν να «διαβάζεται» από μια μηχανή. Η δυνατότητα αυτή υπάρχει και είναι δυνατή, εμείς όμως στην εισαγωγή αυτή απευθυνόμαστε σε ανθρώπους και όχι σε μηχανές. Είναι ανάγκη λοιπόν να προσαρμόσουμε την τυπική γλώσσα ώστε να αυξήσουμε την εκφραστικότητα και επικοινωνιακή δύναμη μεταξύ «ανθρώπων». Πέρα όμως από τη δυνατότητα της τυπικής γλώσσας, η οποία σε κάποια σημεία είναι κεφαλαιώδους σημασίας, προσπαθούμε εδώ να μειώσουμε την αυστηρότητά της, για να πετύχουμε το στόχο μας. Η τυπική γλώσσα λοιπόν είναι μια δυνατότητα, την οποία σχεδόν ποτέ δεν υλοποιούμε!

Για να κάνουμε πιο απλή λοιπόν τη γραφή των προτάσεων συμφωνούνε να παραβιάζουμε τις απαιτήσεις του ΑΟΠ ως εξής:

1) Εγκαταλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις. Έτσι αντί για $(\neg A), (A \wedge B)$, κτλ γράφουμε $\neg A, A \wedge B$, κτλ. Σημειώστε παρ' όλα αυτά ότι στον ΑΟΠ, όταν πάμε από το βήμα n στο βήμα $n+1$ οι παρενθέσεις γίνονται απαραίτητες στο βαθμό μάλιστα που έχουμε να κάνουμε με πολυσύνθετους τύπους. Αν βεβαίως συνεχίσουμε την κατασκευή για μερικά ακόμα βήματα, τότε οι παρενθέσεις είναι πρακτικά τελείως απαραίτητες.

2) Θεωρούμε ότι μερικοί σύνδεσμοι έχουν προτεραιότητα στην εφαρμογή τους σε σχέση με κάποιους άλλους, με τον ίδιο τρόπο που ο πολλαπλασιασμός έχει προτεραιότητα σε σχέση με την πρόσθεση σε μια αλγεβρική παράσταση.

Σχηματικά το διάγραμμα διάταξης των συνδέσμων, με κριτήριο την προτεραιότητα, είναι το ακόλουθο:

$$\begin{array}{c}\boxed{\neg}\\ | \\ \boxed{\wedge,\vee} \\ | \\ \boxed{\rightarrow,\leftrightarrow}\end{array}$$

Έτσι:

i) Η άρνηση $\neg$ έχει προτεραιότητα ως προς όλους τους άλλους συνδέσμους. Κατά συνέπεια η πρόταση $\neg A \wedge B$ σημαίνει $((\neg A) \wedge B)$ και όχι $(\neg(A \wedge B))$, καθώς και η $\neg A \rightarrow B$ σημαίνε $((\neg A) \rightarrow B)$ και όχι η $(\neg(A \rightarrow B))$ κτλ..

ii) Οι σύνδεσμοι $\wedge$ και $\vee$ έχουν προτεραιότητα ως προς τους άλλους δύο διμελείς συνδέσμους $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$. Κατά συνέπεια η πρόταση $A \wedge B \rightarrow \Gamma$ είναι η $((A \wedge B) \rightarrow \Gamma)$ και όχι η $(A \wedge (B \rightarrow \Gamma))$, καθώς και η $A \vee B \leftrightarrow \Gamma \wedge A$ είναι η $((A \vee B) \leftrightarrow (\Gamma \wedge A))$ και όχι η $(A \vee (B \leftrightarrow (\Gamma \wedge A)))$, ούτε η $(A \vee (B \leftrightarrow \Gamma) \wedge A)$ κτλ..

iii) Πολλές φορές για να είναι εύκολα αναγνώσιμη μια πρόταση ενδεχόμενα να κρατάμε κάποιες παρενθέσεις, όπως στην $(\neg A \wedge B) \rightarrow A$.

2.3 Οι Λογικοί Σύνδεσμοι

Οι λογικοί σύνδεσμοι είναι απλά σύμβολα χωρίς καμμία σημασία, η δε συντακτική συμπεριφορά τους δίδεται από τον ΑΟΠ, βλ. σελ. 28. Έχοντας όμως μια σημασιολογία, δηλαδή μια απονομή αλήθειας $\alpha : \Pi_0 \longrightarrow \{0, 1\}$ και την μοναδικά επαγόμενη εκτίμηση αληθείας $u_\alpha : \Pi \longrightarrow \{0, 1\}$, η λογικοί σύνδεσμοι μπορούν να έχουν και αυτοί μια ερμηνεία, να καθορίζονται δηλαδή από τις συναρτήσεις α και u_α. Έτσι αν αντικαταστήσουμε την συνάρτηση (τύπο) $\varphi : \Pi^n \longrightarrow \Pi$ στη σχέση της σελ. 44, με $\square : \Pi^2 \longrightarrow \Pi$ και

$\neg\Pi \longrightarrow \Pi$ αντίστοιχα έχουμε τα ακόλουθα διαγράμματα, που φανερώνουν πως οι λογικοί σύνδεσμοι, $\square, \neg, \quad \square \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$ καθορίζονται από τους αντίστοιχους λογικούς συνδέσμους $\square_2, \neg_2, \quad \square_2 \in \{\wedge_2, \vee_2, \longrightarrow_2, \longleftrightarrow_2\}$

$$\begin{tikzcd}
\Pi_0^2 \arrow[r, "\square"] \arrow[d, "\alpha^2"'] \arrow[dr, dotted] & \Pi \arrow[d, "v_\alpha"] \\
2^n \arrow[r, "\square_2"'] & 2
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
(A_1, A_2) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (A_1 \square A_2) \arrow[d, mapsto] \\
(\alpha(A_1), \alpha(A_2)) \arrow[r, mapsto] & \begin{array}{c} v_\alpha((A_1 \square A_2)) = \\ = (\alpha(A_1) \square_2 \alpha(A_2)) \end{array}
\end{tikzcd}$$

και,

$$\begin{tikzcd}
\Pi_0 \arrow[r, "\neg"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, dotted] & \Pi \arrow[d, "v_\alpha"] \\
2 \arrow[r, "\neg_2"'] & 2
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\neg A) \arrow[d, mapsto] \\
\alpha(A) \arrow[r, mapsto] & \begin{array}{c} v_\alpha(\neg A) = \\ = \neg_2 \alpha(A) \end{array}
\end{tikzcd}$$

Ας δούμε τώρα κάθε λογικό σύνδεσμο ξεχωριστά.

• **Η άρνηση** $(\neg)$:

Η άρνηση ως μονομελής σύνδεσμος παίρνει μια πρόταση και τη στέλνει στην άρνησή της :

$$\neg : \Pi \to \Pi \;/\!\!/\; \sigma \mapsto \neg\sigma$$

Αυτό σημαίνει ότι αν μια πρόταση είναι αληθής η άρνησή της είναι ψευδής, και αν είναι ψευδής, η άρνησή της είναι αληθής.

Ο πίνακάς της είναι:

σ	$\neg\sigma$
0	1
1	0

ή και

$v(\sigma)$	$v(\neg\sigma) = \neg_2 v(\sigma)$
0	1
1	0

• **Η σύζευξη** $(\wedge)$:

Η σύζευξη είναι ένας διμελής σύνδεσμος ο οποίος παίρνει ένα ζεύγος από προτάσεις και το στέλνει σε μια νέα πρόταση, είναι δηλαδή μια διμελής πράξη μέσα στο Π:

$$\wedge : \Pi \times \Pi \to \Pi \;/\!\!/\; (\sigma, \tau) \mapsto (\sigma \wedge \tau)$$

Η νέα αυτή πρόταση, η $(\sigma \wedge \tau)$, **είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο συμβαλλόμενες προτάσεις είναι αληθείς**.

Ο πίνακας της σύζευξης είναι:

σ	τ	$\sigma \wedge \tau$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ή και

$v(\sigma)$	$v(\tau)$	$v(\sigma \wedge \tau) := v(\sigma) \wedge_2 v(\tau)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

• **Η διάζευξη** ($\vee$):

Η διάζευξη είναι επίσης ένας διμελής σύνδεσμος ο οποίος παίρνει ένα ζεύγος από προτάσεις και το στέλνει σε μια νέα πρόταση, είναι δηλαδή και αυτός μια διμελής πράξη μέσα στο Π:

$$\vee : \Pi \times \Pi \ \rightarrow \ \Pi \ \not\parallel \ (\sigma, \tau) \mapsto (\sigma \vee \tau)$$

Η νέα αυτή πρόταση, η $(\sigma \vee \tau)$, **είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο συμβαλλόμενες προτάσεις είναι ψευδείς**.

Ο πίνακας της διάζευξης είναι:

σ	τ	$\sigma \vee \tau$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ή και

$v(\sigma)$	$v(\tau)$	$v(\sigma \vee \tau) = v(\sigma) \vee_2 v(\tau)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

• **Η συνεπαγωγή** ($\rightarrow$) :

Η συνεπαγωγή είναι ένας ακόμα διμελής σύνδεσμος ο οποίος παίρνει ένα ζεύγος από προτάσεις και το στέλνει σε μια νέα πρόταση, είναι δηλαδή και αυτός μια διμελής πράξη μέσα στο Π

$$\rightarrow : \Pi \times \Pi \longrightarrow \Pi \ \not\parallel \ (\sigma, \tau) \mapsto (\sigma \ \rightarrow \ t)$$

Η νέα αυτή πρόταση, η $(\sigma \ \rightarrow \ t)$, **είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές.**

Ο πίνακας της συνεπαγωγής είναι:

σ	τ	$\sigma \ \rightarrow \ \tau$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ή και

$v(\sigma)$	$v(\tau)$	$v(\sigma \ \rightarrow \ \tau) := v(\sigma) \rightarrow_2 v(\tau)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

• **Η δισυνεπαγωγή** [1] ($\leftrightarrow$) :

Η δισυνεπαγωγή είναι ένας διμελής σύνδεσμος ο οποίος παίρνει ένα ζεύγος από προτάσεις και το στέλνει σε μια νέα πρόταση , είναι δηλαδή και αυτός μια διμελής πράξη επί του Π:

$$\leftrightarrow : \Pi \times \Pi \longrightarrow \Pi \;/\!\!/\; (\sigma, \tau) \mapsto (\sigma \leftrightarrow \tau)$$

Η νέα αυτή πρόταση, η $(\sigma \leftrightarrow \tau)$, **είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που οι δύο συμβαλλόμενες προτάσεις είναι ή και οι δύο αληθείς, ή και οι δύο ψευδείς**.

Ο πίνακας της δισυνεπαγωγής είναι:

σ	τ	$\sigma \leftrightarrow \tau$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ή και

$v(\sigma)$	$v(\tau)$	$v(\sigma \leftrightarrow \tau) := v(\sigma) \leftrightarrow_2 v(\tau)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Μπορούμε να συνοψίσουμε τους πίνακες των κυριότερων συνδέσμων στον:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

Παρατηρούμε ότι οι λογικοί σύνδεσμοι επάγουν αντίστοιχες πράξεις ή συνδέσμους επί του 2. Ακριβέστερα έχουμε,

► **Πράξεις επί του 2.**

Οι πράξεις $\neg_2, \wedge_2, \vee_2, \rightarrow_2, \leftrightarrow_2$ ορίζονται επί του $\{0,1\}$, κατ' αναλογία των $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ και $\leftrightarrow$ ως εξής:

Για την $\neg_2$:

$$\begin{array}{rccc} \neg_2 : & \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & 0 & \mapsto & 1 \\ & 1 & \mapsto & 0 \end{array}$$

ή και

x	0	1
$\neg x$	1	0

[1] Αποδίδουμε έτσι το Αγγλικό όρο biconditional. Χρησιμοποιείται επίσης και ο όρος «ισοδυναμία» ή και «αμφίδρομη ή διπλή συνεπαγωγή» αντί του όρου «δισυνεπαγωγή.» Επειδή υπάρχει και η μεταγλωσσική «ισοδυναμία» $\equiv$ ο όρος «ισοδυναμία» μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση.

Για την $\vee_2$:

$$\begin{array}{rccc} \vee_2 : & \{0,1\}\times\{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 1 \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \end{array}$$

ή και

$\vee_2$	0	1
0	0	1
1	1	1

Για την $\wedge_2$:

$$\begin{array}{rccc} \wedge_2 : & \{0,1\}\times\{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 0 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \end{array}$$

ή και

$\wedge_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

Για την $\rightarrow_2$:

$$\begin{array}{rccc} \rightarrow_2 : & \{0,1\}\times\{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (0,0) & \mapsto & 1 \\ & (0,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \end{array}$$

ή και

$\rightarrow_2$	0	1
0	1	1
1	0	1

Για την $\leftrightarrow_2$:

$$\begin{array}{rccc} \leftrightarrow_2 : & \{0,1\}\times\{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (0,0) & \mapsto & 1 \\ & (0,1) & \mapsto & 0 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \end{array}$$

ή και

$\leftrightarrow_2$	0	1
0	1	0
1	0	1

Διαφορετικά θα μπορούσανε να παραστήσουμε τις διμελείς πράξεις επι του 2 και ως:

		$A\Box_2 B$			
A	B	$\wedge_2$	$\vee_2$	$\rightarrow_2$	$\leftrightarrow_2$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

2.3.1 Παράδειγμα. Θα κατασκευάσουμε τώρα τον αληθοπίνακα των προτάσεων,

$$(\neg A \land B) \to A \quad \text{και} \quad \neg B \land ((A \lor \neg B) \leftrightarrow (A \land B)).$$

Οι συμβαλλόμενες προτάσεις είναι οι: $A, B, \neg A, (\neg A \land B)$, και $A, B, \neg B, (A \lor \neg B), (A \land B)$ αντίστοιχα. Για συντομία θα κατασκευάσουμε και τους δύο αληθοπίνακες σε ένα: Έστω $\phi_1 := (A \lor \neg B) \leftrightarrow (A \land B), \phi_2 := (\neg A \land B) \to A, \phi_3 := \neg B \land ((A \lor \neg B) \leftrightarrow (A \land B))$, τότε,

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \land B$	$A \lor \neg B$	$A \land B$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0

Παρατηρώντας τον παραπάνω αληθοπίνακα διαπιστώνουμε εύκολα ότι υπάρχουν προτάσεις που είναι πάντα ψευδείς για οποιεσδήποτε απονομές αλήθειας, δηλ. οποιεσδήποτε αληθοτιμές και να αποδοθούν στα προτασιακά σύμβολα που την απαρτίζουν. Μια τέτοια πρόταση είναι η $\varphi_3 := \neg B \land ((A \lor \neg B) \leftrightarrow (A \land B))$ στο παραπάνω παράδειγμα. Επίσης υπάρχουν προτάσεις που είναι πάντα αληθινές όπως είναι η $\neg\varphi_3$. Υπάρχουν τέλος προτάσεις που για κάποιες απονομές τιμών στα προτασιακά τους σύμβολα είναι αληθείς ενώ για κάποιες άλλες είναι ψευδείς, όπως είναι η φ_2 . Οι κατηγορίες αυτές των προτάσεων αντανακλώνται στον ακόλουθο ορισμό.

2.3.2 Ορισμός. **i)** Αν για μια απονομή τιμών στα προτασιακά σύμβολα μιας πρότασης, η αντίστοιχη εκτίμηση αλήθειας κάνει την πρόταση αληθινή, τότε λέμε ότι η συγκεκριμένη εκτίμηση αλήθειας **επαληθεύει** την πρόταση, ενώ όταν την κάνει ψευδή λέμε ότι την **διαψεύδει**.

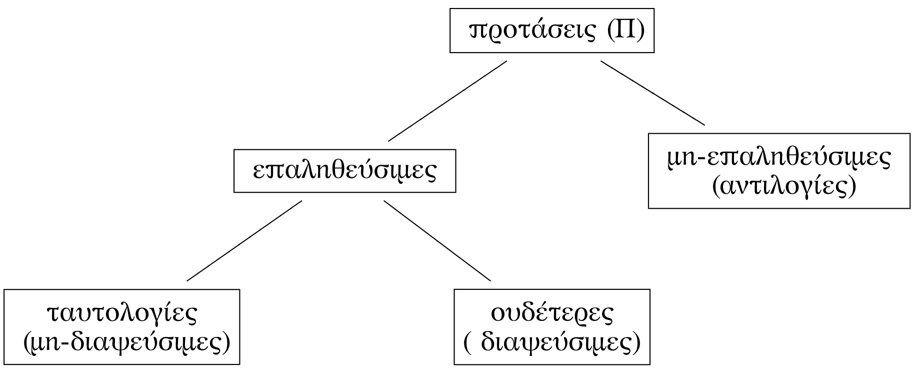
ii) Αν για μια πρόταση υπάρχει μια εκτίμηση αλήθειας που την επαληθεύει, τότε η πρόταση λέγεται **επαληθεύσιμη**, ενώ αν για μια πρόταση υπάρχει μια εκτίμηση αλήθειας που την διαψεύδει, τότε η πρόταση λέγεται **διαψεύσιμη**.

iii) Αν για κάθε απονομή τιμών στα προτασιακά σύμβολα μιας πρόταση σ, η αντίστοιχη εκτίμηση αλήθειας την επαληθεύει, τότε η σ, λέγεται **λογικά αληθής** ή **ταυτολογία** και συμβολίζεται με $\top$. (Με $\top$ θα συμβολίζουμε και την κλάση ισοδυναμίας του συνόλου των ταυτολογιών, ως προς τη σχέση $\equiv$, που θα ορίσουμε αργότερα).

iv) Αν μια πρόταση σ, για κάθε εκτίμηση παίρνει την αληθοτιμή 0 λέγεται **λογικά ψευδής** ή **αντιλογία** και συμβολίζεται με $\perp$ (Με $\perp$ θα συμβολίζουμε και την κλάση ισοδυναμίας του συνόλου των ταυτολογιών, ως προς τη σχέση $\equiv$, που θα ορίσουμε αργότερα).

v) Αν μια πρόταση δεν είναι ούτε ταυτολογία, ούτε αντιλογία, τότε λέγεται **ουδέτερη**.

Ένα διάγραμμα ταξινόμησης των προτάσεων με βάση τους παραπάνω ορισμούς είναι:



Στον προηγούμενο αληθοπίνακα η απονομή τιμών $(1,1)$ επαληθεύει την $(A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B)$, ενώ διαψεύδει την $\neg B \wedge ((A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B))$.

Μπορούμε ακόμα να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν προτάσεις, (όπως είναι η $(A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B)$ και η B) οι οποίες επαληθεύονται και διαψεύδονται από τις ίδιες ακριβώς απονομές τιμών.

2.3.3 Ορισμός. Δύο προτάσεις σ_1 και σ_2 λέγονται **λογικά ισοδύναμες**, συμβολικά $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ αν και μόνον αν (ανν) η πρόταση $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ είναι μια ταυτολογία ανν $\sigma_1 \models \sigma_2 \quad \& \quad \sigma_2 \models \sigma_1$, δηλαδή για κάθε εκτίμηση αλήθειας παίρνουν την ίδια αληθοτιμή, (έχουν δηλαδή τον ίδιο πίνακα αλήθειας).

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι η σχέση $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου των προτάσεων Π. Θεωρούμε επομένως την σχέση $\equiv$ ως ένα είδος «ισότητας». Πράγματι στο σύνολο-πηλίκο $\Pi/\!\equiv$ αυτή γίνεται ισότητα μεταξύ των αντιστοίχων κλάσεων ισοδυναμίας.

Στον προηγούμενο αληθοπίνακα είδαμε ότι:

$$(A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B) \equiv B \tag{1}$$

Αν στη σχέση (1) το σύμβολο $\equiv$ αντικατασταθεί από το $\leftrightarrow$ τότε γίνεται πρόταση και μάλιστα ταυτολογία:

$$((A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B)) \leftrightarrow B \tag{2}$$

Η διαφορά των (1) και (2) είναι ότι η (2) είναι μια πρόταση του λογισμού των προτάσεων κατασκευασμένη (γραμμένη) σύμφωνα με τον Αναδρομικό Ορισμό των Προτάσεων, ανήκει δηλαδή στη **γλώσσα** της προτασιακής λογικής, στη γλώσσα δηλαδή που είναι αντικείμενο της μελέτης μας. Αντίθετα η (1) είναι ένας βολικός συμβολισμός για να συμβολίζουμε το γεγονός ότι οι προτάσεις $((A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B))$ και B είναι λογικά ισοδύναμες. Πρόκειται για μια φράση της γλώσσας που χρησιμοποιούμε για να επικοινωνήσουμε και να συνεννοηθούμε μεταξύ μας, που τη λέμε **μεταγλώσσα**.

2.4 Ορισμένες χρήσιμες λογικές ισοδυναμίες

Οι πιο κάτω λογικές ισοδυναμίες είναι χρήσιμες στην πρακτική της λογικής, αλλά συλλαμβάνουν και εκφράζουν και ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες των λογικών συνδέσμων:

1) $A \wedge A \equiv A$, $\quad A \vee A \equiv A$ (ο $\wedge$ και ο $\vee$ είναι ταυτοδύναμοι ή έχουν την ανακλαστική ιδιότητα.)

2) $A \wedge B \equiv B \wedge A$, $A \vee B \equiv B \vee A$, $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$, ($\wedge$, ο $\vee$ και ο $\leftrightarrow$ είναι αντιμεταθετικοί).

3) $(A \wedge B) \wedge \Gamma \equiv A \wedge (B \wedge \Gamma)$, $(A \vee B) \vee \Gamma \equiv A \vee (B \vee \Gamma)$, (προσαιτετικότητα του $\wedge$ και του $\vee$)

4) $(A \wedge B) \vee \Gamma \equiv (A \vee \Gamma) \wedge (B \vee \Gamma)$, (ο $\vee$ είναι επιμεριστικός ως προς τον $\wedge$)

5) $(A \vee B) \wedge \Gamma \equiv (A \wedge \Gamma) \vee (B \wedge \Gamma)$, (ο $\wedge$ επιμεριστικός ως προς τον $\vee$)

6) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (απορροφητικοί νόμοι ή απλοποίησης)

7) $\neg\neg A \equiv A$ (Νόμος της Διπλής Άρνησης)

8) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (οι νόμοι του De Morgan)

9) $\neg A \wedge A \equiv \bot$ και $\neg A \vee A \equiv \top$

10) $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$, (ο νόμος της αντιθετοαντιστροφής)

11) $A \leftrightarrow B \equiv \neg A \leftrightarrow \neg B$ «αν δύο προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες τότε συμβαίνει το ίδιο και με τις αρνήσεις τους)

12) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ (έκφραση της συνεπαγωγής με τη βοήθεια των $\neg$ και $\vee$)

13) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (έκφραση της δισυνεπαγωγής (διπλής συνεπαγωγής) με τη βοήθεια των $\rightarrow$ και $\wedge$)

14) $A \leftrightarrow B \equiv \neg A \leftrightarrow \neg B$

Αν στις παραπάνω εκφράσεις το σύμβολο $\equiv$ που ανήκει στη μεταγλώσσα αντικατασταθεί από το σύμβολο της γλώσσας $\leftrightarrow$, τότε όλες οι σχέσεις γίνονται προτάσεις και μάλιστα ταυτολογίες. Οι ταυτολογίες αυτές αποτελούν τους νόμους της προτασιακής λογικής και μπορούν να εκφραστούν μόνο με τη γλώσσα της προτασιακής λογικής.

Αφήνουμε την απόδειξη των ιδιοτήτων αυτών ως άσκηση.

2.4.1 Σχόλιο. Μια δομή $\langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) έως (9), όπου $0 \equiv \bot$ και $1 \equiv \top$ λέγεται **άλγεβρα του Boole**. Για παράδειγμα αν επί του συνόλου των προτάσεων Π θεωρήσουμε την σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ και θέσουμε,

$$1 := \top/\equiv, \quad 0 := \bot/\equiv \quad , \neg(\varphi/\equiv) := (\neg\varphi)/\equiv \quad \text{και}$$
$$(\varphi/\equiv) \wedge (\psi/\equiv) := (\varphi \wedge \psi)/\equiv, \quad (\varphi/\equiv) \vee (\psi/\equiv) := (\varphi \vee \psi)/\equiv,$$

τότε η δομή $\langle \Pi/\equiv, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ είναι μια άλγεβρα Boole, γνωστή ως Lindenbaum-Tarski άλγεβρα της Προτασιακής λογικής. Μια άλλη πολύ γνωστή άλγεβρα Boole είναι η δυναμοάλγεβρα $\langle \mathscr{P}(X), \cap, \cup, (\cdot)^c, \emptyset, X\rangle$, με τις γνωστές ιδιότητες των συνόλων, που αντιστοιχούν στις ιδιότητες (1)−(9), ως αξιώματα, και τέλος η τετριμμένη άλγεβρα Boole $\langle\{0,1\}, \wedge_2, \vee_2, \neg_2, 0, 1\rangle$ που έχουμε ήδη ορίσει.

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι τα αξιώματα της άλγεβρας Boole (ιδιότητες (1)-(9)) συλλαμβάνουν και ορίζουν έμμεσα τους λογικούς συνδέσμους $\wedge, \vee, \neg, 0, 1$ όπου οι $0, 1$ θεωρούνται μηδενικομελείς λογικοί σύνδεσμοι.

Σχετική είναι και η άποψη του Hilbert για τον έμμεσο ορισμό των αρχικών εννοιών μέσω των σχέσεών τους που αποκρυσταλλώνονται στα ίδια τα αξιώματα. «Αυτό που μπορούμε μόνο να κάνουμε είναι να προσδιορίσουμε τις αμοιβαίες *σχέσεις* των αρχικών εννοιών (δηλ. της δομής τους) μέσω των αξιωμάτων, δίνοντας έτσι έναν έμμεσο ορισμό των αρχικών εννοιών». Η άποψη του Φρεγε είναι ότι, τα αξιώματα στην ουσία δρουν ως «εξισώσεις» όπου οι άγνωστοι είναι οι αρχικές, χωρίς ορισμό, έννοιες.

Ένα αξιωματικό σύστημα, παρ' όλο που οικοδομήθηκε έχοντας κατά νου μια συγκεκριμένη δοσμένη πραγματικότητα, είναι δυνατόν να αναφέρεται και σε όλα τα συστήματα αντικειμένων που ικανοποιούν τα αξιώματα! τις περισσότερες φορές υπάρχουν μη-συμβατικές πραγματικότητες που αποτελούν μοντέλα της θεωρίας μας. *Οτιδήποτε* μπορεί να παίξει τον ρόλο των μη-ορίσιμων αρχικών εννοιών, στο βαθμό που ικανοποιούνται τα αξιώματα. Ο Otto Blumenthal αναφέρει ότι, σε μια συζήτηση σε έναν Βερολινέζικο σιδηροδρομικό σταθμό το 1891, ο Hilbert είχε πει ότι, σε μια κατάλληλη αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας «θα μπορούσε κανείς να θεωρεί αντί των «σημείων, ευθειών γραμμών, και επιπέδων», «τραπέζια, καρέκλες, και ποτήρια μπύρας».

Η Lindenbaum-Tarski άλγεβρα συλλαμβάνει με αλγεβρικό τρόπο όλες τις βασικές ιδιότητες της προτασιακής λογικής.

2.4.2 Παράδειγμα. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω προτάσεις:

(i) $(A \to (B \leftrightarrow \neg A \vee B)) \vee A$

(ii) $(((A \to B) \wedge (B \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)) \leftrightarrow \Delta$

Λύση

(i) $(A \to (B \leftrightarrow \neg A \vee B)) \vee A \equiv \neg A \vee (B \leftrightarrow \neg A \vee B) \vee A \equiv (\neg A \vee A) \vee (B \leftrightarrow \neg A \vee B) \equiv \neg A \vee A \equiv \top$

(ii) Έστω $I := (((A \to B) \wedge (B \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma))$, τότε,

$$\begin{aligned} I &\equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \Gamma)) \vee (\neg A \vee \Gamma) \\ &\equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg \Gamma) \vee (\neg A \vee \Gamma) \quad \text{(De Morgan, κ.λπ.)} \\ &\equiv (B \vee \neg B \vee \neg A \vee \Gamma) \wedge (\neg \Gamma \vee \neg B \vee \neg \Gamma) \\ &\equiv [(B \vee \neg B) \vee (\neg A \vee \Gamma)] \vee [(\neg \Gamma \vee \Gamma) \vee (\neg B \vee \neg A)] \\ &\equiv [\top \vee (\neg A \vee \Gamma)] \wedge [\top \vee (\neg B \vee \neg A)] \\ &\equiv \top \wedge \top \equiv \top \end{aligned}$$

Έτσι $I \leftrightarrow \Delta \equiv \Delta$ αφού $\top \leftrightarrow \Delta \equiv (\bot \vee \Delta) \wedge (\neg \Delta \vee \top) \equiv \Delta \wedge \top \equiv \Delta$.

Άρα $(\neg B \vee B) \leftrightarrow \Delta \equiv \Delta$ αφού $\top \leftrightarrow \Delta \equiv \Delta$. ⊣

2.4.3 Ασκήσεις. **1)** Στις ιδιότητες των λογικών συνδέσμων που δίνονται στην παράγραφο 1.4, αντικαταστήστε το σύμβολο $\equiv$ από το $\leftrightarrow$ και αποδείξτε ότι όλες οι προτάσεις που προκύπτουν είναι ταυτολογίες.

2) Εξετάστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις και απαντήστε αν είναι ταυτολογία αντιλογία ή ουδέτερη.

i) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \to B)$

ii) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$

iii) $(A \vee B) \leftrightarrow ((A \to B) \to B$

iv) $(A \wedge (\neg A \vee B)) \leftrightarrow A$

v) $(A \to (B \to A)) \to (B \wedge \neg B)$

vi) $\neg A \to (A \to B)$

vii) $(A \vee (\neg A \wedge B)) \leftrightarrow (A \vee B)$

3) Εξετάστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις και απαντήστε αν είναι ταυτολογία αντιλογία ή ουδέτερη.

i) $A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee (\ldots A_n))) \leftrightarrow (A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee (\ldots A_n)$

ii) $A_1 \wedge (A_2 \wedge (A_3 \wedge ((\ldots A_n))) \leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge (\ldots A_n)$.

iii) $(A \to B) \to \Gamma \leftrightarrow A \to (B \to \Gamma)$ (είναι προσεταιριστική η $\to$ ως πράξη;)

iv) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \Gamma \leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \Gamma)$ (είναι προσεταιριστική η $\leftrightarrow$ ως πράξη;)

4) Εξετάστε τις παρακάτω προτάσεις, και:

a) Για όσες απ' αυτές είναι ταυτολογίες αφού δώσετε απόδειξη, περιγράψτε με λόγια την ιδιότητα που εκφράζει.

b) Για όσες δεν είναι ταυτολογίες προσδιορίστε τι είναι.

i) $(A \to B) \wedge (A \to B') \leftrightarrow A \to (B \wedge B')$

ii) $(A \to B) \wedge (A' \to B) \leftrightarrow (A \vee A') \to B$
iii) $(A \to B) \vee (A \to B') \leftrightarrow A \to (B \vee B')$
iv) $(A \to A') \leftrightarrow ((A \wedge B) \to (A' \wedge B))$
v) $(A \to A') \leftrightarrow ((A \vee B) \to (A' \vee B))$
vi) $(A \wedge (B \to G)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to (A \wedge G))$
vii) $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow G)) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow) \leftrightarrow G)$
viii) $((A \to B) \vee (A' \to B)) \leftrightarrow ((A \wedge A') \to B)$
ix) $(A \to (B \to G)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to G)$
x) $(A \to (B \to (G \to D))) \leftrightarrow ((A \wedge B \wedge G) \to D)$

2.5 Ορισμένοι άλλοι τρόποι Εύρεσης της Αληθοτιμής μιας Πρότασης

Εκτός από τη δυνατότητα των αληθοπινάκων, είτε των μικρών αληθοπινάκων με τη βοήθεια των συντακτικών δέντρων είτε όχι, είναι δυνατόν, θεωρώντας τους λογικούς συνδέσμους ως πράξεις και αξιοποιώντας τις ιδιότητές τους, να μετασχηματίζουμε μια πρόταση μέχρι να γίνει προφανής η αληθοτιμή της. Με άλλα λόγια εκτελούμε πράξεις. Ένας μικρός αριθμός ιδιοτήτων που μας χρειάζονται, στην περίπτωση αυτή, για να πραγματοποιούμε τις πράξεις αυτές με σχετική άνεση είναι οι εννέα πρώτες της παραγράφου 2.4, δηλαδή τα αξιώματα της δομής της άλγεβρας Boole.

2.5.1 Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε την 10) και την 11) της παραγράφου 2.4 ως παράδειγμα:

α) Για τη 10 έχουμε ότι $A \to B \equiv \neg A \vee B$ από την (8) $\equiv B \vee (\neg A)$ από την αντιμεταθετικότητα του $\vee$ (2) $\equiv \neg(\neg B) \vee (\neg A)$ από το νόμο της διπλής άρνησης (7) $\equiv \neg B \to \neg A$ από την (8) ξανά. ⊣□

β) Για την 11 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
A \leftrightarrow B &\equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \quad \text{από την (12)} \\
&\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \quad \text{από την (8)} \\
&\equiv (B \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \quad \text{από την αντιμ/τικότητα του } \vee \text{ (2)} \\
&\equiv [(\neg(\neg B)) \vee (\neg A)] \wedge [(\neg(\neg A)) \vee (\neg B)] \quad \text{από την (7)} \\
&\equiv [(\neg B) \to (\neg A)] \wedge [(\neg A) \to (\neg B)] \quad \text{από την (8)} \\
&\equiv (\neg A) \leftrightarrow (\neg B) \quad \text{από την (12)} \quad \dashv\blacksquare
\end{aligned}$$

2.5.2 Δοκιμασία με Βραχείς Πίνακες Αληθείας. Είναι πολλές φορές χρήσιμο να γνωρίζουμε αν μια πρόταση είναι ή όχι ταυτολογία, όταν και οι αληθοπίνακες και οι πράξεις είναι χρονοβόρες και δύσχρηστες. Για να δείξουμε π.χ. ότι μια πρόταση είναι διαψεύσιμη, το μόνο που χρειάζεται είναι ένα απλό αντιπαράδειγμα, δηλ. μια συγκεκριμένη απονομή αληθείας. Πολλές φορές είναι δυνατόν να παράγουμε αυτό το αντιπαράδειγμα αντιστρέφοντας τη διαδικασία κατασκευής ενός αληθοπίνακα. Αντί να αρχίσουμε από την απονομή τιμών αλήθειας στις ατομικές προτασιακές μεταβλητές, και στη συνέχεια εργαζόμενοι από τα μέσα προς τα έξω να καθορίσουμε την τιμή αλήθειας της πρότασης, αρχίζουμε απονέμοντας μια τιμή αλήθειας στην συνολική πρόταση και στη συνέχεια εργαζόμενοι από τα έξω προς τα μέσα να προσπαθήσουμε να καθορίσουμε την κατάλληλη απονομή αλήθειας που θα μας έδινε την επιλεγείσα τιμή αλήθειας για την πρόταση. Ας δούμε όμως μερικά παραδείγματα που θα διαφωτίσουν τον τρόπο εργασίας της μεθόδου.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι το ακόλουθο επιχείρημα είναι ασυνεπές.

1. $A \to B$ και ισχύει η B τότε έχουμε την A. Χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπο απάγωγη. Θα υποθέσουμε ότι οι υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Έστω δηλαδή $A \underset{1}{\to} B \quad \& \quad \underset{1}{B}$ και $\underset{0}{A}$. Θα πρέπει όμως να είμαστε συνεπείς με τις απονομές μας. Από τι στιγμή που έχουμε απονείμει π.χ. την αληθοτιμή 1 στην προτασιακή μεταβλητή B θα πρέπει να κάνουμε το ίδιο για κάθε εμφάνιση του B. Έτσι έχουμε: $\underset{0}{A} \underset{1}{\to} \underset{1}{B}$ και $\underset{1}{B}$, τότε $\underset{0}{A}$, δηλαδή έχουμε κατασκευάσει ένα αντιπαράδειγμα για τον αρχικό ισχυρισμό.

2. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε και για την απόδειξη ότι μια πρόταση είναι ταυτολογία. Ας εξετάσουμε την $(A \to (A \vee B)$ αν είναι ή όχι ταυτολογία. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια απονομή τιμών που διαψεύδει την πρόταση. Επισυνάπτουμε λοιπόν την τιμή 0 στην πρόταση, συγκεκριμένα στο σύνδεσμο που χρησιμοποιήθηκε κατά το τελευταίο βήμα της κατασκευής της (τελικό σύνδεσμο), και ακολουθώντας μια κατεύθυνση από τα έξω-προς-τα μέσα προσπαθούμε να συνάγουμε τις τιμές αλήθειας για τις προτασιακές μεταβλητές, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την απονομή που υποθέσαμε ότι υπάρχει. Αν πέσουμε σε αντίφαση τότε τέτοια απονομή δεν υπάρχει και η πρόταση είναι ταυτολογία.

   Ας παρακολουθήσουμε τη διαδικασία αυτή, εξετάζοντας τη πρόταση $A \to (A \vee B)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει απονομή τιμών που την διαψεύδει και γράφουμε την αληθοτιμή 0 κάτω από τον τελικό (κεντρικό) σύνδεσμο $\rightarrow$:

$$A \underset{0}{\rightarrow} (A \vee B)$$

Γνωρίζουμε από τον αντίστοιχο αληθοπίνακα ότι μόνο σε μια περίπτωση η συνεπαγωγή είναι ψευδής, όταν η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές:

$$\underset{1}{A} \underset{0}{\rightarrow} \underset{0}{(A \vee B)}$$

Θέτουμε την τιμή της προτασιακής μεταβλητής A παντού όπου αυτή εμφανίζεται:

$$\underset{1}{A} \underset{0}{\rightarrow} (\underset{1}{A} \underset{0}{\vee} B)$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι η αληθοτιμή της $A \vee B$ γίνεται 1 που είναι άτοπο, άρα δεν υπάρχει απονομή τιμών που να διαψεύδει την $A \rightarrow (A \vee B)$ επομένως είναι ταυτολογία.

3. Ας εξετάσουμε τώρα την $(A \vee B) \rightarrow A$:

   1ο Βήμα: $(A \vee B) \underset{0}{\rightarrow} A$

   2ο Βήμα: $(A \underset{1}{\vee} B) \underset{0}{\rightarrow} \underset{0}{A}$

   3ο Βήμα: $(\underset{0}{A} \underset{1}{\vee} B) \underset{0}{\rightarrow} \underset{0}{A}$

   4ο Βήμα: $(\underset{0}{A} \underset{1}{\vee} \underset{1}{B}) \underset{0}{\rightarrow} \underset{0}{A}$

   Η απονομή τιμών που διαψεύδει την $(A \vee B) \rightarrow A$ είναι η $(0, 1)$, δεν υπάρχει λοιπόν αντίφαση και η πρόταση δεν είναι ταυτολογία. Ενδέχεται όμως να είναι αντιλογία. Αν επιθυμούμε να εξετάσουμε το ενδεχόμενο αυτό δεν έχουμε παρά να εξετάσουμε, με την ίδια ακριβώς διαδικασία, αν υπάρχει απονομή τιμών που να επαληθεύει την πρόταση και να καταλήγει σε άτοπο.

2.5.3 Αλγεβρικός τρόπος διερεύνησης της αληθοτιμής μιας πρότασης. Όπως έχουμε αναφέρει, βλ. το εδάφιο 2.4, η δομή της άλγεβρας του Boole, συλλαμβάνει τη συμπεριφορά των λογικών συνδέσμων $\wedge, \vee, \neg$. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1) – (9) ως αξιώματα και να απλοποιούμε ή να αποδεικνύουμε ισχυρισμούς για προτάσεις. Στο εδάφιο 2.4 χρησιμοποιήσαμε αυτές τις ιδιότητες για απλοποίηση παραστάσεων. Εδώ θα κάνουμε μια γενικότερη χρήση αυτών των ιδιοτήτων και των αλγεβρικών δομών της άλγεβρας του Boole και των δακτυλίων του Boole. Πριν προχωρήσουμε κρίνεται σκόπιμο να θυμηθούμε κάποιους σχετικούς με το εδάφιο ορισμούς.

Ένας **δακτύλιος** είναι μια αλγεβρική δομή $\langle R, +, \cdot, -, 0\rangle$ όπου «+» και «·» είναι διμελείς πράξεις, «−» είναι μονομελής και 0 μηδενικομελής πράξη, που ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

R1: $\langle R, +, -, 0\rangle$ είναι μια Αβελιανή ομάδα.

R2: $\langle R, \cdot\rangle$ είναι μια ημιομάδα, και ισχύουν και οι επιμεριστικές ιδιότητες ως προς τις πράξεις $+, \cdot$ δηλαδή,

R3: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)]$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x + y) \cdot z) = (x \cdot z) + (y \cdot z)]$

Ένας **δακτύλιος με μονάδα** είναι μια δομή $\langle R, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα (R1),(R2),(R3) και επιπλέον το: $(\forall x)[1 \cdot x = x \cdot 1 = x]$. Ένας δακτύλιος λέγεται **δακτύλιος Boole** ανν επί πλέον έχουμε: $(\forall x)[x^2 = x]$. Μεταξύ αλγεβρών Boole και δακτυλίων του Boole υπάρχει η ακόλουθη αντιστοιχία:
Θεώρημα του Stone (i) Έστω $B = \langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ μια άλγεβρα Boole. Ορίζουμε μια άλγεβρα $B_R = \langle B, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ όπου,

$$\begin{aligned} a + b &:= (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \\ a \cdot b &:= a \wedge b \quad \text{και} \\ -a &:= a. \end{aligned}$$

τότε η δομή B_R είναι ένας δακτύλιος του Boole.
(ii) Έστω $R = \langle R, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ ένας δακτύλιος του Boole. Ορίζουμε την άλγεβρα, $R_B = \langle R, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ όπου,

$$\begin{aligned} a \wedge b &:= a + b + a \cdot b \\ a \vee b &:= a \cdot b \quad \text{και} \\ a' &:= 1 + a. \end{aligned}$$

τότε η δομή R_B είναι μια άλγεβρα Boole.
(iii) Αν B, R είναι όπως πιο πάνω τότε,

$$B_{R_B} = B, \quad R_{B_R} = R.$$

Αξιοποιώντας τον ομομορφισμό μεταξύ $\langle \{0, 1\}, \neg_2, \wedge_2, \vee_2, \rightarrow_2, \leftrightarrow_2, 0, 1\rangle$ και του $\mathbb{Z}_2$, δηλαδή του $\{0, 1\}$ εφοδιασμένου με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μοδυλο 2, δηλαδή θεωρούμε τη δομή, $\langle \mathbb{Z}_2, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ως δακτύλιο (δακτύλιος Boole).

Είναι λοιπόν φανερό ότι ο σύνδεσμος της άρνησης μπορεί να αντικατασταθεί με τη βοήθεια της πρόσθεσης: $\neg A = 1 + A$ ενώ ο σύνδεσμος της σύζευξης από τον πολλαπλασιασμό:
$A \wedge B = AB$

Επειδή όμως το σύνολο συνδέσμων $\{\neg, \wedge\}$ είναι επαρκές, είναι φανερό ότι για κάθε σύνδεσμο μπορούμε να βρούμε ένα αντίστοιχο πολυώνυμο και γενικότερα για κάθε πρόταση του Π υπάρχει ένα αντίστοιχο πολυώνυμο. Ας δούμε ως παράδειγμα τα πολυώνυμα που αντιστοιχούν στους υπόλοιπους συνδέσμους του αλφάβητου:

$$\begin{aligned}
A \vee B &\equiv \neg((\neg A) \wedge (\neg B)) = 1 + (1 + A)(1 + B) = \\
&= 1 + (1 + A + B + AB) = A + B + AB \\
A \to B &\equiv \neg A \vee B = (1 + A) + B + (1 + A)B = \\
&= 1 + A + B + B + AB = 1 + A + AB \\
A \leftrightarrow B &\equiv (A \to B) \wedge (B \to A) = (1 + A + AB)(1 + B + AB) = \\
&= 1 + A + AB + B + AB + AB^2 + AB + A^2B + A^2B^2 = \\
&= 1 + A + B
\end{aligned}$$

Τελικά:

$$\begin{aligned}
A \vee B &= A + B + AB \\
A \to B &= 1 + A + AB \\
A \leftrightarrow B &= 1 + A + B
\end{aligned}$$

Αν λοιπόν θέλουμε να εξετάσουμε, μια πρόταση αρκεί αν γράψουμε το αντίστοιχο πολυώνυμο, και να εκτελέσουμε όλες τις δυνατές πράξεις. Αν το αποτέλεσμα είναι 1, η πρόταση είναι ταυτολογία, αν είναι 0 η πρόταση είναι αντιλογία, και αν το αποτέλεσμα εξαρτάτε από κάποιες προτασιακές μεταβλητές τότε η πρόταση είναι ουδέτερη.

2.5.4 Παράδειγμα. **1)** Η πρόταση $A \vee \neg A$ είναι ταυτολογία.

Πράγματι: $A \vee \neg A = A + (1 + A) + A(1 + A) = A + 1 + A + A + AA = 1 + A + A + A + A = 1$

2)

$$\begin{aligned}
(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \to B) &= (A + B + AB) \leftrightarrow (1 + (1 + A) + (1 + A)B) \\
&= (A + B + AB) \leftrightarrow (1 + 1 + A + B + AB) \\
&= (A + B + AB) \leftrightarrow (A + B + AB)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + (A + B + AB) + (A + B + AB) \\ &= 1 \end{aligned}$$

[Λύση 1:] Θα εξετάσουμε την πρόταση:
$I := ((A \to B) \wedge (\Gamma \to B) \to ((A \vee \Gamma) \to B))$

$$\begin{aligned} I &= ((1 + A + AB)(1 + \Gamma + \Gamma B) \\ &\qquad \to (1 + (A + \Gamma + A\Gamma) + (A + \Gamma + A\Gamma)B) \\ &= (1 + \Gamma + \Gamma B + A + A\Gamma + A\Gamma B + AB + AB\Gamma + AB\Gamma B) \\ &\qquad \to (1 + A + \Gamma + A\Gamma + AB + \Gamma B + A\Gamma B) \\ &= (1 + A + \Gamma + A\Gamma + AB + \Gamma B + A\Gamma B) \\ &\qquad \to (1 + A + \Gamma + A\Gamma + AB + \Gamma B + A\Gamma B) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $1 + A + \Gamma + A\Gamma + AB + \Gamma B + A\Gamma B = X$ έχουμε:

$$X \to X = 1 + X + XX = 1 + X + X = 1$$

Το αντίστροφο είναι εξίσου δυνατόν. Είναι δηλαδή δυνατόν αν εκφράσουμε τις αλγεβρικές πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης με τη βοήθεια ενός επαρκούς συνόλου συνδέσμων, για παράδειγμα του $\{\neg, \wedge, \vee\}$:

$$\begin{aligned} AB &= A \wedge B \\ A + B &= (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \\ &= (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \\ &:= A \vartriangle B \quad \text{(συμμετρική διαφορά)} \end{aligned}$$

$$1 = A \vee \neg A \qquad \text{και} \qquad 0 = A \wedge \neg A$$

Επίσης έχουμε $A \vartriangle B \equiv \neg[(A \to B) \wedge (B \to A)]$ ή ακόμη $A \vartriangle B \equiv A \nleftrightarrow B$ δηλαδή ως λογική πράξη η συμμετρική διαφορά δεν είναι άλλη από την άρνηση της λογικής ισοδυναμίας δηλαδή το αποκλειστικό *ή*.

2.5.5 Σχόλιο. Στις πιο πάνω ισότητες τίθεται το ερώτημα: Πότε πρέπει να χρησιμοποιούμε το σύμβολο της ισότητας «=» και πότε της λογικής ισοδυναμίας «≡»· Είναι φανερό ότι στο επίπεδο των προτασιακών τύπων Π, χρησιμοποιούμε το «=» μόνον όταν θέλουμε να εκφράσουμε ότι η συμβολοσειρά σ_1 είναι ακριβώς η ίδια με την συμβολοσειρά σ_2, οπότε γράφουμε $\sigma_1 = \sigma_2$. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο της λογικής ισοδυναμίας «$\sigma_1 \equiv \sigma_2$» όταν οι προτάσεις σ_1, σ_2 είναι λογικά ισοδύναμες. Έτσι «$\sigma_1 \equiv \sigma_2$» ανν $[\sigma_1] = [\sigma_2]$, όπου $[\sigma_1], [\sigma_2]$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας στην Lindenbaum-Tarki άλγεβρα. Στην πράξη δεν γίνεται αυστηρή διάκριση των Π και $\Pi/\!\equiv$.

2.5.6 Ασκήσεις. 1. Δείξτε, με όλους τους δυνατούς τρόπους που διαθέτετε, ότι η παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

i) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

ii) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

iii) $(A \vee B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

iv) $(A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A$

v) $(A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A$

vi) $(A \vee (\neg A \wedge B)) \leftrightarrow (A \vee B)$

vii) $(A \wedge (\neg A \vee B)) \leftrightarrow (A \wedge B)$

viii) $\neg A \rightarrow (\neg B \leftrightarrow (B \rightarrow A))$

ix) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

x) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

xi) $A \vee (A \rightarrow B)$

xii) $(A \rightarrow B) \vee (\Gamma \rightarrow A)$

xiii) $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow B)$

2. Προσδιορίστε το είδος της κάθε μιας από τις παρακάτω προτάσεις, με τον προσφορότερο για κάθε μια τρόπο.

i) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

ii) $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow A$

iii) $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)) \leftrightarrow B$

iv) $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)) \leftrightarrow A$

v) $(A \leftrightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow A$

vi) $(A \leftrightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

vii) $(A \rightarrow (A \leftrightarrow B)) \rightarrow A$

viii) $(A \rightarrow (A \leftrightarrow B)) \rightarrow B$

ix) $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ $\Pi \not\models$.[x)] $(A \leftrightarrow (B \rightarrow A)) \leftrightarrow (B \leftrightarrow (A \rightarrow B))$

2.6 Επαρκή Σύνολα Συνδέσμων-Κανονικές Μορφές

2.6.1 Επαρκή Σύνολα Συνδέσμων

Με τον επαγωγικό τρόπο που έχουν ορισθεί οι προτάσεις $\varphi \in \Pi$, είναι φανερό ότι σχηματίζονται από τις προτασιακές μεταβλητές

$$\Pi_0 = \{A, B, \Gamma, \ldots, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\}$$

και τους λογικούς συνδέσμους $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε πρόταση εκφράζεται με τη χρήση των λογικών συνδέσμων $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Από τις λογικές ισοδυναμίες (ιδιότητες) που δόθηκαν στην παράγραφο 2.4.3, και ιδιαίτερα από τις $12, 13, 8$ είναι φανερό ότι είναι δυνατόν να εκφράσουμε ορισμένους λογικούς συνδέσμους συναρτήσει κάποιων άλλων, όπως για παράδειγμα από την 12:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

φαίνεται ότι ο $\rightarrow$ μπορεί να εκφραστεί από τους $\neg$ και $\vee$. Από τις ταυτολογίες αυτές είναι επίσης φανερό ότι οι σύνδεσμοι $\{\neg, \wedge, \vee\}$ έχουν μια αλγεβρική υφή και με καλές ιδιότητες, ενώ οι $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$, είναι κύρια λογικοί σύνδεσμοι, οι δε ιδιότητές των είναι περιορισμένες. Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν εδώ είναι κατά πόσον οι προτάσεις του Π είναι δυνατόν να εκφραστούν από τους «αλγεβρικούς» συνδέσμους, απαλείφοντας από τις προτάσεις τους καθαρά λογικούς συνδέσμους. Με λίγα λόγια το ερώτημα είναι, κατά πόσον η «Λογική» μπορεί να συλληφθεί και να εκφρασθεί από την «Άλγεβρα».

Πράγματι έχουμε ήδη ότι $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$, οπότε:

$$\begin{aligned} (A \leftrightarrow B) &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\ &\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \end{aligned}$$

Κάλλιστα λοιπόν οι $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$ μπορούν να αντικατασταθούν, οπουδήποτε και αν εμφανίζονται, από τους $\neg$, $\wedge$ και $\vee$.

Αν δε χρησιμοποιήσουμε τους νόμους του De Morgan:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B \quad \text{ή} \\ A \wedge B &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \end{aligned}$$

που δείχνουν ότι μπορούμε να εκφράσουμε τον σύνδεσμο $\wedge$ με την βοήθεια των $\neg$, και $\vee$, και διώξουμε τον $\wedge$ από τη παραπάνω ισοδυναμία:

$$A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

ή αν $X := (\neg A \vee B)$ και $Y := (\neg B \vee A)$ και με τη χρήση του τύπου: $X \wedge Y \equiv \neg(\neg X \vee \neg Y)$ εκφράζουμε τον σύνδεσμο $\leftrightarrow$ συναρτήσει των $\{\neg, \vee\}$:

$$A \leftrightarrow B \equiv \neg[\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A)]$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύνολο των συνδέσμων $\{\neg, \vee, \wedge\}$ μας αρκεί για να εκφράσουμε τους άλλους δύο συνδέσμους. Αν λοιπόν μας δοθεί μια οποιαδήποτε πρόταση σ μπορούμε να βρούμε μια άλλη σ' , $\sigma' \equiv \sigma$, στην οποία να μην εμφανίζονται άλλοι σύνδεσμοι εκτός από αυτούς του συνόλου $\{\neg, \vee, \wedge\}$.

Αρκεί να αντικαταστήσουμε τους συνδέσμους $\to$ και $\leftrightarrow$ παντού όπου εμφανίζονται, με τη βοήθεια των σχέσεων:

$$\begin{aligned} A \to B &\equiv \neg A \lor B \\ A \leftrightarrow B &\equiv (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \end{aligned}$$

Τέτοια σύνολα τα λέμε **επαρκή σύνολα συνδέσμων**. Οδηγούμαστε έτσι φυσιολογικά στον ακόλουθο ορισμό:

2.6.1 Ορισμός. Ένα σύνολο συνδέσμων ονομάζεται **επαρκές** ανν, για κάθε πρόταση $\sigma \in \Pi$ υπάρχει μια σ' λογικά ισοδύναμη με την σ, στην οποία να εμφανίζονται μόνο σύνδεσμοι από το σύνολο αυτό (ενδεχόμενα όχι όλοι).

Έτσι αν έχουμε στη διάθεσή μας ένα επαρκές σύνολο συνδέσμων, τότε μπορούμε να γράψουμε όλες τις προτάσεις της προτασιακής λογικής χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους του συνόλου αυτού και μόνον αυτούς. Με άλλα λόγια μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε πρόταση του Π από μια λογικά ισοδύναμή της η οποία να είναι γραμμένη με τη χρήση μόνο των συνδέσμων του συνόλου που μας έχει δοθεί.

2.6.2 Θεώρημα. *Το σύνολο* $\{\neg, \lor, \land\}$ *είναι επαρκές.*

Απόδ.: Στην πράξη αρκεί να εκφράσουμε κάθενα από τους υπόλοιπους δύο συνδέσμους, δηλαδή τους $\to$ και $\leftrightarrow$, χρησιμοποιώντας μόνο τους $\neg, \lor, \land$ ή κάποιους απ' αυτούς. Πράγματι:

$$\begin{aligned} A \to B &\equiv \neg A \lor B && (2.1) \\ A \leftrightarrow B &\equiv (A \to B) \land (B \to A) \\ &\equiv (\neg A \lor A) \land (\neg B \lor A) && (2.2) \end{aligned}$$

Έτσι σε οποιαδήποτε πρόταση από το Π αντικαθιστούμε με βάση τις ισοδυναμίες 2.1 και 2.2 του συνδέσμους $\to$ και $\leftrightarrow$ παντού όπου εμφανίζονται. Όμως μια αυστηρή απόδειξη εξασφαλίζεται με επαγωγή στο μήκος των προτάσεων:

i) Το θεώρημα προφανώς ισχύει για το Π_0, τα προτασιακά δηλαδή σύμβολα, αφού σ' αυτά δεν χρησιμοποιούνται σύμβολα συνδέσμων.

ii) (Υ.Ε): Έστω ότι ισχύει για τις προτάσεις σ_1 και σ_2 του Π_n, θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει και για τις προτάσεις $(\sigma_1 \to \sigma_2)$ και $(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$

του Π_n^+ (για τις υπόλοιπες των οποίων τη κατασκευή προβλέπει ο αναδρομικός ορισμός των προτάσεων, δηλαδή τις $(\neg\sigma_1), (\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ και $(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ το θεώρημα προφανώς ισχύει).

Πράγματι:

$$\begin{aligned}(\sigma_1 \to \sigma_2) &\equiv \neg\sigma_1 \vee \sigma_2, \quad \text{και} \\ (\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2) &\equiv (\sigma_1 \to \sigma_2) \wedge (\sigma_2 \to \sigma_1) \\ &\equiv (\neg\sigma_1 \vee \sigma_2) \wedge (\neg\sigma_2 \vee \sigma_1) \qquad \dashv\end{aligned}$$

2.6.3 Ορισμένες σχέσεις, χρήσιμες στην αλληλομετατροπή λογικών συνδέσμων, είναι οι εξής:

1) $(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$ έκφραση του $\vee$ συναρτήσει των $\neg$ και $\wedge$.

2) $(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ έκφραση του $\wedge$ συναρτήσει των $\neg$ και $\vee$.

3) $(A \to B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$ έκφραση του $\to$ συναρτήσει των $\neg$ και $\wedge$.

4) $(A \leftrightarrow B) \equiv [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]$ έκφραση του $\leftrightarrow$ συναρτήσει των $\neg, \vee, \wedge$.

5) $(A \vee B) \equiv [(A \to B) \to B]$ έκφραση του $\vee$ συναρτήσει των $\to$.

6) $\top \equiv (\neg A \vee A)$, έκφραση του $\top$ (Ταυτολογίας) συναρτήσει των $\neg$ και $\vee$.

7) $\bot \equiv (\neg A \wedge A)$, έκφραση του $\bot$ (Αντιλογίας) συναρτήσει των $\neg$ και $\wedge$.

8) $\bot \equiv \neg\top$ έκφραση του $\bot$ συναρτήσει των $\neg$ και $\top$.

9) $\top \equiv \neg\bot$ έκφραση του $\top$ συναρτήσει των $\neg$ και $\bot$.

2.6.4 Πρόταση. *Τα σύνολα* $\{\neg, \wedge\}$ *και* $\{\neg, \vee\}$ *είναι επαρκή.*

Απόδ.: Από το Θεώρημα 2.6.2 το σύνολο $\{\wedge, \vee, \neg\}$ είναι επαρκές και έτσι κάθε πρόταση μπορεί να εκφρασθεί μόνον με αυτούς τους συνδέσμους. Αντικαθιστούμε τον $\vee$ παντού όπου εμφανίζεται σύμφωνα με από τους νόμους De Morgan:

$$(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \tag{$*$}$$

που εκφράζουν τον $\vee$ συναρτήσει των $\neg$ και $\wedge$, και έχουμε έτσι την έκφραση οποιασδήποτε πρότασης συναρτήσει των $\{\neg, \wedge\}$. Δηλαδή το σύνολο $\{\neg, \wedge\}$ είναι επαρκές. $\dashv\square$

Όμοια και για το $\{\neg, \vee\}$. $\dashv$

2.6.5 Σχόλιο. Αφού το $\neg, \wedge$ είναι επαρκές μπορούμε να γράψουμε όλες τις προτάσεις του P με τη βοήθεια των συνδέσμων $\neg$ και$\wedge$ και μόνο αυτών. Η διαδικασία έχει ως εξής: Σ' ένα πρώτο βήμα εκφράζουμε τους υπόλοιπους, από του πέντε γνωστούς, συνδέσμους:

1) $(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

2) $(A \to B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

3) $(A \leftrightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$

Σ' ένα δεύτερο βήμα σε κάθε πρόταση του P αντικαθιστούμε καθένα από τους $\vee$,$\to$, και $\leftrightarrow$, παντού όπου εμφανίζονται στην πρόταση, με βάση τις παραπάνω ισοδυναμίες (1), (2), και (3) .

2.6.6 Σχόλιο. Είναι φανερό πως κάθε σύνολο συνδέσμων που είναι υπερσύνολο ενός επαρκούς συνόλου συνδέσμων είναι κι' αυτό επαρκές.

2.6.7 Παράδειγμα. (Άσκηση)

i) Να εξεταστεί αν το σύνολο $\{\neg, \to\}$ είναι επαρκές.

ii)] Αν η απάντηση στο (1) είναι θετική, να εκφράσετε τους υπόλοιπους συνδέσμους του αλφάβητου με τη βοήθεια των $\neg$και $\to$

Λύση:

i)] Σύμφωνα με την εκφώνηση διαθέτουμε τους συνδέσμους $\neg$ και $\to$. Επίσης, από το πόρισμα ;;, τα σύνολα $\{\neg, \wedge\}$, και $\{\neg, \vee\}$. είναι επαρκή, αφού όμως διαθέτουμε την άρνηση θα πρέπει να κατασκευάσουμε είτε το $\vee$ είτε το$\wedge$ από τους συνδέσμους του $\{\neg, \to\}$. Η ισοδυναμία ωστόσο $\varphi \to \rho \equiv \neg\varphi \vee \rho$ μας οδηγεί στο να επιχειρήσουμε την κατασκευή του $\vee$. Πράγματι αν στην σχέση αυτή αντικαταστήσουμε τη φ από την $\neg\sigma$ έχουμε: $\neg\sigma \to \rho \equiv \neg(\neg\sigma) \vee \rho$. Δηλαδή: $\sigma \vee \rho \equiv \neg\sigma \to \rho$ η οποία δηλώνει την κατασκευή του $\vee$ από τους $\neg$ και $\to$ που σημαίνει ότι το $\{\neg, \to\}$ είναι επαρκές

ii) a) Την έκφραση (ή κατασκευή) του $\vee$ την έχουμε ήδη από τα προηγούμενα: $\sigma \vee \rho \equiv \neg\sigma \to \rho$

b) Η έκφραση του $\wedge$:Ξέρουμε ήδη από τους νόμους De Morgan ότι: $(\sigma \wedge \rho) \equiv \neg(\neg\sigma \vee \neg\rho)$, οπότε: $(\sigma \wedge \rho) \equiv \neg(\sigma \to \neg\rho)$

c) Η έκφραση του $\leftrightarrow$: Ξέρουμε ήδη ότι:
$\sigma \leftrightarrow \rho \equiv (\sigma \to \rho) \wedge (\rho \to \sigma)$ Οπότε με τη βοήθεια του (b):
$\sigma \leftrightarrow \rho \equiv \neg((\sigma \to \rho) \to \neg(\rho \to \sigma))$

2.6.8 Παράδειγμα. (Άσκηση) Να εξεταστεί αν το σύνολο $\{\vee, \to\}$ είναι επαρκές.

Λύση: Παρατηρούμε ότι από το σύνολο αυτό λείπει ο σύνδεσμος της άρνησης. Αν μπορέσουμε να τον εκφράσουμε συναρτήσει του δοσμένου συνόλου συνδέσμων τότε το σύνολο αυτό θα είναι επαρκές αφού περιέχει και τον $\vee$.

Η άρνηση, ως γνωστόν, είναι ένας μονομελής σύνδεσμος:

$$\neg : \Pi \to \Pi \;/\!\!/\; A \mapsto \neg A.$$

Έτσι ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε πρόταση $A \in \Pi$. Ζητούμε να κατασκευάσουμε την άρνηση της A, δηλαδή μια $\sigma \equiv \neg A$ με τη χρήση του προτασιακού συμβόλου A και των συνδέσμων $\vee$ και $\to$.

Οι προτάσεις που μπορούν να κατασκευαστούν μ' αυτά τα δομικά υλικά είναι οι:

Μήκους 1: $A \vee A, A \to A$ οι οποίες είναι $A \vee A \equiv A$ και $A \to A \equiv \top$.

Μήκους 2: $A \vee \top, \top \vee A, \top \to A, A \to \top$ οι οποίες είναι $A \vee \top \equiv \top, \top \vee A \equiv \top, \top \to A \equiv A, A \to \top \equiv \top$.

Παρατηρούμε ότι οι προτάσεις αυτές **είναι ή ταυτολογίες ή λογικά ισοδύναμες με την A**, δηλαδή καμιά δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\neg A$. Διατυπώνουμε λοιπόν τη θέση ότι:

Κάθε πρόταση $\sigma(A)$ κατασκευασμένη από μια προτασιακή μεταβλητή την A και τους συνδέσμους $\vee$ και $\to$ είναι ή λογικά ισοδύναμη με την A ή είναι ταυτολογία..

Αυτό σημαίνει ότι η άρνηση δεν κατασκευάζεται και το σύνολο $\{\vee, \to\}$ **δεν είναι επαρκές**. ⊣

Την παραπάνω ιδέα της απόδειξης θα πρέπει να την δώσουμε πιο αυστηρά, που σημαίνει με επαγωγή στο μήκος των προτάσεων:

α) Για το P_0, προτασιακά δηλαδή σύμβολα, προφανώς ισχύει.

β) (Υ.Ε.) Έστω ότι ισχύει για τις προτάσεις $\sigma_1(A)$ και $\sigma_2(A)$ του Π_n, Δηλαδή $\sigma_1(A) \equiv A$ ή $\top$ και $\sigma_2(A) \equiv A$ ή $\top$. θα δείξουμε τότε ότι ισχύει και για τις $\sigma_1(A) \vee \sigma_2(A)$, και $\sigma_1(A) \to \sigma_2(A)$.

Πράγματι:

$$[\sigma_1(A) \vee \sigma_2(A)] \equiv \begin{cases} A \vee \sigma_2(A) \equiv \begin{cases} A \vee A \equiv A \\ \\ A \vee \top \equiv \top \end{cases} \\ \\ \top \vee \sigma_2(A) \equiv \begin{cases} \top \vee A \equiv \top \\ \\ \top \vee \top \equiv \top \end{cases} \end{cases}$$

$$[\sigma_1(A) \rightarrow \sigma_2(A)] \equiv \begin{cases} A \rightarrow \sigma_2(A) \equiv \begin{cases} A \rightarrow A \equiv \top \\ \\ A \rightarrow \top \equiv \top \end{cases} \\ \\ \top \rightarrow \sigma_2(A) \equiv \begin{cases} \top \rightarrow A \equiv A \\ \\ \top \rightarrow \top \equiv \top \end{cases} \end{cases} \qquad \dashv$$

2.6.9 Σχόλιο. Έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα μόνο πέντε συνδέσμους

$$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

ενώ διαισθητικά καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν και άλλοι, όπως αυτός που εκφράζει τη λογική πράξη της αποκλειστικής διάζευξης «ή ...ή ...,», δηλαδή, το **αποκλειστικό ή**, ή το «ούτε ...ούτε ...,» κτλ. Μπορούμε να ορίσουμε νέους διμελείς λογικούς συνδέσμους με τη βοήθεια των ήδη γνωστών μας. Για παράδειγμα:

10) $A \veebar B \equiv \neg(A \leftrightarrow B)$ έκφραση του αποκλειστικού $\veebar$ συναρτήσει των $\neg$ και $\leftrightarrow$

11) $A \rightarrow B \equiv \neg(A \rightarrow B)$ έκφραση του $\rightarrow$ συναρτήσει των $\neg$ και $\rightarrow$

12) $A \downarrow B \equiv \neg(A \vee B)$ έκφραση του $\downarrow$ συναρτήσει των $\neg$ και $\vee$.

13) $A \uparrow B \equiv \neg(A \wedge B)$ έκφραση του $\uparrow$ συναρτήσει των $\neg$ και $\wedge$.

2.6.2 Κανονικές Μορφές Προτάσεων

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι μια πρόταση:

$$\varphi = \varphi(A_1, A_2, \ldots, A_n), \qquad \varphi \in \Pi$$

επάγει μια n-μελή συνάρτηση αλήθειας, δηλαδή έναν n-μελή λογικό σύνδεσμο,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \{0,1\}^n &\longrightarrow \{0,1\} \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &\mapsto \bar{\varphi}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$

όπου $\bar{\varphi}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \equiv \bar{\varphi}(\alpha)$ είναι η τιμή αλήθειας που προκύπτει από την πρόταση $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, αν οι προτασιακές μεταβλητές $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ αντικατασταθούν από την απονομή τιμών $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, βλ. και σελίδα 44. Όλες αυτές οι απονομές τιμών εμφανίζονται στον αληθοπίνακα της πρότασης:

A_1	$\ldots$	A_n	$\varphi(A_1, \ldots, A_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_1	$\ldots$	α_n	$\varphi^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2.6.10 Σχόλιο. Μια χρήσιμη παρατήρηση από την παραπάνω περιγραφή είναι ότι για $n = 1$ έχουμε ένα μονομελή σύνδεσμο, για $n = 2$, παίρνουμε τους διμελείς συνδέσμους, κτλ.. Το πλήθος των n-μελών συνδέσμων είναι ίσο με το πλήθος των συναρτήσεων από το $\{0,1\}^n$ στο $\{0,1\}$, δηλαδή 2^{2^n}. (γιατί;)

Κάθε πρόταση λοιπόν καθορίζει έναν σύνδεσμο επί του $\{0,1\}$ που τον εκφράζουμε και με τον αντίστοιχο πίνακα αλήθειας. Μας ενδιαφέρει εδώ το αντίστροφο πρόβλημα. Κατά πόσο δηλαδή, για κάθε αυθαίρετο αληθοπίνακα, υπάρχει μια πρόταση που τον επάγει.

2.6.11 Θεώρημα. *Κάθε πρόταση σ της προτασιακής λογικής είναι ισοδύναμη με μια πρόταση της μορφής $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k$ όπου κάθε A_i $\quad (1 \le i \le k)$ είναι της μορφής $A_i = A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_n}$ με $A_{i_j} = B_{i_j}$ ή $\neg B_{i_j}$ όπου B_{i_j}, $\quad j = 1, \ldots, n$ είναι ένα προτασιακό σύμβολο (μια προτασιακή μεταβλητή).*

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε γράψει την σ σε **Διαζευκτική Κανονική Μορφή** (ΔΚΜ). Το θεώρημα ισχύει και για την **Συζευκτική Κανονική Μορφή** (ΣΚΜ) η οποία κατ' αναλογία είναι μια πρόταση ισοδύναμη με τη σ, και η οποία αποτελείται από συζεύξεις διαζεύξεων των προτασιακών συμβόλων της σ ή των αρνήσεών τους.

Η ΔΚΜ (ή ΣΚΜ) μιας πρότασης μπορεί να κατασκευαστεί από τον αληθοπίνακά της. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Έστω μια πρόταση η $\sigma(A, B, \Gamma)$, η οποία γίνεται αληθής μόνο όταν ακριβώς δύο από τα προτασιακά της σύμβολα παίρνουν την τιμή αλήθειας 1. Δηλαδή έχει αληθοπίνακα:

	A	B	Γ	$\sigma(A,B,\Gamma)$
α_1	1	1	1	0
α_2	1	1	0	1
α_3	1	0	1	1
α_4	1	0	0	0
α_5	0	1	1	1
α_6	0	1	0	0
α_7	0	0	1	0
α_8	0	0	0	0

Η ΔΚΜ(σ) είναι μια διάζευξη. Για να πάρει λοιπόν την τιμή 1 αρκεί μια από τις συμβαλλόμενες στη διάζευξη αυτή προτάσεις να πάρει την τιμή 1. Η συγκεκριμένη πρόταση πρέπει να πάρει την τιμή 1 στις απονομές α_2, α_3 και α_5, και μόνο σ' αυτές. Αυτό επιτυγχάνεται κατασκευάζοντας μια πρόταση για κάθε μια από τις απονομές αυτές, δηλαδή μια σ_2, μια σ_3, και μια σ_5, τέτοιες που να γίνονται αλήθεια **μόνο** από την απονομή πάνω στην οποία βασίζεται η κατασκευή τους. Αυτό μας το επιτρέπει η σύζευξη η οποία γίνεται αλήθεια μόνο όταν όλες οι συμβαλλόμενες προτάσεις είναι αλήθεια. Έτσι:

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &\equiv A \wedge B \wedge \neg\Gamma \\
\sigma_3 &\equiv A \wedge \neg B \wedge \Gamma \\
\sigma_5 &\equiv \neg A \wedge B \wedge \Gamma
\end{aligned}$$

και $\Delta\mathrm{KM}(s(A,B,\Gamma)) \equiv \sigma_2 \vee \sigma_3 \vee \sigma_5 \equiv (A \wedge B \wedge \neg\Gamma) \vee (A \wedge \neg B \wedge \Gamma) \vee (\neg A \wedge B \wedge \Gamma)$.

Η ΣΚΜ($\sigma(A,B,\Gamma)$) κατασκευάζεται από τις απονομές $1, 4, 6, 7$ και 8 που δίνουν την αληθοτιμή 0 στην πρόταση, με ανάλογο (δυϊκό) τρόπο:

$$\begin{aligned}
\Sigma\mathrm{KM}(\sigma(A,B,\Gamma)) \equiv\ & (\neg A \vee \neg B \vee \neg\Gamma) \wedge (\neg A \vee B \vee \Gamma) \wedge (A \vee \neg B \vee \Gamma) \\
& \wedge (A \vee B \vee \neg\Gamma) \wedge (A \vee B \vee \Gamma)
\end{aligned}$$

2.6.12 Παράδειγμα. Γράψτε την παρακάτω πρόταση σε ΣΚΜ:

$$\sigma := (A_1 \to A_2) \vee (A_3 \to A_4) \vee \cdots (A_{n-1} \to A_n)$$

Λύση: Μας ενδιαφέρουν μόνο οι γραμμές του αληθοπίνακα της σ οι οποίες δίνουν την αληθοτιμή 0. Η πρόταση συγκροτείται από σειρά διαζεύξεων, άρα η αληθοτιμή της είναι 0 μόνο όταν η αληθοτιμή κάθε συμβαλλόμενης πρότασης γίνεται 0. Οι συμβαλλόμενες προτάσεις όμως είναι συνεπαγωγές της μορφής :

$$A_{2i-1} \to A_{2i}$$

οι οποίες μόνο στην περίπτωση $1 \to 0$ γίνονται 0, όταν δηλαδή η πρώτη πρόταση γίνεται αληθής, 1 και η δεύτερη ψευδής, 0. Άρα στον αληθοπίνακα της πρότασης μόνο μία γραμμή υπάρχει που να πραγματοποιείται το προηγούμενο. Η γραμμή στην οποία οι ατομικές προτάσεις με περιττό δείκτη έχουν την τιμή 1 και οι άρτιες 0. Δηλαδή η Σ.Κ.Μ. είναι:

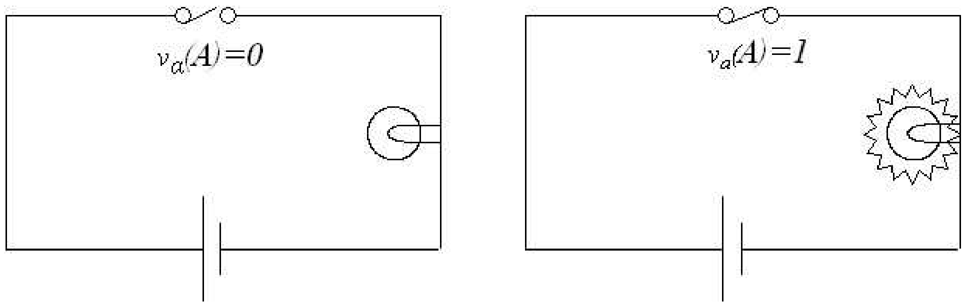
$$(\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3 \vee A_4 \cdots \neg A_{n-1} \vee A_n) \quad \dashv\!\blacksquare.$$

2.7 Λογικά Κυκλώματα

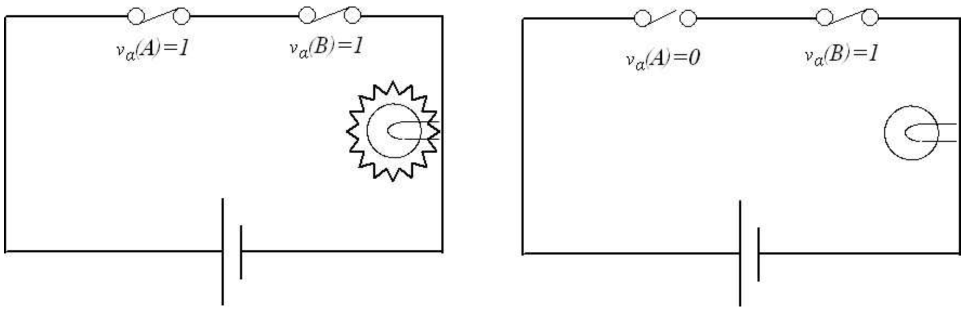
Η δίτιμη λογική και τα συστήματα δυο καταστάσεων, έχουν μεγάλη σχέση. Πραγματικά με τη χρήση της δίτιμης Λογικής μπορεί κανείς να περιγράψει κατάλληλα πλευρές της λειτουργίας οποιουδήποτε συστήματος δυο καταστάσεων. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι τα κυκλώματα με διακόπτες δύο θέσεων: Ανοικτός διακόπτης, , και κλειστός διακόπτης . Έχουμε πει πως μια προτασιακή μεταβλητή, ας πούμε η A, έχει δύο δυνατότητες ή να πάρει την αληθοτιμή $v_\alpha(A) = 1$ ή να πάρει την $v_\alpha(A) = 0$. Το ίδιο ισχύει και με ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα με ένα διακόπτη δύο θέσεων: Έχουμε και δω δύο δυνατότητες, ή να είναι κλειστός και να ανάβει ο λαμπτήρας ή να είναι ανοιχτός , οπότε ο λαμπτήρας δεν ανάβει βλ. το Σχήμα 2.1. Ένας διακόπτης λοιπόν δύο θέσεων έχει δύο δυνατότητες όπως και μια προτασιακή μεταβλητή, μπορούμε λοιπόν να αντιστοιχούμε μια προτασιακή μεταβλητή A με ένα διακόπτη δυο θέσεων και τις αληθοτιμές της A με τις δύο καταστάσεις του διακόπτη, και . Αν ο διακόπτης είναι κλειστός τότε αυτό αντιστοιχεί με την $v_\alpha(A) = 1$ ενώ αν είναι ανοικτός αντιστοιχεί με την τιμή αλήθειας $v_\alpha(A) = 0$, βλ. ξανά το Σχήμα 2.1. Έτσι λοιπόν κάθε προτασιακή μεταβλητή μπορεί να αντιστοιχηθεί με έναν απλό διακόπτη, οι δε αληθοτιμές της προτασιακής μεταβλητής αντιστοιχούν στις δύο καταστάσεις του διακόπτη, ως ακολούθως:

$v_\alpha(A) := \alpha(A)$	$v_\alpha(\neg A) := \neg v_\alpha(A)$
$0 \leftrightarrow$ ( )	$1 \leftrightarrow$ ( )
$1 \leftrightarrow$ ( )	$0 \leftrightarrow$ ( )

Αν έχουμε δύο προτασιακές μεταβλητές A_1, A_2 τότε το αντίστοιχο κύκλωμα θα πρέπει να διαθέτει δύο απλούς διακόπτες δ_1, δ_2. Η πρόταση $A_1 \wedge A_2$ αντιστοιχεί στην σύνδεση σε σειρά των διακοπτών δ_1, δ_2. και αληθεύει ανν



Σχῆμα 2.1: Ανοικτό και κλειστό κύκλωμα

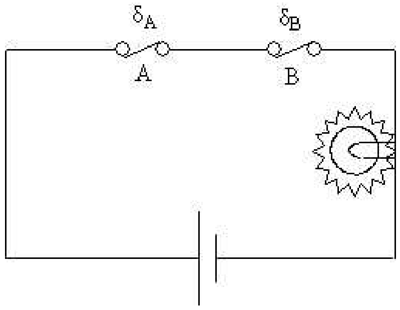


Σχῆμα 2.2: Διακόπτες εν σειρά $\leftrightarrow$ $A \wedge B$

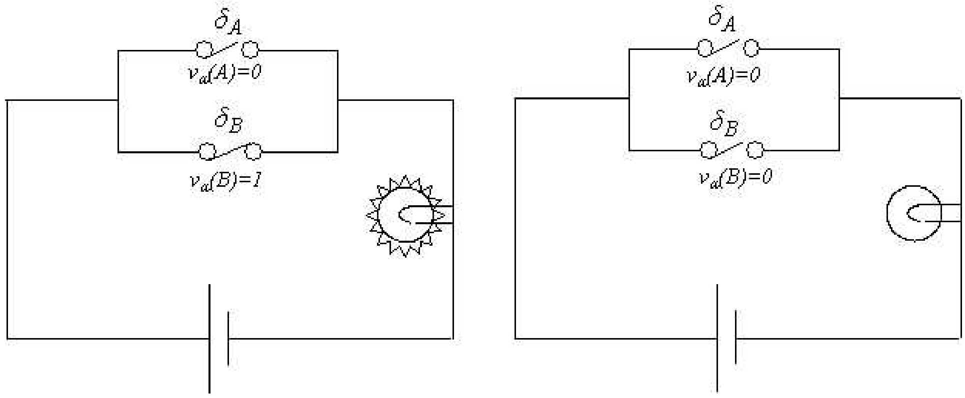
και η A_1 και η A_2 είναι αληθείς, δηλαδή ανν και οι δύο διακόπτες δ_1, δ_2. είναι κλειστοί:

Όπως η πρόταση $A \wedge B$ είναι αλήθεια μόνο όταν και οι δύο προτάσεις είναι αλήθεια, έτσι και στο κύκλωμα αυτό ο λαμπτήρας ανάβει μόνο όταν και οι δύο διακόπτες είναι κλειστοί: Η πρόταση $A \vee B$ αντιστοιχεί στην παράλληλη σύνδεση των διακοπτών δ_A και δ_B με $v_\alpha(A \vee B) = 0$ ανν $v_\alpha(A) = 0$ και $v_\alpha(B) = 0$. Όπως η πρόταση $A \vee B$ είναι ψευδής ανν και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς, και αληθής στις άλλες περιπτώσεις,, έτσι και στο κύκλωμα αυτό ο λαμπτήρας ανάβει αρκεί ένας από τους δύο διακόπτες να είναι στο 1, βλ. Σχήμα 2.4. Αφού όμως το σύνολο των συνδέσμων $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι επαρκές, είναι φανερό ότι οποιαδήποτε πρόταση και αν δοθεί μπορούμε να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο κύκλωμα με διακόπτες.

2.7.1 Παράδειγμα. Το κύκλωμα που αντιστοιχεί στη λογική ισοδυναμία $A \leftrightarrow B$ κατασκευάζεται με τη βοήθεια της ισοδυναμίας $A \leftrightarrow B \equiv [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]$, βλ. το Σχήμα 2.5.



Σχῆμα 2.3: Κλειστοί διακόπτες εν σειρά ↔ $v_\alpha(A \wedge B) = 1$



Σχῆμα 2.4: Διακόπτες εν παραλλήλω

2.7.2 Θεώρημα. *Για κάθε πρόταση της προτασιακής λογικής υπάρχει ένα κύκλωμα με διακόπτες δύο θέσεων που την αναπαρασταίνει.*

2.7.3 Ασκήσεις. 1. Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι επαρκή:

α) $\{\neg, \vee\}$,

β) $\{\wedge, \vee\}$,

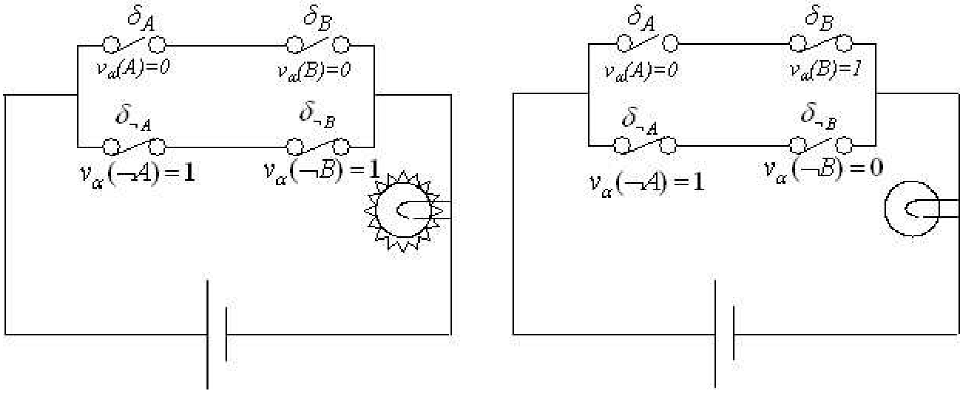
γ) $\{\neg, \veebar\}$,

δ) $\{\vee, \veebar\}$,

ε) $\{\leftrightarrow, \rightarrow\}$,

ζ) $\{\rightarrow, \veebar\}$,

η) $\{\uparrow\}$,



Σχῆμα 2.5: Το κύκλωμα για τον τύππο $A \leftrightarrow B \equiv [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]$

θ) $\{\downarrow\}$,

ι) $\{\nrightarrow, \rightarrow\}$,

κ) $\{\vee, \leftrightarrow\}$,

λ) $\{\leftrightarrow, \veebar\}$,

μ) $\{\perp, \rightarrow\}$.

Αποδείξτε συστηματικά οποιαδήποτε απάντησή σας.

2. Δείξτε ότι τα μοναδικά μονοσύνολα που είναι επαρκή είναι τα $\{\uparrow\}$ και $\{\downarrow\}$.

3. Πιο από τα παρακάτω σύνολα συνδέσμων είναι επαρκές: $\{\nrightarrow, \vee\}$, $\{\wedge, \rightarrow, \nrightarrow\}$.
Όπου $A \nrightarrow B \equiv \neg(A \rightarrow B)$

   Αποδείξτε συστηματικά οποιοδήποτε ισχυρισμό σας.

4. Δίδεται η πρόταση $\sigma \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B)$ και το σύνολο συνδέσμων $\{\wedge, \rightarrow\}$.

   α) Εξετάστε αν ισχύει ο παρακάτω ισχυρισμός:

   Υπάρχει πρόταση σ' τέτοια ώστε $\sigma' \equiv \sigma$ και στη σ' χρησιμοποιούνται μόνο οι σύνδεσμοι του συνόλου $\{\wedge, \rightarrow\}$.

   β) Εξετάστε αν ο ισχυρισμός αυτός ισχύει για **κάθε** πρόταση της προτασιακής λογικής .

5. Δίδεται η πρόταση της προτασιακής λογικής $\sigma \equiv \neg(A \wedge B) \vee (A \leftrightarrow B)$. Εξετάστε αν υπάρχει πρόταση σ', $\sigma' \equiv \sigma$ και τέτοια ώστε να μην εμφανίζεται σ' αυτήν άλλος λογικός σύνδεσμος εκτός από τον $\rightarrow$;

6. Κατασκευάστε μια πρόταση με τρία προτασιακά σύμβολα η οποία να γίνεται αληθινή από εκείνες και μόνο τις εκτιμήσεις αλήθειας οι οποίες δίνουν την αληθοτιμή 0 σε δύο ακριβώς από τα αυτά τα προτασιακά της σύμβολα.

7. Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις σε ΔΚΜ και ΣΚΜ, και για καθεμιά απ' αυτές να κατασκευαστεί το αντίστοιχο κύκλωμα:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &\equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \Gamma \\
\sigma_2 &\equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma) \\
\sigma_3 &\equiv \neg(A \wedge B) \rightarrow \Gamma \\
\sigma_4 &\equiv (A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg A \vee B)) \vee A \\
\sigma_5 &\equiv (((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)) \leftrightarrow \Delta
\end{aligned}$$

8. Θεωρώντας τις αληθοτιμές 1 και 0 ως τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_2$, κατασκευάστε μια πρόταση $\sigma(A, B, \Gamma)$ που να είναι αληθινή αν και μόνο αν $A + B + \Gamma = 0\ (mod 2)$

9. Ας είναι $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ μια ακολουθία από προτασιακές μεταβλητές και έστω η πρόταση:
$$\sigma_n \equiv (A_n \leftrightarrow A_{n+1}) \leftrightarrow A_{n+2}$$
   α) Κατασκευάστε τις ΔΚΜ(σ_2) και ΣΚΜ4(σ_2).

   β) Ποιες απονομές τιμών κάνουν αληθινή τη πρόταση $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$;

   γ) Κατασκευάστε τη ΔΚΜ(σ_n)

10. Εξετάστε αν το σύνολο συνδέσμων $\{\wedge, \blacklozenge\}$ είναι επαρκές, όπου $\blacklozenge$ είναι ο σύνδεσμος δυο θέσεων που περιγράφεται από τον αληθοπίνακα:

A	B	$A \blacklozenge B$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

11. Να αποδειχθεί το Θεώρημα 2.7.2

2.8 Ικανοποιήσιμα Σύνολα και Λογικές Συνέπειες.

2.8.1 Ορισμός. Ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται ικανοποιήσιμο (ή συνεπές) αν και μόνο αν υπάρχει μια απονομή τιμών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ τέτοια ώστε, για κάθε πρόταση $\sigma \equiv \Sigma$, να ισχύει ότι $\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n) = \alpha$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η απονομή $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n$ ικανοποιεί το Σ. Σε αντίθετη περίπτωση το σύνολο Σ λέγεται μη ικανοποιήσιμο ή ασυνεπές.

2.8.2 Παράδειγμα. Το σύνολο,
$$\Sigma := \{A, A \rightarrow \neg B, \Gamma \vee \neg B, A \vee B, A \wedge B\}$$
είναι ικανοποιήσιμο, αφού όπως φαίνεται από τον αληθοπίνακα, η απονομή τιμών $(1, 0, 1)$ (γραμμή ̈ 3) το ικανοποιεί:

	A	B	Γ	$\neg B$	$A \to \neg B$	$\Gamma \vee \neg B$	$\Gamma \to A$	$A \vee B$	$A \wedge \Gamma$
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
2	1	1	0	0	0	0	1	1	0
3	1	0	1	1	1	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	0	1	1	0	1	0
6	0	1	0	0	1	0	1	1	0
7	0	0	1	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	1	1	1	0	0

2.8.3 Ορισμός. Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων και σ μια πρόταση. Η σ λέγεται συνέπεια του Σ (συμβολικά $\Sigma \models \sigma$), αν και μόνο αν κάθε απονομή τιμών που ικανοποιεί το Σ επαληθεύει και τη σ. Το σύνολο των συνεπειών ενός συνόλου Σ συμβολίζεται $\mathbf{Συν}(\Sigma)$. Δηλαδή

$$\mathbf{Συν}(\Sigma) := \{\tau \in \Pi \mid \Sigma \models \tau\}$$

2.8.4 Παράδειγμα. Έστω ένα σύνολο προτάσεων το $\Sigma = \{A, A \to \neg B, G \vee \neg B\}$. Όπως φαίνεται από τον αληθοπίνακα του προηγουμένου παραδείγματος, και συγκεκριμένα από τις απονομές 3 και 4, η πρόταση $\Gamma \to A$ είναι συνέπεια του Σ. Επίσης $\Sigma \models A \vee B$ και $\Sigma \models A \wedge \Gamma$.

2.8.5 Θεώρημα. *Για κάθε σύνολο προτάσεων Σ, αν το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο τότε, για κάθε πρόταση σ, $\sigma \notin \mathbf{Συν}(\Sigma)$.*

Απόδ.: Έστω ότι $\sigma \notin \mathbf{Συν}(\Sigma)$. Άρα, με βάση τον ορισμό, υπάρχει μια απονομή τιμών που ικανοποιεί το Σ και δεν επαληθεύει την s. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει τέτοια απονομή τιμών αφού το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα $\sigma \in \mathbf{Συν}(\Sigma)$.

Σχόλιο: Το αντιθετοαντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον: Για κάθε σύνολο προτάσεων Σ, αν υπάρχει μια πρόταση φ, τέτοια ώστε $\varphi \notin \mathbf{Συν}(\Sigma)$, τότε το Σ είναι ικανοποιήσιμο.

Ένα παράδειγμα μη ικανοποιήσιμου συνόλου είναι το $\Sigma = \{A \to B, A \wedge \neg B, A \vee B\}$

A	B	$A \to B$	$A \wedge \neg B$	$A \vee B$	σ
0	0	1	0	0	;
0	1	1	0	1	;
1	0	0	1	1	;
1	1	1	0	1	;

αφού δεν υπάρχει απονομή τιμών στις προτασιακές μεταβλητές A και B που να ικανοποιεί το Σ. Επίσης μια οποιαδήποτε πρόταση, έστω η σ, είναι συνέπεια του συνόλου αυτού, γιατί αν $\sigma \notin \mathbf{Συν}(S)$ αυτό σημαίνει ότι **υπάρχει** μια απονομή τιμών που θα ικανοποιεί το Σ και δίνει στην σ την αληθοτιμή 0. Όπως φαίνεται όμως από τον αληθοπίνακα τέτοια απονομή τιμών δεν υπάρχει.

2.8.6 Θεώρημα. *Έστω Σ, Σ_1, Σ_2 τρία οποιαδήποτε σύνολα προτάσεων. Ισχύουν τα εξής:*

1. $\Sigma \subseteq Συν(\Sigma)$
2. *Αν* $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ *τότε* $\boldsymbol{Συν}(\Sigma_1) \subseteq \boldsymbol{Συν}(\Sigma_2)$
3. $\boldsymbol{Συν}(\boldsymbol{Συν}(\Sigma)) = \boldsymbol{Συν}(\Sigma)$
4. $\boldsymbol{Ταυτ} \subseteq \boldsymbol{Συν}(\Sigma)$

Απόδ.:

1. Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.
2. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: α) Αν το S_1 είναι μη ικανοποιήσιμο τότε και το Σ_2 δεν είναι ικανοποιήσιμο οπότε $\mathbf{Συν}(\Sigma_1) = \mathbf{Συν}(\Sigma_2) = \Pi$, όπως συνάγεται από το θεώρημα 4.1.

   β) Αν το S_1 είναι ικανοποιήσιμο ενώ το Σ_2 όχι τότε ισχύει το ζητούμενο αφού το $\mathbf{Συν}(\Sigma_2) = \Pi$. Είναι δηλαδή όλες οι προτάσεις.

   γ) Έστω τώρα ότι τα Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα, και έστω κάποια πρόταση $\sigma \in \mathbf{Συν}(\Sigma_1)$, θα δείξουμε ότι $\sigma \notin \mathbf{Συν}(\Sigma_2)$.

   Ας υποθέσουμε ότι ϵ είναι μια απονομή τιμών που ικανοποιεί το Σ_2, θα δείξουμε ότι επαληθεύει και τη σ. Αφού η ε ικανοποιεί το Σ_2 σημαίνει ότι κάνει αληθινές όλες τις προτάσεις του Σ_2 κατά συνέπεια και όλες τις προτάσεις του Σ_1 αφού $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Όμως $\sigma \in \mathbf{Συν}(\Sigma_1)$, άρα η ϵ επαληθεύει τη σ.

3. ιιι) Από τις (ι) και (ιι) έχουμε ότι **Συν**(Σ) $\subseteq$ Συν(Συν(Σ)) αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι Συν(Συν(Σ)) $\subseteq$ **Συν**(Σ). Έστω μια πρόταση $\sigma \in$ Συν(Συν(Σ)), θα δείξομε ότι $\sigma \in$ **Συν**(Σ). Πράγματι, κάθε απονομή τιμών που ικανοποιεί το Σ, κάνει αληθινές και όλες τις συνέπειές του, δηλαδή το **Συν**(Σ). Και αφού ικανοποιεί το **Συν**(Σ) κάνει αληθινές, επίσης, και όλες τις συνέπειές του δηλαδή το Συν(Συν(Σ)), άρα και τη σ αφού $\sigma \in$ Συν(Συν(Σ)).

4. Έστω ότι υπάρχει $\tau in \top$ και $\tau \notin$ **Συν**(Σ). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει απονομή τιμών που επαληθεύει το Σ και όχι την τ, που είναι άτοπο γιατί η τ είναι ταυτολογία.

2.8.7 Θεώρημα. *(Θεώρημα του Χρύσσιπου)*
Έστω $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ προτάσεις:

$$\{\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_n\} \models \sigma \Longleftrightarrow \models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \to \sigma$$

Απόδ.:

1.) Θα δείξουμε πρώτα ότι:

   το, $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \models \sigma$ συνεπάγεται το, $\models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge ... \wedge \sigma_n \to \sigma$

   Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ μια απονομή τιμών. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: Εάν η απονομή αυτή να ικανοποιεί το σύνολο $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ τότε,αφού $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \models \sigma$, θα επαληθεύει και τη σ. Οπότε επαληθεύει και τη $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \to \sigma$ Εάν η απονομή αυτή δεν ικανοποιεί το σύνολο $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ σημαίνει ότι δίνει την αληθοτιμή 0 σε μια τουλάχιστον από τις προτάσεις του. Τότε όμως κάνει ψευδή την $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ οπότε κάνει αλήθεια την $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \to \sigma$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \to \sigma$ γίνεται αληθής, άρα είναι μια ταυτολογία.

2. Θα δείξουμε τώρα ότι:

   $$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \models \sigma \Leftarrow \models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge ... \wedge \sigma_n \to \sigma$$

   Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απονομή τιμών που ικανοποιεί το $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ επαληθεύει και τη σ. Έστω $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ μια απονομή τιμών που ικανοποιεί το $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, κατά επαληθεύει τη σύζευξη $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$.

Αφού όμως η $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \rightarrow \sigma$είναι ταυτολογία και η απονομή $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ επαληθεύει την $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ άρα επαληθεύει και τη σ.

2.8.8 Σχόλιο. Επειδή $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \rightarrow \sigma \equiv \sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\sigma_n \rightarrow \sigma) \ldots))$

(ας το αποδείξει ο αναγνώστης ως άσκηση) το θεώρημα μπορεί να γραφεί:

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \models \sigma \Longleftrightarrow \models (\sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\sigma_n \rightarrow \sigma) \ldots))$$

2.8.9 Παράδειγμα.

$$\{A \vee B, A \rightarrow B\} \models B, \text{ενώ} \{A \vee B, A \rightarrow B\} \not\models B$$

Πράγματι όπως φαίνεται από την πρώτη και τη τρίτη γραμμή του παρακάτω αληθοπίνακα η B είναι συνέπεια του συνόλου $\{A \vee B, A \rightarrow B\}$ ενώ η A όπως φαίνεται από τη 3η γραμμή δεν είναι, αφού υπάρχει μια απονομή τιμών στις προτασιακές μεταβλητές που επαληθεύει μεν το σύνολο αλλά δίδει την τιμή 0 στην A:

A	B	$A \wedge \neg B$	$A \rightarrow B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	1

Θα μπορούσαμε επίσης, σύμφωνα με το θεώρημα του Χρύσσιπου, να εξετάσουμε αν η πρόταση $((A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ είναι ταυτολογία:

$$\begin{aligned} &((A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B \\ &\equiv [(A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B \\ &\equiv [(A \wedge \neg A) \vee B] \rightarrow B \\ &\equiv (\bot \wedge B) \rightarrow B \\ &\equiv B \rightarrow B \\ &\equiv \top \quad ⊣▮ \end{aligned}$$

2.8.10 Πρόταση. *Έστω δύο σύνολα προτάσεων τα Σ_1 και Σ_2, και μια πρόταση η σ. Να δειχθεί ότι*

$$\textit{Αν} \quad \Sigma_2 \subseteq \boldsymbol{\Sigma\upsilon\nu}(\Sigma_1) \quad \textit{και} \quad \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \models \sigma \quad \textit{τότε} \quad \Sigma_1 \models \sigma$$

Απόδ.:

Έστω ότι $\Sigma_1 \not\models \sigma$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια απονομή τιμών η οποία επαληθεύει το Σ_1 ενώ δίνει στην σ την τιμή 0. Αφού όμως επαληθεύει το Σ_1 άρα επαληθεύει και τις Συνέπειές του, και αφού $\Sigma_2 \subseteq \mathbf{Συν}(\Sigma_1)$, άρα ικανοποιεί και το Σ_2, δηλαδή επαληθεύει το $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ οπότε δίνει και στην σ την αληθοτιμή 1, που είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $\Sigma_1 \not\models \sigma$.

2.9 Ανεξάρτητα και Ισοδύναμα Σύνολα Προτάσεων

Κατά τη μελέτη κυρίως των αξιωματικών συστημάτων, και κατά τη διαδικασία της επιλογής των αξιωμάτων, είναι επιθυμητό να γνωρίζουμε μήπως κάποιο από τα αξιώματα αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα, εξαρτάται δηλαδή λογικά από τα υπόλοιπα, με την έννοια ότι αληθεύει στην περίπτωση που και αυτά αληθεύουν. Οδηγούμαστε έτσι στην έννοια της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων, η οποία ήταν διαισθητικά γνωστή από την εποχή του Ευκλείδη.

Είναι επίσης γνωστό ότι το πέμπτο από τα αξιωμάτων του Ευκλείδη είναι: *«Αν δύο ευθείες ενός επιπέδου τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε, αν αυτές προεκταθούν προς τα μέρη αυτά κάπου τέμνονται»*. Αν το αξίωμα αυτό αντικατασταθεί από το: *«Από ένα σημείο εκτός ευθείας περνά μία και μοναδική παράλληλος προς την ευθεία»* Το γεωμετρικό οικοδόμημα δεν αλλάζει, δηλαδή τα δύο σύνολα αξιωμάτων παράγουν την ίδια γεωμετρία, που σημαίνει πως τα δύο σύνολα αξιωμάτων έχουν ακριβώς τις ίδιες συνέπειες, είναι λοιπόν από την άποψη αυτή ισοδύναμα.

2.9.1 Ορισμός. Ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται **ανεξάρτητο** ανν καμιά από τις προτάσεις του δεν είναι συνέπεια των υπολοίπων. Συμβολικά,

$$\mathbf{Ανεξ}(\Sigma) :\Leftrightarrow\ (\forall\sigma \in \Sigma)[\sigma \notin \mathbf{Συν}(\Sigma - \{\sigma\})]$$

2.9.2 Ορισμός. Δύο σύνολα προτασιακών τύπων Σ_1 και Σ_2 λέγονται **ισοδύναμα**, συμβολικά, $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$ ανν έχουν τις ίδιες συνέπειες, δηλαδή,

$$\Sigma_1 \approx \Sigma_2 :\leftrightarrow\ \mathbf{Συν}(\Sigma_1) = \mathbf{Συν}(\Sigma_2)$$

Έτσι το Σ **δεν είναι ανεξάρτητο** ανν υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $\sigma \in \mathbf{Συν}(\Sigma - \{\sigma\})$.

Ειδικά αν το Σ εκλαμβάνεται ως ένα αξιωματικό σύστημα, τότε ένα αξίωμα $\alpha \in \Sigma$ θα λέγεται **ανεξάρτητο** στο Σ ή είναι ένα ανεξάρτητο αξίωμα του Σ ανν καί το Σ καί το $\Sigma - \{\sigma\} \cup \{\neg\sigma\}$ είναι ικανοποιήσιμα ή συνεπή.

• Δοθέντος ενός πεπερασμένου συνόλου προτάσεων $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n,\}$ για να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητο, αρκεί να βρούμε για κάθε δείκτη $1 \leq j \leq n$ μια απονομή τιμών αληθείας α τέτοια ώστε, $v_\alpha(\sigma_i) = 1$ για κάθε $i \neq j$ αλλά $v_\alpha(\sigma_j) = 0$.
• Αντίθετα για να δείξουμε ότι $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n,\}$ δεν είναι ανεξάρτητο, αρκεί να δείξουμε ότι ένας από τους τύπους $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n,\}$ είναι συνέπεια των άλλων, δηλαδή υπάρχει $1 \leq j \leq n$, τέτοιο ώστε,

$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_n\} \models \sigma_j$$

ή από το Θεώρημα του Χρύσιππου,

$$\models \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_{j-1} \wedge \sigma_{j+1} \wedge \ldots \wedge \sigma_n \rightarrow \sigma_j$$

ή τέλος αρκεί να βρούμε ένα υποσύνολό του που δεν είναι ανεξάρτητο.
• Στην περίπτωση που το σύνολο $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n,\}$ δεν είναι ανεξάρτητο για να βρούμε ένα ανεξάρτητο υποσύνολο, εκμεταλλευόμαστε την ακόλουθη παρατήρηση:

> Αν το σύνολο Σ είναι ένα σύνολο προτάσεων και $\Sigma - \{\sigma\} \models \sigma$ τότε τα σύνολα Σ και $\Sigma - \{\sigma\}$ είναι ισοδύναμα.

Τα ανεξάρτητα σύνολα προτασιακών τύπων έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το κενό σύνολο είναι ανεξάρτητο.
2. Ένα μονοσύνολο $\{\sigma\}$ είναι ανεξάρτητο ανν ο π.τ. σ δεν είναι ταυτολογία.
3. Κάθε πεπερασμένο σύνολο τύπων έχει τουλάχιστον ένα ανεξάρτητο και ισοδύναμο υποσύνολο
4. Ένα σύνολο τύπων είναι ανεξάρτητο ανν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο. Επομένως άν ένα σύνολο περιέχει π.χ. μια αντίφαση, τότε δεν είναι ανεξάρτητο, σύμφωνα και με το 2. Έτσι για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο Σ δεν είναι ανεξάρτητο αρκεί να βρούμε ένα υποσύνολό του που δεν είναι ανεξάρτητο.

2.9.3 Παράδειγμα. Δίδεται το σύνολο,

$$\Sigma := \{\alpha \vee \beta, \neg\alpha, \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha, \alpha \wedge \gamma, \alpha \rightarrow \gamma\}$$

Να δειχθεί ότι το Σ δεν είναι ανεξάρτητο και να βρεθεί ένα ανεξάρτητο υποσύνολό του.

Λύση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας, όπου $Y := \neg\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \wedge (\alpha \wedge \gamma) \wedge (\alpha \to \gamma)$

α	β	γ	$\alpha \vee \beta$	$\neg\alpha$	$\alpha \to \beta$	$\beta \to \alpha$	$\alpha \wedge \gamma$	$\alpha \to \gamma$	$Y \to \alpha \vee \beta$
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0 1 0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0 1 0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0 1 1
0	1	1	1	1	1	0	0	1	0 1 1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0 1 1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0 1 1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0 1 1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0 1 1

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Χρύσιππου,

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \models \sigma \ \leftrightarrow \models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \ \to \ \sigma \qquad (*)$$

Αλλά $Y \ \to \ \alpha \vee \beta$ είναι μια ταυτολογία, άρα

$$\models Y \ \to \ \alpha \vee \beta \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \models \alpha \vee \beta$$

Επομένως το σύνολο Σ δεν είναι ανεξάρτητο.

Το υποσύνολο $\{\neg\alpha, \alpha \vee \beta, \beta \ \to \ \alpha\}$ είναι ανεξάρτητο αφού στον πιο πάνω πίνακα φαίνεται καθαρά ότι όταν κάποιος από τους τρεις τύπους έχει αληθοτιμή 0 τότε οι δύο άλλοι έχουν τιμή 1.

Μια διαφορετική απόδειξη θα μπορούσε να δοθεί ως ακολούθως: Παρατηρείστε ότι, $\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\} \models (\alpha \ \to \ \beta)$ και $\{\neg\alpha, \alpha \ \to \ \beta, \beta \ \to \ \alpha\} \models (\alpha \ \to \ \gamma)$. Επομένως τα υποσύνολα $\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha, \alpha \ \to \ \beta\}$ και $\{\neg\alpha, \alpha \ \to \ \beta, \beta \ \to \ \alpha, \alpha \ \to \ \gamma\}$ δεν είναι ανεξάρτητα, και επομένως και το δοθέν σύνολο δεν είναι ανεξάρτητο.

2.10 Συμπερασματικά σχήματα

2.10.1 Ορισμός. Έστω ότι μια πρόταση, η σ, είναι συνέπεια κάποιων άλλων προτάσεων των $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, δηλαδή:

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n\} \models \sigma$$

Θα λέμε τότε ότι η σ είναι **συμπέρασμα** από τις $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, οι οποίες λέγονται **προκείμενες** ή **υποθέσεις**.

Στο συλλογισμό που είχαμε σχολιάσει στην αρχή του κεφαλαίου:

1 : *Εάν είναι μέρα τότε έχει φως*
2 : *Είναι μέρα*

---

3 : *Άρα έχει φως*

Η (3) αποτελεί συμπέρασμα των (1) και (2) που είναι οι προκείμενες, ή οι υποθέσεις. Συμβολίζοντας τις προτάσεις που εμφανίζονται εδώ με γράμματα: την «*είναι μέρα*» με A και την «*έχει φως*» με B παίρνουμε το σχήμα:

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B, \\ A \end{array}}{B}$$

Οποιεσδήποτε και να είναι οι προτάσεις A και B, ανεξάρτητα δηλαδή από τις σημασίες των A και B, το σχήμα αυτό είναι πάντα σωστό που σημαίνει πως πρόταση B είναι λογική συνέπεια, ή συμπέρασμα των $A \rightarrow B$ και A.

Δηλαδή:

$$\{A \rightarrow B, A\} \models B$$

ή, σύμφωνα με το Θεώρημα του Χρύσιππου:

$$\models (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

Εξετάζοντας τον αληθοπίνακα των προτάσεων αυτών:

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge (A \rightarrow B)$	$[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά που οι προκείμενες είναι αληθινές είναι αληθινό και το συμπέρασμα. Όταν όμως είναι αληθινές οι προκείμενες είναι αναγκαστικά αληθινή και η σύζευξή τους όπως προκύπτει από τον αληθοπίνακα της σύζευξης. Αν τώρα τεθεί αυτή η σύζευξη ως πρώτη πρόταση σε μια συνεπαγωγή, ενώ ως δεύτερη τεθεί το συμπέρασμα τότε η πρόταση αυτή δεν μπορεί παρά να είναι ταυτολογία όταν ο συλλογισμός είναι σωστός (βλέπε την τρίτη στήλη του αληθοπίνακα).

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο θεώρημα του Χρύσσιπου που λέει ότι για να είναι η σ συμπέρασμα των $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ πρέπει και αρκεί η πρόταση $(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \rightarrow \sigma$ να είναι ταυτολογία.

Ορισμένα συμπερασματικά σχήματα που συνήθως συναντάμε δίνονται στον Πίνακα 2.1. Υποθέτουμε επιπρόσθετα ότι ισχύει η **απλή αντικατάσταση**:

(ΑΑ) Αν δηλαδή ο τύπος φ' είναι ένας υποτύπος του φ, συμβολικά $\varphi(\ldots, \varphi', \ldots)$ και $\varphi' \equiv \psi', \quad \varphi', \psi' \in \Pi_2$ είναι μια απλή[2] ισοδυναμία, τότε από τον $\varphi(\cdots \varphi' \cdots)$ συνάγουμε τον τύπο $\varphi(\cdots \psi' \cdots)$.

Όνομα	Μορφή	Παράδειγμα
ΣK_1) Modus Ponens	$\dfrac{\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha}{\beta}$	$\dfrac{\textit{αν είναι μέρα τότε έχει φως, είναι μέρα}}{\textit{έχει φως}}$
ΣK_2) Modus Tollens	$\dfrac{\alpha \rightarrow \beta,\ \neg\beta}{\neg\alpha}$	$\dfrac{\textit{αν είναι μέρα τότε έχει φως, δεν έχει φως}}{\textit{δεν είναι μέρα}}$
ΣK_3) Απαλοιφή του $\wedge$	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$	$\dfrac{\textit{είναι νύχτα και έχουμε έκλειψη ηλίου}}{\textit{είναι νύχτα}}$
ΣK_4) Εισαγωγή του $\wedge$	$\dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$	$\dfrac{\textit{πέφτει δυνατή βροχή, είναι μέρα}}{\textit{είναι μέρα και πέφτει δυνατή βροχή}}$
ΣK_5) Εισαγωγή του $\vee$	$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$	$\dfrac{\textit{είναι μέρα}}{\textit{είναι μέρα ή το φεγγάρι είναι λαμπερό}}$
ΣK_6) *Διαζευκτικός Συλλογισμός*	$\dfrac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\textit{είναι νύχτα ή έχουμε έκλειψη ηλίου, δεν είναι νύχτα}}{\textit{έχουμε έκλειψη ηλίου}}$
ΣK_7) *Υποθετικός Συλλογισμός*	$\dfrac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$	$\dfrac{\textit{αν είναι μέρα τότε έχει φως, αν έχει φως τότε ο Σωκράτης περιπατεί}}{\textit{αν είναι μέρα τότε ο Σωκράτης περιπατεί}}$
ΣK_8) *Εποικοδομιτικό Δίλημμα*	$\dfrac{\alpha \rightarrow \beta,\ \gamma \rightarrow \delta, \alpha \vee \gamma}{\beta \vee \delta}$	$\dfrac{\textit{αν είναι μέρα τότε έχει φως,αν είναι νύχτα έχει σκοτάδι, είναι μέρα ή είναι νύχτα}}{\textit{έχει φως ή έχει σκοτάδι}}$

Πίνακας 2.1: Συμπερασματικοί Κανόνες

2.10.2 Παράδειγμα. Ας εξετάσουμε το σχήμα ΣK_2 το Modus Tollens

1ος τρόπος: Από τον αληθοπίνακα των προτάσεων που το απαρτίζουν:

[2] Με το «απλή ισοδυναμία» εννοούμε απλά ότι, $\varphi', \psi' \in \Pi_2$ και $\varphi' \equiv \psi'$

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Βλέπουμε ότι σε κάθε απονομή τιμών που δίνει την αληθοτιμή α στις προκείμενες $A \to B$ και $\neg B$ δίνει την ίδια αληθοτιμή α και στο συμπέρασμα $\neg A$.

2ος τρόπος: Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Χρύσσιπου.

Θα πρέπει η πρόταση:

$$((A \to B) \wedge (\neg B)) \to \neg A$$

να είναι ταυτολογία. Αυτό ελέγχεται είτε με συμπλήρωση του παραπάνω αληθοπίνακα είτε πραγματοποιώντας τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
((A \to B) \wedge \neg B) \to (\neg A) &\equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B)) \vee (\neg A) \quad \text{από την ιδιότητα (8)} \\
&\equiv \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg B)) \vee (\neg A) \quad \text{επιμεριστικοί νόμοί} \\
&\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A) \\
&\equiv A \vee B \vee \neg A \\
&\equiv A \vee \neg A \vee B \\
&\equiv \top
\end{aligned}$$

3ος τρόπος: Χρησιμοποιώντας το ΣK_1, δηλαδή το Modus Ponens. Αντικαθιστούμε στο δοσμένο σχήμα την πρώτη προκείμενη από μια ισοδύναμή της την $\neg B \longrightarrow \neg A$:

$$\begin{array}{l} A \to B, \\ \underline{\neg B \qquad\quad} \\ \neg A \end{array}$$

παίρνουμε το Modus Ponens.

$$\begin{array}{l} \neg B \to \neg A, \\ \underline{\neg B \qquad\quad} \\ \neg A \end{array}$$

2.10.3 Παράδειγμα. Ας εξετάσουμε τώρα αν το σχήμα του υποθετικού συλλογισμού ΣK_7 είναι ορθό.

1ος τρόπος: Από τον αληθοπίνακα των προτάσεων που απαρτίζουν το συλλογισμό:

A	B	Γ	$A \to B$	$B \to \Gamma$	$A \to \Gamma$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Βλέπουμε ότι σε κάθε απονομή τιμών που δίνει την αληθοτιμή 1 στις προκείμενες $A \to B$ και $B \to \Gamma$ δίνει την ίδια αληθοτιμή 1 και στο συμπέρασμα $A \to \Gamma$. Δεν υπάρχει λοιπόν περίπτωση οι προκείμενες να είναι αληθινές και το συμπέρασμα όχι.

2ος τρόπος: Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Χρύσσιπου, θα πρέπει η πρόταση

$$((A \to B) \wedge (B \to \Gamma)) \to (A \to \Gamma)$$

να είναι ταυτολογία. Αυτό ελέγχεται είτε με συμπλήρωση του παραπάνω αληθοπίνακα είτε πραγματοποιώντας τις πράξεις. Το αφήνουμε στο αναγνώστη ως άσκηση.

2.10.4 Παράδειγμα. Δίδεται προς έλεγχο ο συλλογισμός:

Αν η αγάπη είναι τυφλή τότε ο δικαστικός είναι πληρωμένος. Όμως η αγάπη είναι τυφλή ή ο κυβερνήτης λέει ψέματα. Αν αληθεύει ότι δικαστικός είναι πληρωμένος. Άρα ο κυβερνήτης λέει ψέματα

Αντικαθιστούμε τις προτάσεις με σύμβολα:

η αγάπη είναι τυφλή με A

ο δικαστικός είναι πληρωμένος με B

ο κυβερνήτης λέει ψέματα με Γ

Τότε ο συλλογισμός γράφεται:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \vee \Gamma \\ \underline{\neg B \qquad\quad} \\ \Gamma \end{array}$$

Ο έλεγχος μπορεί να γίνει σταδιακά με βάση τα οχτώ συμπερασματικά σχήματα που δώσαμε στον Πίνακα 2.1: από τον ΣK_2

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

Από το ΣK_6 (τον διαζευκτικό συλλογισμό)

$$\begin{array}{l} A \vee \Gamma \\ \neg A \\ \hline \Gamma \end{array}$$

2.10.5 Ασκήσεις. 1. Αποδείξτε με όλους του τρόπους που γνωρίζεται ότι οι συμπερασματικοί κανόνες του Πίνακα 2.1 είναι όλοι ορθοί.

2. Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα είναι ανεξάρτητα:

   i) $\{A \rightarrow B, B \rightarrow \Gamma, \Gamma \rightarrow A\}$

   ii) $\{A \vee B, A \rightarrow \Gamma, B \rightarrow \Gamma, \Psi \neg A \rightarrow (B \vee \Gamma)\}$

   iii) $\{A, B, A \rightarrow \Gamma, \Gamma \rightarrow B\}$

   iv) $\{A, A \wedge B, A \wedge B \wedge \Gamma, A \wedge B \wedge \Gamma \wedge \Delta, \}$

3. Εάν Σ_1 και Σ_2 δύο σύνολα προτάσεων του Π.Λ. και A , B δύο προτάσεις τέτοιες ώστε : $\Sigma_1 \models (A \rightarrow B)$ και $\Sigma_2 \models (A \wedge \neg B)$. Εξετάστε αν το $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ είναι ικανοποιήσιμο.

4. Έστω $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ προτάσεις . Εξετάστε ποια από τις παρακάτω σχέσεις ισχύει.(Αποδείξτε οποιοδήποτε ισχυρισμό σας.)

   a) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ συνεπές $\Leftrightarrow \models \neg(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge, \ldots, \wedge \sigma_n)$

   b) $\models \neg(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge, \ldots, \wedge \sigma_n) \Leftrightarrow \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge, \ldots, \wedge \sigma_{n-1} \rightarrow \neg \sigma_n$

   c) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ συνεπές $\Leftrightarrow \neg(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge, \ldots, \wedge \sigma_n)$

5. Εξετάστε αν τα $A, A \rightarrow \Gamma$ και$A \leftrightarrow B, B, \Gamma$ σύνολα είναι ισοδύναμα.

6. Έστω Σ_1 και Σ_2 δύο σύνολα προτάσεων. Για όποια από τις παρακάτω σχέσεις ισχύει δώστε απόδειξη και αντιπαράδειγμα για όποια δεν ισχύει.

   i) $\mathbf{\Sigma\upsilon\nu}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \mathbf{\Sigma\upsilon\nu}(\Sigma_1) \cup \mathbf{\Sigma\upsilon\nu}(\Sigma_2)$

   ii) $\mathbf{\Sigma\upsilon\nu}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = \mathbf{\Sigma\upsilon\nu}(\Sigma_1) \cap \mathbf{\Sigma\upsilon\nu}(\Sigma_2)$

7. Έστω ένα σύνολο προτάσεων το Σ και σ_1 και σ_2 προτάσεις. Να αποδειχθεί ότι:
$$\Sigma \cup \sigma_1 \models \sigma_2 \Rightarrow \Sigma \models \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$$

8. Έστω ένα οποιοδήποτε σύνολο προτάσεων, το Σ. Τότε:

   i) Αν το Σ είναι πεπερασμένο δείξτε ότι υπάρχει ανεξάρτητο υποσύνολό του ισοδύναμο με αυτό.

   ii) Ισχύει το ίδιο αν το Σ είναι αριθμησίμως άπειρο·

9. Εξετάστε ποιοι από τους παρακάτω συλλογισμούς είναι ορθοί και ποιοι όχι.

   i) *Αν είναι μέρα, τότε έχει φώς. Αν έχει φως, ο Σωκράτης περιπατεί. Όμως δεν αληθεύει ότι ο Σωκράτης περιπατεί. Άρα δεν είναι μέρα.*

   ii) *Είναι δεδομένο ότι* $\chi \cdot \psi = 0$. Αλλά $\psi \neq 0$. Αν δε $\zeta = 0$ τότε $\xi \neq 0$. Οπότε $\zeta \neq 1$

   iii) *Είναι νύχτα ή έχει φως. Όμως δεν έχει φως. Αν δε ο Σωκράτης περιπατεί τότε δεν είναι νύχτα. Άρα ο Σωκράτης δεν περιπατεί.*

   iv) *Αν είναι μέρα τότε, έχει φως και ο Σωκράτης σκέφτεται. Αν έχει φως ο Σωκράτης διδάσκει. Αν δε ο Σωκράτης σκέφτεται ο Σωκράτης διαβάζει. Όμως αν ο Σωκράτης διαβάζει και διδάσκει τότε δεν είναι σοφός. Αλλά ο Σωκράτης είναι σοφός. Οπότε δεν είναι μέρα.*

   v) *Εάν δεν αποκαλυφθεί το έγκλημα φταίει ο ανακριτής. Εάν φταίει ο ανακριτής, πρέπει να απαλλαγεί από τα καθήκοντά του. Άρα εάν αποκαλυφθεί το έγκλημα, ο ανακριτής δεν πρέπει να απαλλαγεί από τα καθήκοντά του.*

10. Εξετάστε ποιοι από τους παρακάτω συλλογισμούς είναι ορθοί και ποιοι όχι.

   i)

$$\begin{array}{l} A \\ \neg B \\ (A \wedge \neg B) \to \Gamma \\ \hline \Gamma \end{array}$$

   ii)

$$\begin{array}{l} (A \to \neg B \\ \Gamma \to B \\ \neg\Gamma \to \Delta \\ \hline A \to \Delta \end{array}$$

   iii)

$$\begin{array}{l} \neg A \vee B \\ \neg B \wedge \Gamma \\ \neg(A \vee B) \to \Delta \\ \hline \Gamma \wedge \Delta \end{array}$$

iv)

$$\begin{array}{l} A \leftrightarrow B \\ \underline{\neg A \qquad\quad} \\ B \end{array}$$

v)

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg B \\ (B \wedge \neg \Gamma) \vee E \\ \underline{(\Delta \vee E) \rightarrow \Gamma} \\ \Gamma \wedge \neg B \end{array}$$

vi)

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \Gamma \rightarrow \Delta \\ \neg B \vee \neg \Delta \\ A \\ \underline{(E \wedge Z) \rightarrow \Gamma} \\ \neg E \vee \neg Z \end{array}$$

Κεφάλαιο 3

ΤΥΠΙΚΑ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ

3.1 Εννοιολογική Εισαγωγή

Το βασικό θέμα της Λογικής είναι η μελέτη του κατά πόσο κάποιες αφηρημένες εκδοχές των επιχειρημάτων είναι ή όχι «ορθές». Έτσι λοιπόν θα πρέπει να καθορίσουμε με αυστηρό τρόπο:

1. Τι είναι «επιχείρημα».

2. Τι είναι «ορθό επιχείρημα».

3. Πως θα διατυπώσουμε αυστηρά τις συνθήκες για τα ορθά επιχειρήματα και

4. Πως θα ανεξαρτητοποιήσουμε τις συνθήκες αυτές από τον κλάδο, στον οποίο δυνατόν να αναφέρονται.

Η μαθηματικοποίηση του πιο πάνω προγράμματος είναι αντικείμενο του μαθήματος αυτού.

Διαισθητικά όταν λέμε *ορθό επιχείρημα* εννοούμε ότι, *η αλήθεια των προκείμενων προτάσεων συνεπάγεται και την αλήθεια του συμπεράσματος*.

Έχουμε ήδη ορίσει με επαγωγικό τρόπο το σύνολο των προτάσεων Π. Έχουμε επίσης ορίσει τη σχέση της λογικής συνέπειας $\models\subseteq\mathscr{P}(\Pi)\times\Pi$, δηλαδή αν $\Sigma\in\mathscr{P}(\Pi)$ και $\varphi\in\Pi$, τότε, $\Sigma\models\varphi$ ανν για κάθε αποτίμηση αλήθειας,

$$\hat{v}:\Pi\longrightarrow\{0,1\},$$

έχουμε ότι, $\hat{v}(\psi) = 1$ για κάθε $\psi \in \Sigma$, συνεπάγεται ότι $\hat{v}(\psi) = 1$.

Γενικά όπως έχουμε ήδη συζητήσει, ένα *λογικό επιχείρημα*, αποτελείται απο μια πεπερασμένη ακολουθία προτασιακών τύπων, ο τελευταίος των οποίων, συμπίπτει με την προς απόδειξη πρόταση, και κάθε αποτίμηση που επαληθεύει τις $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ επαληθεύει και την πρόταση φ. Συμβολικά αν $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ είναι μια τέτοια πεπερασμένη ακολουθία (ένα λογικό επιχείρημα), θα το συμβολίζουμε και ως,

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

ή και $\Sigma \models \varphi$ με $\Sigma := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Από τον ορισμό του $\Sigma \models \varphi$ είναι φανερό ότι ένα λογικό επιχείρημα είναι ορθό.

Βλέπουμε λοιπόν ότι δοθέντος ενός λογικού επιχειρήματος έχουμε απαντήσει στα 1.,2., και 3., πιο πάνω ενώ το 4., η ανεξαρτησία από το σημασιολογικό υπόβαθρο το κλάδου στον οποίο δυνατόν να αναφέρεται το επιχείρημα, έχει πραγματωθεί στον ορισμό της αποτίμησης αληθείας.

Θα θέλαμε στη συνέχεια *να ορίσουμε την έννοια του επιχειρήματος συντακτικά*, μέσα δηλαδή στη γλώσσα μας, χωρίς καμμία αναφορά σε σημασιολογικές έννοιες (αποτιμήσεις, εκτιμήσεις, πίνακες αληθείας, κ.λπ.). Αυτό το βήμα θα έδινε μια τελική συντακτική απάντηση στο 4.

Σ' αυτή την τελευταία αφαίρεση, οδηγός μας, αλλά και αυτό που αποτελεί την προς αφαίρεση πραγματικότητα είναι η έννοια της λογικής συνέπειας:

$$\Sigma \models \varphi$$

Ζητάμε λοιπόν να καθορίσουμε μια συντακτική σχέση, τη σχέση της *τυπικής απόδειξης, ή συντακτικής συνέπειας*, $\Sigma \vdash \varphi$ στην οποία να αντανακλώνται με *φυσικό* τρόπο, δηλαδή πιστά, όλες οι ιδιότητες της λογικής συνέπειας $\Sigma \models \varphi$. Ο βασικός λοιπόν στόχος μας είναι η σχέση

$$\vdash \subseteq \mathscr{P}(\Pi) \times \Pi$$

να κωδικοποιεί πιστά στο εσωτερικό της τυπικής γλώσσας όλη τη δομή και τις ιδιότητες της λογικής συνέπειας,

$$\models \subseteq \mathscr{P}(\Pi) \times \Pi.$$

Ο ακόλουθος Ορισμός 3.2.2, είναι ο ζητούμενος, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Ας δούμε τον τρόπο με τον οποίο μια σημασιολογική πληροφορία, που δίδεται σηνήθως με τους πίνακες αληθείας, κωδικοποιείται στη τυπική γλώσσα. Ας θεωρήσουμε το πίνακα αληθείας του συνδέσμου,

σ	τ	$\sigma \wedge \tau$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Την πιο πάνω λογική πληροφορία μπορούμε να την κωδικοποιήσουμε στην τυπική μας γλώσσα με τους ακόλουθους συλλογισμούς:

$$\frac{A, B}{A \wedge B} \qquad \frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Πράγματι, τα στοιχεία του κάθε συλλογισμού είναι τυπικές προτάσεις και για παράδειγμα, ο συλλογισμός, $A, B, A \wedge B$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία, προτασιακών τύπων, όπου οι A και B είναι οι υποθέσεις και η $A \wedge B$ το συμπέρασμα του τυπικού συλλογισμού. Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στην κωδικοποίηση των υπολοίπων πινάκων αληθείας, παίρνοντας τελικά το πίνακα των συμπερασματικών κανόνων του Πίνακα 2.1.

Τέλος θα πρέπει να μελετήσουμε τις συσχετίσεις των δύο αυτών σχέσεων, που μας οδηγούν στα δύο σπουδαία θεωρήματα του Προτασιακού Λογισμού:

Το Θεώρημα Ορθότητας. Η σχέση $\Sigma \vdash \varphi$ συνεπάγεται την σχέση $\Sigma \models \varphi$

Το Θεώρημα της Επάρκειας. Η σχέση $\Sigma \models \varphi$ συνεπάγεται την σχέση $\Sigma \vdash \varphi$

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω θεωρήματα παίρνουμε το βασικό Θεώρημα,

Το Θεώρημα Πληρότητας. Η σχέσεις $\Sigma \vdash \varphi$ και $\Sigma \models \varphi$ είναι ισοδύναμες, δηλαδή,

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \text{ανν} \quad \Sigma \models \varphi.$$

Η προτασιακή λογική λοιπόν, μπορεί να παρουσιασθεί, με συντακτικό τρόπο, ως ένα σύστημα τυπικών αποδείξεων. Το σύστημα αυτό έχει στόχο να συλλάβει και να χαρακτηρίσει τις αληθείς προτάσεις της προτασιακής λογικής με συντακτικά μέσα, δηλαδή με τη χρήση της γλώσσας της προτασιακής λογικής, και με την ανάπτυξη ενός τυπικού συστήματος απόδειξης, με *συντακτικά μέσα*. Υπάρχουν αρκετά διαφορετικά συστήματα τυπικών αποδείξεων. Τα κυριώτερα απ' αυτά είναι, **το Αξιωματικό Αποδεικτικό Τυπικό Σύστημα του Hilbert**, **το Σύστημα των Σημασιολογικών Ταμπλό**, **το σύστημα της Φυσικής Απαγωγής** (natural deduction), με αρκετές παραλαγές, και **το σύστημα του Λογιαμού των Ακολουθημάτων** (sequent calculus). Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μερικά από αυτά τα συστήματα.

3.2 Αξιωματικά Τυπικά Συστήματα

3.2.1 Το Αξιωματικό Τυπικό Σύστημα του Hilbert[1]

Το σύστημα αυτό αποτελείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

1. Την επιλογή ενός επαρκούς συνόλου λογικών συνδέσμων. Συνήθως επιλέγουμε το $\{\neg, \rightarrow\}$.

2. Την επιλογή ενός υποσυνόλου προτάσεων **Αξ**$\subseteq \Pi$, που παίζουν το ρόλο των αξιωμάτων, και τα οποία ορίζουν έμμεσα την συμπεριφορά των επιλεγμένων λογικών συνδέσμων. Στην περίπτωση που εξετάζουμε εδώ επιλέγουμε τα ακόλουθα αξιώματα του Łukasiewicz (προφέρεται στα Πωλωνικά, 'Γουοκασιέβιτς'):

   Αξ$_1$: $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)$

   Αξ$_2$: $(\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$

   Αξ$_3$: $(\neg\chi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

3.2.1 Σχόλιο. **(α)** Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε αξίωμα είναι στην ουσία ένα αξιωματικό 'σχήμα', το οποίο δηλαδή έχει άπειρες περιπτώσεις αντικατάστασης, μία για κάθε $\varphi, \chi, \psi \in \Pi$.

(β) Από το νόμο της μεταφοράς:

$$(\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \equiv ((\phi \wedge \chi) \rightarrow \psi)$$

έχουμε ότι: Το αξίωμα Αξ$_1$: είναι στην ουσία ισοδύναμο με το,

$$((\phi \wedge \chi) \rightarrow \phi)$$

που είναι προφανές, αφού το $\phi \wedge \chi$ αναμένουμε να έχει ως συνέπεια την ϕ.

Το Αξ$_2$: εκφράζει μια αλγεβρική ιδιότητα του συνδέσμου $\rightarrow$, που θυμίζει 'επιμεριστικότητα'. Τέλος το Αξ$_3$: είναι ο αντιθετοαντίστροφος (ή ανταντίθετος) αποδεικτικός κανόνας που σχετίζεται με τον κανόνα Modus Tollens: $\neg\chi \wedge (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow \neg\phi$.

[1]Ένα αρχικό αποδεικτικό σύστημα είχε προταθεί από τον Frege και περιείχε έξη αξιώματα. Το σύστημα αυτό απλοποιήθηκε από τον Łukasiewicz το 1928, και είναι αυτό που χρησιμοποιούμε εδώ. Το σύστημα αυτό είναι κατά κάποιο τρόπο ελάχιστο, έχει μόνον τρία αξιώματα και έναν συμπερασματικό κανόνα. Το σύστημα αποδίδεται στον Hilbert λόγω της χρήσης του στο διάσημο πρόγραμμα Hilbert. Πιό ορθά θα μπορούσε κανεις να το αποκαλεί Frege-Łukasiewicz-Hilbert, (FŁH).

3. Την επιλογή ενός συνόλου συμπερασματικών κανόνων. Στη περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, συνήθως επιλέγουμε έναν κανόνα, τον κανόνα Modus Ponens (MP):
$$\frac{\varphi, \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$
Με λόγια, από την φ και την $\varphi \to \psi$, συμπεραίνουμε την ψ.

Συνοψίζοντας έχουμε το ακόλουθο τυπικό αποδεικτικό σύστημα:

Αξιωματικό Αποδεικτικό Σύστημα του Hilbert

Σύνδεσμοι: $\{\neg, \rightarrow\}$

Αξιώματα:

Αξ$_1$: $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)$

Αξ$_2$: $(\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$

Αξ$_3$: $(\neg\chi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

Συμπερασματικοί Κανόνες: Ο κανόνας Modus Ponens.

Η έννοια της απόδειξης δίνεται στον ακόλουθο Ορισμό:

3.2.2 Ορισμός. Έστω $\Sigma \subseteq \Pi$ ένα υποσύνολο προτάσεων. Μια **απόδειξη**, της φ από το Σ, συμβολικά, $\Sigma \vdash \varphi$, είναι μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi$, τέτοια ώστε, για κάθε $i = 1, \dots, n$, φ_i είναι ή

α) ένα αξίωμα, ή

β) είναι ένα στοιχείο του Σ, ή

γ) είναι συμπέρασμα προηγούμενων μελών της ακολουθίας, μέσω του (MP), δηλ. υπάρχουν μέλη της πεπρασμένης ακολουθίας, $\varphi_j, \varphi_k \quad j, k < i$ τέτοια ώστε $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$ και έτσι από τις $\varphi_j, \varphi_k \quad j, k < i$ συμπεραίνουμε την φ_i, με τον (MP).

Άν το Σ είναι κενό και $\Sigma \vdash \varphi$, τότε θα λέμε ότι το φ, είναι ένα **θεώρημα**, και θα γράφουμε απλά, $\vdash \varphi$.

Ένα από τα βασικά αποτελέσματα του Προτασιακού Λογισμού είναι ότι τα διάφορα συστήματα καθορισμού ή παρουσίασης της σχέσης $\Sigma \vdash \varphi$ μπορούν να μεταφασθούν στα άλλα συστήματα.

Η μελέτη του **συντακτικού χαρακτηρισμού** της σχέσης της συνέπειας $\models$, δηλαδή η μελέτη της σχέσης $\vdash$ λέγεται Θεωρία Αποδείξεων.

Κάθε παρουσίαση της σχέσης $\vdash$, καθορίζει και μια συντακτική συνέπεια ως εξής:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \text{ανν υπάρχει μια απόδειξη του } \varphi \text{ από το } \Sigma$$

Το τελικό πρόβλημα λοιπόν είναι πως θα κατορθώσουμε να κωδικοποιήσουμε στην τυπική μας γλώσσα, την λογική πληροφορία που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες αληθείας όλων των λογικών συνδέσμων. Με τον τρόπο αυτό αντανακλούμε πιστά τις ιδιότητες της «λογικής συνέπειας» $\models$ στην «συντακτική συνέπεια» ή «απόδειξη» $\vdash$.

3.2.3 Παράδειγμα. Να αποδειχθεί ο τύπος, $(A \to A)$ δηλ. να δειχθεί ότι, $\vdash (A \to A)$.

Απόδ.: Πρέπει με τη χρήση των τριών αξιωμάτων και τον κανόνα Modus Ponens να καταλήξουμε στην πρόταση $(A \to A)$. Τα αξιώματα που περιέχουν μόνον συνεπαγωγές είναι το πρώτο αλλά και το δεύτερο. Ας επιλέξουμε πρώτα το πρώτο αξίωμα. Επιλέγουμε ως φ το A, ως χ την $B \to A$ οπότε έχουμε,

(1) $\varphi_1 := (A \to ((B \to A) \to A)$ (Αξ$_1$)

(2) $\varphi_2 := (A \to ((B \to A) \to A) \to (((A \to (B \to A)) \to (A \to A)$ (Αξ$_2$)

(3) $\varphi_3 := (A \to (B \to A) \to (A \to A)$ $(1), (2), (MP)$.

(4) $\varphi_4 := (A \to (B \to A))$ (Αξ$_1$)

(5) $\varphi_5 := (A \to A)$ $(3), (4) + (MP)$.

Έτσι η παπερασμένη ακολουθία $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 = \varphi)$ αποτελεί μια απόδειξη της $\vdash (A \to A)$.

Μπορούμε επίσης να αρχίσουμε και με το Αξ$_2$, λαμβάνοντας την φ ως την A, την χ ως την $(A \to A)$ και την ψ ως την A, οπότε έχουμε στη σειρά:

(1) $\varphi_1 := (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (Αξ$_2$)

(2) $\varphi_2 := (A \to ((A \to A) \to A))$ (Αξ$_1$)

(3) $\varphi_3 := ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ $(1), (2)(MP)$

(4) $\varphi_4 := (A \to (A \to A)$ (Αξ$_1$)

(5) $\varphi_5 := (A \to A)$ $(3), (4)(MP)$.

Έτσι η πεπερασμένη ακολουθία $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 = \varphi)$ αποτελεί μια απόδειξη για την πρόταση $(A \to A)$.

3.2.4 Λήμμα. *Αν $\Sigma \vdash \varphi$ και $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$ τότε $\Sigma \vdash \psi$.*

Απόδ.: Έστω $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ μια Σ-απόδειξη της φ, και έστω $(\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n)$ μια Σ-απόδειξη της $(\varphi \to \psi)$. Τότε η ακολουθία $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$ είναι μια Σ-απόδειξη της ψ. ⊣

3.2.2 Άλλα Αξιωματικά Τυπικά Συστήματα.

Το πιο πάνω αξιωματικό σύστημα του Hilbert είναι ίσως το πιό «οικονομικό», περιέχει ένα μικρό αριθμό αξιωμάτων (3) και έναν συμπερασματικό κανόνα. Λόγω αυτού του γεγονότος οι αποδείξεις είναι συνήθως μεγάλες. Θα μπορούσαμε να πάμε στο άλλο άκρο, να υποθέσουμε δηλαδή όλους τους τύπους της μορφής, $\varphi \lor \neg\varphi$ ώς αξιώματα και όλους τους συμπερασματικούς κανόνες του Πίνακα 2.1, καθώς επίσης και την απλή αντικατάσταση (ΑΑ), ως κανόνες του τυπικού αποδεικτικού συστήματος. Αυτό το κάνουμε με την ελπίδα ότι οι αποδείξεις θα γίνουν πολύ μικρότερες. Καταλήγουμε έτσι στο ακόλουθο εναλλακτικό αξιωματικό αποδεικτικό σύστημα:

Σύνδεσμοι: $\lor, \land, \neg, \leftrightarrow, \to, \bot, \top$
Αξιώματα: $\varphi \lor \neg\varphi$
Συμπερασματικοί Κανόνες: Οι κανόνες του Πίνακα 2.1, και η (ΑΑ).
Η έννοια της απόδειξης είναι αυτή που ορίσαμε ανωτέρω, βλ. Ορισμός 3.2.2.

Ας δούμε ένα παράδειγμα του νέου αποδεικτικού συστήματος.

3.2.5 Παράδειγμα. Να δειχθεί ότι το αξίωμα Αξ$_1$ του αξιωματικού συστήματος του Hilbert, είναι ένα τυπικό θεώρημα, στο νέο μας σύστημα.

Απόδ.:

1. $\varphi \lor \neg\varphi$ — αξίωμα.
2. $\neg\varphi \lor \varphi$ — (ΑΑ) στην 1. με χρήση της $\varphi \lor \psi \equiv \psi \lor \varphi$.
3. $(\neg\varphi \lor \varphi) \lor \neg\psi$ — (ΣK_4): 2.

4. $\neg\varphi \vee (\varphi \vee \neg\psi)$ (ΑΑ) στην 3. με χρήση της $(\neg\varphi \vee \varphi) \vee \psi \equiv \neg\varphi \vee (\varphi \vee \psi)$.

5. $\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \varphi)$ (ΑΑ) στην 4. με χρήση της $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$.

6. $\neg\varphi \vee (\psi \to \varphi)$ (ΑΑ) στην 5. με χρήση της $\neg\psi \vee \varphi \equiv \psi \to \varphi$.

7. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ (ΑΑ) στην 6. με χρήση της $\neg\psi \vee \varphi \equiv \psi \to \varphi$. ⊣

Ένα ενδιάμεσο σύστημα είναι το ακόλουθο:

Σύνδεσμοι: $\{\neg, \vee, \wedge, \to\}$
Αξιώματα:

$\text{Αξ}_1 : \varphi \to (\chi \to \varphi)$

$\text{Αξ}_2 : (\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$

$\text{Αξ}_3 : (\varphi \wedge \psi) \to \psi, \quad (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

$\text{Αξ}_4 : \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

$\text{Αξ}_5 : \varphi \to (\varphi \vee \psi), \quad \psi \to (\varphi \vee \psi)$

$\text{Αξ}_6 : (\varphi \to \psi) \to [(\chi \to \psi) \to ((\varphi \vee \chi) \to \psi)]$

$\text{Αξ}_7 : (\varphi \to \psi) \to [(\varphi \to \neg\chi) \to \neg\phi]$

$\text{Αξ}_8 : \neg\neg\varphi \to \varphi$

Συμπερασματικοί Κανόνες: Ο κανόνας Modus Ponens.
Η έννοια της απόδειξης είναι πάντοτε η ίδια.

3.3 Η Μέθοδος των Ταμπλό ή Δένδρων Αλήθειας

Η μέθοδος των ταμπλό είναι μια μέθοδος «διάψευσης» που στην ουσία είναι μια δενδρική παρουσίαση της παλιάς και γνωστής αποδεικτικής μεθόδου της εις άτοπον απαγωγής. Έτσι στη μέθοδο αυτή υποθέτουμε ως αληθείς τις προκείμενες και ταυτόχρονα υποθέτουμε ως αληθή της άρνηση του συμπεράσματος, και προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι όλα τα κλαδιά του δένδρου οδηγούν σε αντίφαση. Επί πλέον η μέθοδος των ταμπλό, λέγεται και μέθοδος των σημασιολογικών ταμπλό, ακριβώς γιατί είναι εξαιρετικά «φυσική», με την έννοια ότι έχει μεγάλη συμφωνία και εξομοιώνει με εξαιρετική πιστότητα τους πίνακες αληθείας. Ίσως αυτός είναι ο λόγος που πίνακας (table) και ταμπλό σημαίνει το ίδιο πράγμα.

Ως σύστημα είναι περισσότερο συνδεδεμένο με την *διαζευκτική κανονική μορφή*, με την έννοια ότι η μέθοδος παίρνει τη μορφή ενός δένδρου, διαφορετικού του γενεαλογικού δένδρου ένος τύπου, όπου οι κορυφές του δένδρου έχουν ως ετικέτα έναν προτασιακό τύπο, οι κλάδοι παριστάνουν τη σύζευξη όλων των προτασιακών τύπων που εμφανίζονται στον συγκεκριμένο κλάδο, ολόκληρο δε το δένδρο παριστάνει τη διάζευξη των κλάδων του (συζεύξεων).

Πρίν προχωρήσουμε αξίζει να σημειώσουμε τους παρακάτω συλλογισμούς που είναι αληθείς κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία:

1) Αν $\neg\varphi$ είναι αληθής τότε φ είναι ψευδής και Αν $\neg\varphi$ είναι ψευδής τότε φ είναι αληθής.

2) Αν μια σύζευξη $\varphi \wedge \psi$ είναι αληθής, τότε και η φ και η ψ είναι αληθείς, αν δε ο $\varphi \wedge \psi$ είναι ψευδής τότε ή ο φ είναι ψευδής ή ο ψ είναι ψευδής.

3) Αν μια διάζευξη $\varphi \vee \psi$ είναι αληθής τότε η φ, η ψ είναι αληθείς, αν δε η διάζευξη $\varphi \vee \psi$ είναι ψευδής, τότε και η φ και η ψ είναι ψευδείς.

4) Αν $\varphi \to \psi$ είναι αληθής, τότε ο φ είναι ψευδής και ο ψ είναι αληθής, αν δε ο $\varphi \to \psi$ είναι ψευδής τότε ο ο φ είναι αληθής και ο ψ είναι ψευδής.

Οι πιό πάνω συλλογισμοί μας παρέχουν τη βάση για να ενσωματώσουμε συντακτικά στην μέθοδο των ταμπλό, την πληροφορία των πινάκων αλήθειας.

Η μέθοδος των ταμπλό μπορεί να αναπτυχθεί με δύο ισοδύναμους τρόπους. Με τη χρήση προσημασμένων τύπων και με τη χρήση συνηθισμένων τύπων. Οι προσημασμένοι τύποι εισάγονται κυρίως για να δειχθεί περισσότερο η συμφωνία της μεθόδου των ταμπλό με τους πίναες αλήθειας. Επειδή κάθε κλάδος ενός ταμπλό-δένδρου είναι στην ουσία ένας συλλογισμός που αποτελείται από μια πεπρασμένη ακολουθία τύπων, θα πρέπει να εισάγουμε δύο επιπρόσθετα σύμβολα στη γλώσσα του προτασιακού λογισμού: το σύμβολο '**α**', που όταν προηγείται ενός συνηθισμένου τύπου σημαίνει διαισθητικά ότι ο τύπος είναι αληθής και το σύμβολο '**ψ**' που όταν προηγείται ενός προτασιακού τύπου σημαίνει διαισθητικά ότι ο τύπος είναι ψευδής.

3.3.1 Ορισμός. Ένας **προσημασμένος τύπος** είναι ένας τύπος της μορφής $\boldsymbol{\alpha}\varphi$ ή $\boldsymbol{\psi}\varphi$ όπου $\varphi \in \Pi$ και $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\psi}$ είναι τα νεοεισαχθέντα στη γλώσσα μας σύμβολα. Έτσι οι συμβολοσειρές $\boldsymbol{\alpha}\varphi, \boldsymbol{\psi}\varphi$, αποτελούν πλέον τύπους της τυπικής γλώσσας της προτασιακής λογικής.

Μπορούμε όμως να χρησιμοποιούμε και μη-προσημασμένους ή συνηθισμένους προτασιακούς τύπους κατά την ανάπτυξη των ταμπλό. Παρ' όλο που οι προσημασμένοι τύποι είναι ίσως χρήσιμοι από διαισθητικής και ευρετικής απόψεως, δεν είναι παρ' όλα αυτά αναγκαστικά απαραίτητοι. Έτσι παραλήπουμε κάθε σύμβολο $\boldsymbol{\alpha}$ και αντικαθιστούμε τον τύπο $\boldsymbol{\psi}\varphi$ με τον τύπο $\neg\varphi$.

Διακρίνουμε τα ταμπλό σε δύο τύπους· Τα μη-διακλαδιζόμενα ή συζευκτικά ταμπλό, που θα τα συμβολίζουμε με σ-ταμπλό, και τα διακλαδιζόμενα ή διαζευκτικά ταμπλό που θα τα συμβολίζουμε με δ-ταμπλό [2].

Στη συνέχεια θα δώσουμε τα ατομικά ταμπλό και με προσημασμένη μορφή αλλά και μη-προσημασμένη μορφή.

[2]Στην διεθνή βιβλιογραφία συνήθως αντί του συμβολισμού σ-ταμπλό χρησιμοποιούν α-ταμπλό, και αντί του συμβολισμού δ-ταμπλό χρησιμοποιούν τον συμβολισμό β-ταμπλό. Εδώ αποφεύγουμε αυτόν το συμβολισμό αφού χρησιμοποιούμε το συμβολισμό α για άλλο σκοπό.

(ια) Μη-Διακλαδιζόμενα ή συζευκτικά Ταμπλό: Μη-προσημασμένη περίπτωση

$$\begin{array}{c} A_1 \wedge A_2 \\ | \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \\ \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A_1 \vee A_2) \\ | \\ \neg A_1 \\ \neg A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A_1 \to A_2) \\ | \\ A_1 \\ \neg A_2 \end{array}$$

(ιβ) Μη-Διακλαδιζόμενα ή συζευκτικά Ταμπλό: Προσημασμένη περίπτωση

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha}(A_1 \wedge A_2) \\ | \\ \boldsymbol{\alpha}A_1 \\ \boldsymbol{\alpha}A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boldsymbol{\psi}\neg A \\ | \\ \boldsymbol{\alpha}A \\ \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boldsymbol{\psi}(A_1 \vee A_2) \\ | \\ \boldsymbol{\psi}\, A_1 \\ \boldsymbol{\psi}\, A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boldsymbol{\psi}(A_1 \to A_2) \\ | \\ \boldsymbol{\alpha}A_1 \\ \boldsymbol{\psi}A_2 \end{array}$$

(ιια) Διακλαδιζόμενα ή διαζευκτικά Ταμπλό: Μη-προσημασμένη περίπτωση

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A_1 \wedge A_2)} \\ / & \backslash \\ \neg A_1 & \neg A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(A_1 \vee A_2)} \\ / & \backslash \\ A_1 & A_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(A_1 \to A_2)} \\ / & \backslash \\ \neg A_1 & A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(A_1 \leftrightarrow A_2)} \\ / & \backslash \\ A_1 & \neg A_1 \\ A_2 & \neg A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A_1 \leftrightarrow A_2)} \\ / & \backslash \\ A_1 & \neg A_1 \\ \neg A_2 & A_2 \end{array}$$

(ιιβ) Διακλαδιζόμενα ή διαζευκτικά Ταμπλό: Προσημασμένη περίπτωση

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{\psi}(A_1 \wedge A_2)} \\ / & \backslash \\ \boldsymbol{\psi}A_1 & \boldsymbol{\psi}A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{\alpha}(A_1 \vee A_2)} \\ / & \backslash \\ \boldsymbol{\alpha}A_1 & \boldsymbol{\alpha}A_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{\alpha}(A_1 \to A_2)} \\ / & \backslash \\ \boldsymbol{\psi}A_1 & \boldsymbol{\alpha}A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{\alpha}(A_1 \leftrightarrow A_2)} \\ / & \backslash \\ \boldsymbol{\alpha}A_1 & \boldsymbol{\psi}A_1 \\ \boldsymbol{\alpha}A_2 & \boldsymbol{\psi}A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{\psi}(A_1 \leftrightarrow A_2)} \\ / & \backslash \\ \boldsymbol{\alpha}A_1 & \boldsymbol{\psi}A_1 \\ \boldsymbol{\psi}A_2 & \boldsymbol{\alpha}A_2 \end{array}$$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τους πιό πάνω ορισμούς ως εξής:

Αν $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ δίδονται από το ακόλουθο πίνακα:

σ	σ_1	σ_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$

τότε τα μη-διακλαδιζόμενα ταμπλό συνοψίζονται στο ακόλουθο ατομικό ταμπλό:

$$\begin{array}{c} \sigma \\ | \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array}$$

Ομοίως, στην διακλαδιζόμενη περίπτωση, αν $\delta, \delta_1, \delta_2$ δίδονται από το ακόλουθο πίνακα:

δ	δ_1	δ_2
$A_1 \vee A_2$	A_1	A_2
$(A_1 \rightarrow A_2)$	$\neg A_1$	A_2
$\neg(A_1 \wedge A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$

τότε τα διακλαδιζόμενα ταμπλό συνοψίζονται στο ακόλουθο ατομικό ταμπλό:

$$\begin{tikzcd} & \delta \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \delta_1 & & \delta_2 \end{tikzcd}$$

Οι παραπάνω ορισμοί των ατομικών ταμπλό, μπορούν να επαναληφθούν κατά το επαγωγικό βήμα από τύπους στο Π_n σε τύπους στο Π_n^+, ολοκληρώνοντας έτσι το επαγωγικό ορισμό των ταμπλό.

3.3.2 Παράδειγμα. Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα κωδικοποίησης των πινάκων αλήθειας σε αντίστοιχα ταμπλώ. Έστω ο πίνακας αληθείας,

	A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$
γ_1	0	0	0
γ_2	0	1	0
γ_3	1	0	0
γ_4	1	1	1

Μπορούμε να παρουσιάσουμε την σημασιολογική πληροφορία του ανωτέρω πίνακα, με τη χρήση προσημασμένων προτασιακών τύπων. Η γραμμή γ_4 κωδικοποιείται με το ταμπλό,

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha}(A_1 \wedge A_2) \\ | \\ \boldsymbol{\alpha}A_1 \\ \boldsymbol{\alpha}A_2 \end{array}$$

που εκφράζει το γεγονός ότι αν ο προτασιακός τύπος $(A_1 \wedge A_2)$ είναι αληθής, τότε και οι προτασιακοί τύποι A_1 και A_2 είναι αληθείς. Οι γραμμές $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ κωδικοποιούνται ως:

$$\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{\psi}(A_1 \wedge A_2) & \\ / & & \backslash \\ \boldsymbol{\psi}A_1 & & \boldsymbol{\psi}A_2 \end{array}$$

δηλαδή αν ο $A_1 \wedge A_2$ είναι ψευδής, τότε και οι A_1 και A_2 είναι ψευδείς.

Συνοψίζοντας ο δοσμένος πίνακας αληθείας κωδικοποιείται με τα ακόλουθα ταμπλό:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha}(A_1 \wedge A_2) \\ | \\ \boldsymbol{\alpha}A_1 \\ \boldsymbol{\alpha}A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \boldsymbol{\psi}(A_1 \wedge A_2) & \\ / & & \backslash \\ \boldsymbol{\psi}A_1 & & \boldsymbol{\psi}A_2 \end{array}$$

Με τον ίδιο τρόπο καωδικοποιούμε και τους πίνακες αληθείας των συνδέσμων $\neg, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ και καταλήγουμε έτσι στά ατομικά ταμπλό.

Κανόνες Ανάπτυξης των Ταμπλό

1. Όταν ένας ή περισσότεροι π.τ. μπορούν να εφαρμοσθούν σε μια συγκεκριμένη κορυφή τότε κατά κανόνα εφαρμόζουμε πρώτα τους μη-διακλαδιζόμενους και στη συνέχεια τους διακλαδιζόμενους. Γενικά δίνουμε πάντοτε προτεραιότητα στους μη-διακλαδιζόμενους τύπους και αφού έχουμε αναπτύξει όλους αυτούς, αναπτύσσουμε στη συνέχεια και τους διακλαδιζόμενους. Κάθε τύπο που χρησιμοποιούμε τον τσεκάρουμε με ένα ✓, ώστε να αποφεύγονται λάθη και συγχίσεις.
2. Όταν έχουμε περισσότερους του ενός διακλαδιζόμενους τύπους σε μια κορυφή όπου ένας π.τ. χρησιμοποιήται, θέτουμε το ταμπλό του τύπου αυτού στο τέλος κάθε τέτοιου κλάδου.
3. Όταν ένας τύπος έχει χρησιμοποιηθεί, το ταμπλό του πρέπει να τοποθετηθεί σε κάθε ανοικτό κλάδο.

3.3.3 Ορισμός. **(i)** Ένας κλάδος ένος ταμπλό λέγεται **κλειστός** αν περιέχει το ζεύγος των προσημασμένων τύπων $(\mathbf{\alpha}\varphi, \mathbf{\psi}\varphi)$ ή το ζεύγος $(\varphi, \neg\varphi)$ στην μη-προσημασμένη περίπτωση, για κάποιο τύπο φ. Κάθε κλειστό κλάδο τον σηματοδοτούμε βάζοντας στο τέλος του το σύμβολο $\bigotimes$.

(ii) Ένα ταμπλό T θα λέγεται **κλειστό** αν κάθε κλάδος του είναι κλειστός.

(iii) Μια **απόδειξη ταμπλό** ενος π.τ. φ, συμβολικά $\vdash_T \varphi$, είναι ένα κλειστό ταμπλό για τον τύπο $\mathbf{\psi}\varphi$ ή τον $\neg\varphi$, στην μη-προσημασμένη περίπτωση.

3.3.4 Παράδειγμα. **(i)** Να αποδειχθεί ότι $\vdash_T \varphi$ όπου,

$$\varphi := (A \wedge (B \to (\Gamma \vee \Delta))) \to (A \vee B)$$

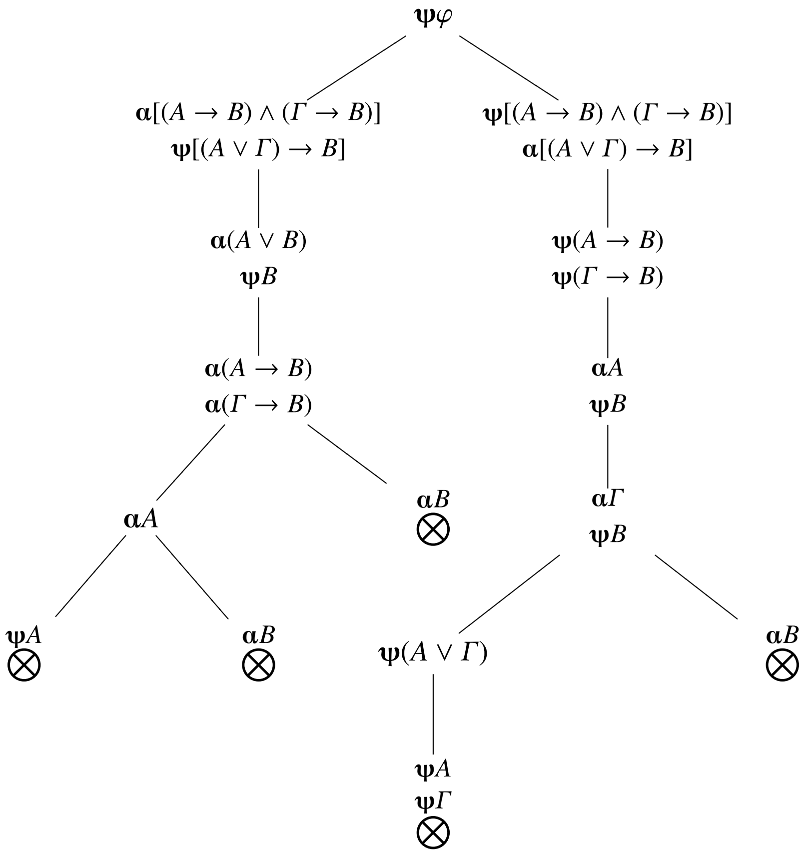
Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε μη-προσημασμένους τύπους.

$$
\begin{array}{c}
\neg\varphi \\
| \\
A \wedge (B \to (\Gamma \vee \Delta)) \\
\neg(A \vee B) \\
| \\
A \\
B \to (\Gamma \vee \Delta) \\
| \\
\neg A \\
\neg B \\
\otimes
\end{array}
$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι $\vdash_T \varphi$ όπου,

$$\varphi := [(A \to B) \wedge (\Gamma \to B) \leftrightarrow ((A \vee \Gamma) \to B)]$$

Λύση: Η στρατηγική της μεθόδου των ταμπλό είναι, όπως έχουμε πεί, στην ουσία η μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής. Προσπαθούμε δηλαδή να διαψεύσουμε την $\neg\varphi$, να δείξουμε δηλαδή ότι το ταμπλό της $\neg\varphi$, ή της $\boldsymbol{\psi}\varphi$ είναι κλειστό. Πράγματι,



Κεφάλαιο 4

ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΑΓΙΑΣ

4.1 Μια απόδειξη του Θεωρήματος

Το Θεώρημα της Συμπαγίας[1] είναι ένα από τα πιο ξεχωριστά αποτελέσματα της Μαθηματικής Λογικής. Μπορεί να διατυπωθεί τόσο στο πλαίσιο της Προτασιακής όσο και της Κατηγορηματικής Λογικής. Το Θεώρημα της Συμπαγίας για την Κατηγορηματική Λογική είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τα Μαθηματικά. Η χρησιμοποίησή του στα Μαθηματικά φωτίζει τον τρόπο που θεμελιώνονται ορισμένες κεντρικές έννοιες των Μαθηματικών, όπως αυτές του φυσικού και του πραγματικού αριθμού. Εμείς εδώ θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο Θεώρημα της Συμπαγίαςγια την Προτασιακή Λογική. Οντας ένα θεώρημα με τόσο μεγάλη σημασία αλλά και ιστορία είναι αναμενόμενο να έχει μια πληθώρα αποδείξεων. Θα σχεδιάσουμε μία απόδειξη που κάνει χρήση των δυαδικών δένδρων και του Λήμματος του König.

4.1.1 **Θεώρημα.** *Ένα σύνολο προτάσεων Σ είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.*

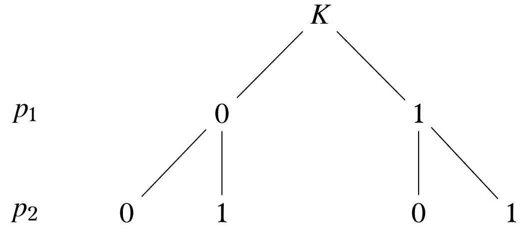
[1]Μερικοί Έλληνες συγγραφείς χρησιμοποιούν τον απαράδεκτο όρο 'συμπάγεια' για να αποδώσουν τον Αγγλικό όρο "compactness". Τα έγκυρα λεξικά του Δημητράκου αλλά και των Liddell-Scott, χρησιμοποιούν τον όρο 'συμπαγία' για κάτι που έχει την ιδιότητα του συμπαγούς. Αν λοιπόν έτσι έχουν τα πράγματα τότε το 'συμπάγεια' είναι σαν να χρησιμοποιούμε το 'ευτύχεια' αντί 'ευτυχία' ή το 'συζύγεια' αντί του 'συζυγία'. Αλλά και το 'συμπαγότητα' είναι πολύ πιό εύφωνο από το ανατριχιαστικά κακόηχο 'συμπάγεια'.

Απόδ.: Μπορούμε να κάνουμε για το Σ την εξής παραδοχή: Το Σ δεν περιέχει προτάσεις που ανά δύο είναι ταυτολογικά ισοδύναμες. Από τη στιγμή που μας ενδιαφέρει να βρούμε μια αποτίμηση που να γίνονται όλες οι προτάσεις του Σ αληθείς δεν έχει σημασία αν στο σύνολο βρίσκονται κι άλλες προτάσεις, που είναι ταυτολογικά ισοδύναμες με τις υπάρχουσες. Ούτως ή άλλως θα γίνονταν κι αυτές αληθείς.

Θεωρούμε λοιπόν ότι στις προτάσεις του συνόλου Σ εμφανίζονται οι προτασιακές μεταβλητές $p_1, p_2, ...$ Ας συμβολίσουμε με Σ_n το σύνολο των προτάσεων του Σ στις οποίες εμφανίζονται μόνο μεταβλητές μεταξύ των $p_1, p_2, ..., p_n$. Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι το σύνολο Σ_n είναι πεπερασμένο. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι, αφού διαφορετικές προτάσεις έχουν διαφορετικές στήλες αληθοτιμών (λόγω της παραδοχής που κάναμε παραπάνω), τότε υπάρχουν στο σύνολο αυτό τόσες προτάσεις όσοι και αληθοπίνακες σε n προτασιακές μεταβλητές. Ομως ένας αληθοπίνακας για n προτασιακές μεταβλητές είναι μία αντιστοίχιση των τιμών 0, 1 σε μία n-άδα αποτελούμενη από 0 και 1. Υπάρχουν 2^n n-άδες αποτελούμενες από 0 και 1 (= αποτιμήσεις των μεταβλητών $p_1, p_2, ..., p_n$). Υπάρχουν 2^{2^n} δυνατές αντιστοιχίσεις από 0 και 1 σε όλες τις δυνατές n-άδες που αποτελούνται από 0 και 1. Δηλαδή υπάρχουν το πολύ 2^{2^n} προτάσεις που οι φτιάχνονται χρησιμοποιώντας προτασιακές μεταβλητές **μεταξύ** των $p_1, p_2, ..., p_n$ Αρα υπάρχει πεπερασμένο πλήθος προτάσεων σε κάθε Σ_n.

Ψάχνουμε μία αποτίμηση που θα κάνει όλες τις προτάσεις του Σ αληθείς. Θα εμφανίσουμε τις αποτιμήσεις μεταβλητών ως μονοπάτια ενός δυαδικού δένδρου. Η ζητούμενη αποτίμηση θα προκύψει ως ένα άπειρο κλαδί αυτού του δένδρου. Αυτό γίνεται ως εξής:

Μία μεταβλητή μπορεί να πάρει τις τιμές 0 ή 1 κατά την αποτίμηση. Ετσι οι δυνατές αποτιμήσεις των δύο πρώτων μεταβλητών p_1, p_2 αποτυπώνονται στο δυαδικό δένδρο (με μια κορυφή που αυθαίρετα ονομάζουμε K)



όπου το μονοπάτι $(K, 0, 0)$ αντιστοιχεί στην αποτίμηση $v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 0$ ενώ το μονοπάτι $(K, 0, 1)$ αντιστοιχεί στην αποτίμηση $v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 1$ κλπ. Φυσικά αναπαριστώντας έτσι όλες τις δυνατές αποτιμήσεις του συνόλου των μεταβλητών $p_1, p_2, ...$ παίρνουμε ένα άπειρο δένδρο T. Υπάρχουν αποτιμήσεις που κάνουν όλες τις προτάσεις του Σ_n αληθείς. Αυτό συμβαίνει γιατί το Σ_n είναι πεπερασμένο υποσύνολο του Σ. Για κάθε πεπερασμένο πλήθος n μεταβλητών υπάρχουν λοιπόν μονοπάτια (ενδεχομένως περισσότερα από ένα) που ικανοποιούν τις προτάσεις του Σ_n.

Θεωρούμε την ένωση όλων αυτών των μονοπατιών. Θα μας δώσουν ένα υποδένδρο του T. Το υποδένδρο αυτό θα έχει αυθαίρετα μεγάλα κλαδιά. Επομένως θα έχει έναν άπειρο κλάδο, σύμφωνα με το λήμμα του König, το οποίο θα διατυπώσουμε και θα δείξουμε παρακάτω για την ειδική περίπτωση που μας απασχολεί εδώ, δηλαδή των δυαδικών δένδρων. Αυτός ο κλάδος αντιπροσωπεύει μία δυνατή αποτίμηση του συνόλου των μεταβλητών $p_1, p_2, ...$ Η αποτίμηση αυτή κάνει αληθείς όλες τις προτάσεις που φτιάχνονται διαδοχικά από τις μεταβλητές p_1, από τις μεταβλητές p_1, p_2,..., από τις μεταβλητές $p_1, p_2, ..., p_n$ και ούτω καθεξής. Εν τέλει κάνει αληθείς όλες τις προτάσεις του Σ. ⊣

4.1.2 Λήμμα. *Αν ένα δυαδικό δένδρο έχει αυθαίρετα μακρείς κλάδους τότε έχει έναν άπειρο κλάδο.*

Απόδ.: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν από μια κορυφή K_n του δυαδικού δένδρου περνούν αυθαίρετα μακρείς κλάδοι τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για μία κορυφή ακριβώς από κάτω από την προηγούμενη. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Ή κάτω από τη δοθείσα κορυφή βρίσκεται μία μόνο κορυφή, ή βρίσκονται δύο κορυφές K_{n+1}, K'_{n+1}. Στην πρώτη περίπτωση το συμπέρασμα είναι άμεσο. Στη δεύτερη περίπτωση, αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, τότε ας πούμε ότι οι κλάδοι κάτω από την K_{n+1} έχουν μήκος το πολύ n_1 και ότι οι κλάδοι κάτω από την K'_{n+1} έχουν μήκος το πολύ n_2. Τότε δεν υπάρχει κλάδος που να διέρχεται από την K_n που να έχει μήκος μεγαλύτερο από το $\max(n_1, n_2) + 1$ -άτοπο. Αρα ο ισχυρισμός μας είναι σωστός.

Ετσι λοιπόν, ξεκινώντας από την κορυφή K του δένδρου, βρίσκουμε μια ακολουθία κορυφών $K, K_1, K_2, ..., K_n, ...$ από τις οποίες διέρχονται αυθαίρετα μακρείς κλάδοι. Επομένως βρίσκουμε ένα άπειρο κλαδί σε αυτό το δένδρο. ⊣

4.2 Μερικές συνέπειες του Θεωρήματος

Πέρα από τις σοβαρές μαθηματικές συνέπειες του Θεωρήματος της Συμπαγίας, στις οποίες αναφερθήκαμε στην αρχή της προηγούμενης ενότητας (και οι οποίες προϋποθέτουν την σχετική εκδοχή του Θεωρήματος για την Κατηγορηματική Λογική - πράγμα δυσκολώτερο να αποδειχθεί), μπορούμε να δούμε μία σειρά από απλούστερες συνέπειες. Οι συνέπειες αυτές είναι απλά πορίσματα του Θεωρήματος. Θα μπορούσαν να ειδωθούν ως ασκήσεις πάνω στο βασικό αποτέλεσμα. Κάποιες από αυτές έχουν κάποιο θεωρητικό ενδιαφέρον. Προσδιορίζουν καλλίτερα το χαρακτήρα της έννοιας της ταυτολογικής συνέπειας, του ανεξάρτητου συνόλου προτάσεων κλπ. Αλλες απλώς δίνουν απαντήσεις σε ενδιαφέροντες γρίφους.

Βλέποντας τα πράγματα από τη σκοπιά κάποιου που έχει εκτεθεί στον Προτασιακό Λογισμό, της τυπικής απόδειξης και του Θεωρήματος Πληρότητας για τον Προτασιακό Λογισμό, η παρακάτω παρατήρηση φαίνεται απλή:

4.2.1 Πρόταση. *Μία πρόταση είναι ταυτολογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων αν και μόνο αν είναι ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου υποσυνόλου του.*

Σχόλιο: Πράγματι, από τη σκοπιά του Θεωρήματος Πληρότητας η παρατήρηση είναι σχεδόν τετριμμένη. Μια πρόταση σ είναι ταυτολογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων Σ αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από το Σ. Ομως μια τέτοια απόδειξη είναι πάντα πεπερασμένη. Αρα η πρόταση σ είναι ταυτολογική συνέπεια του συνόλου προτάσεων Σ αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από το Σ, αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από ένα πεπερασμένο πλήθος προτάσεων του Σ, αν και μόνο αν η σ είναι ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου πλήθους προτάσεων του Σ. Μπορούμε όμως να δώσουμε την παρακάτω απόδειξη που παρακάμπτει το Θεώρημα Πληρότητας:

Απόδ.: Θυμίζουμε το Θεώρημα 2.5 του βιβλίου, σύμφωνα με το οποίο $\Sigma \models \sigma$ αν και μόνο αν το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Εχουμε λοιπόν τώρα ότι, για το ενδεχομένως άπειρο σύνολο Σ, το $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Από το Θεώρημα της Συμπαγίας βρίσκουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο Ξ του $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$, το οποίο δεν είναι ικανοποιήσιμο. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Η το Ξ είναι της μορφής $\Sigma' \cup \{\neg\sigma\}$, για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο Σ' του Σ ή το Ξ δεν περιέχει την $\neg\sigma$ και ταυτόχρονα δεν είναι ικανοποιήσιμο. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τελειώσει: Ξανά από το Θεώρημα 2.5, η σ είναι ταυτολογική συνέπεια του πεπερασμένου Σ'. Στη δεύτερη περίπτωση η σ είναι ταυτολογική συνέπεια του Ξ, αφού δεν υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί το Ξ και να μην ικανοποιεί το σ (απλούστατα, γιατί δεν υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί το Ξ!). ⊣

Αντίστοιχου χαρακτήρα είναι και η παρακάτω εφαρμογή που πραγματεύεται την έννοια του ανεξάρτητου συνόλου προτάσεων. Θυμίζουμε ότι ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται ανεξάρτητο αν, για κάθε πρόταση $\sigma \in \Sigma$, δεν ισχύει $\Sigma - \{\sigma\} \models \sigma$ (δηλαδή η κάθε πρόταση δεν είναι συνέπεια των υπολοίπων προτάσεων του συνόλου).

4.2.2 Πρόταση. *Ένα σύνολο προτάσεων Σ είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο.*

Απόδ.: Προφανώς αν ένα σύνολο προτάσεων είναι ανεξάρτητο τότε και κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο. Διαφορετικά θα είχαμε πως μια πρόταση σ του Σ θα ήταν ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου πλήθους προτάσεων $\sigma_1, ..., \sigma_n$ του Σ, οπότε ούτε το Σ θα ήταν ανεξάρτητο.

Αντίστροφα, αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ανεξάρτητο και πάρουμε μία οποιαδήποτε πρόταση $\sigma \in \Sigma$ τότε, για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο προτάσεων $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, έχουμε $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \not\models \sigma$ (διαφορετικά το $\{\sigma_1, ..., \sigma_n, \sigma\}$ δεν θα ήταν ανεξάρτητο). Οπως παραπάνω, το Θεώρημα 2.5 του βιβλίου δίνει ότι το σύνολο $\{\sigma_1, ..., \sigma_n, \neg\sigma\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό συμβαίνει για κάθε επιλογή πεπερασμένου συνόλου προτάσεων του Σ που είναι διαφορετικές από τη σ. Δηλαδή συμβαίνει ότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο Ξ του $(\Sigma-\{\sigma\})\cup\{\neg\sigma\}$, το Ξ είναι ικανοποιήσιμο. Από το θεώρημα της Συμπαγίας έπεται ότι το $(\Sigma-\{\sigma\})\cup\{\neg\sigma\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Αρα, ξανά από το Θεώρημα 2.5 του βιβλίου, έπεται ότι $(\Sigma - \{\sigma\}) \not\models \sigma$. Αυτό γίνεται για οποιαδήποτε πρόταση του Σ, άρα το Σ είναι ανεξάρτητο. ⊣

Κλείνουμε τη συζήτηση γύρω από το Θεώρημα της Συμπαγίας με μία «εφαρμογή» στη Θεωρία Γραφημάτων και ειδικώτερα τον χρωματισμό χαρτών. Φυσικά είναι σαφές ότι δεν πρόκειται για γνήσια εφαρμογή αφού δε μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τα άπειρα γραφήματα και αφ' εταίρου δεν υπάρχει πρακτικά τρόπος να ελέγξει κανείς όλα τα πεπερασμένα γραφήματα ενός άπειρου γραφήματος:

4.2.3 Πρόταση. *Ενα γράφημα είναι n-χρωματικό αν και μόνο αν όλα τα πεπερασμένα υπογραφήματά του είναι n-χρωματικά.*

Απόδ.: Ας είναι $\{v_i \mid i \in I\}$ το σύνολο των κορυφών του γραφήματος και

$\{1, ..., n\}$ το σύνολο των χρωμάτων. Θεωρούμε το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών $\{p_{i,j} \mid i \in I,\ 1 \leq j \leq n\}$ και $\{q_{i,k} \mid i, k \in I\}$. Η πρόθεσή μας είναι η πρόταση $p_{i,j}$ να λέει «η κορυφή v_i έχει χρώμα j» και η $q_{i,k}$ να λέει ότι «η κορυφή v_i γειτονεύει με την κορυφή v_j»

Θεωρούμε το σύνολο Σ των προτάσεων:

(1) $p_{i,1} \vee ... \vee p_{i,n}$, για κάθε $i \in I$.

(2) $p_{i,j_1} \wedge \neg p_{i,j_2}$, για κάθε $i \in I$ και $j_1 \neq j_2$

(3) $(p_{i,j} \wedge q_{i,k}) \to \neg p_{k,j}$, για κάθε $i, k \in I,\ 1 \leq j \leq n$.

Διαβάζουμε τις παραπάνω προτάσεις σαν να λένε: Οι της ομάδας (1) ότι κάθε κορυφή v_i έχει ένα χρώμα από τα $1, ..., n$. Οι της ομάδας (2) ότι μία κορυφή έχει ένα μόνο χρώμα. Οι της ομάδας (3) ότι κορυφές που γειτονεύουν έχουν διαφορετικό χρώμα.

Τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό συμβαίνει γιατί όποιο τέτοιο σύνολο κι αν μας δωθεί μπορούμε να βρούμε αποτίμηση α που το ικανοποιεί: Αρκεί, αν εμπλέκονται ένα πεπερασμένο πλήθος από i και k στο σύνολο αυτών των προτάσεων, να θέσουμε $\alpha(p_{i,j}) = 1$ αν η κορυφή v_i έχει χρώμα j και $\alpha(p_{i,j}) = 0$, διαφορετικά, και $\alpha(q_{i,k}) = 1$ αν η κορυφή v_i γειτονεύει με την v_k και $\alpha(q_{i,k}) = 0$, διαφορετικά. Είναι δυνατόν να βρούμε τέτοια αποτίμηση ακριβώς επειδή το γράφημα που απαρτίζεται από τις κορυφές v_i και v_k, όπου τα i και k εμφανίζονται στο δοσμένο πεπερασμένο υποσύνολο, είναι n-χρωματικό. Από το Θεώρημα της Συμπαγίας προκύπτει ότι το Σ είναι ικανοποιήσιμο. Αν όμως τώρα υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλες τις προτάσεις του Σ αληθείς τότε ολόκληρο το γράφημα είναι n-χρωματικό.

4.3 Ασκήσεις

1. Εστω ένα σύνολο προτάσεων Σ, τέτοιο ώστε για κάθε εκτίμηση αλήθειας v υπάρχει μια πρόταση $\sigma \in \Sigma$ με $v(\sigma) = 1$. Δείξτε οτι υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subseteq \Sigma$ τέτοιο ώστε η πρόταση $\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$ να είναι ταυτολογία.

Λύση: Εστω οτι δεν υπάρχει τέτοιο πεπερασμένο υποσύνολο, δηλ. για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ ισχύει οτι, η πρόταση $\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$ δεν είναι ταυτολογία. Υπάρχει τότε εκτίμηση αλήθειας v με $v(\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n) = 0$, άρα $v(\neg(\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n)) = 1 \Rightarrow v(\neg\sigma_1 \wedge \neg\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \neg\sigma_n) = 1$.
Αρα θα πρέπει $v(\neg\sigma_i) = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Η εκτίμηση αλήθειας v

ικανοποιεί το σύνολο $\{\neg\sigma_1, \neg\sigma_2, \ldots, \neg\sigma_n\}$.
Στη συνέχεια, θεωρώ το σύνολο $\neg\Sigma = \{\neg\sigma \;/\; \sigma \in \Sigma\}$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Συμπάγειας, επειδή κάθε πεπερασμένο υποσυνολό του είναι ικανοποιήσιμο, άρα όλο το σύνολο $\neg\Sigma$ είναι ικανοποιήσιμο. Οπότε υπάρχει εκτίμηση αλήθειας v τέτοια ώστε $v(\tau) = 1$ όπου $\tau \in \neg\Sigma$, δηλ.
$v(\neg\sigma) = 1 \Rightarrow v(\sigma) = 0$, $\forall\sigma \in \Sigma$, άτοπο, γιατί ξεκινήσαμε με την υπόθεση οτι για κάθε εκτίμηση αλήθειας v υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ με $v(\sigma) = 1$.

Κεφάλαιο 5

ΛΟΓΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΩΝ

5.1 Εννοιολογική Εισαγωγή

Τα στοιχεία του προτασιακού λογισμού που δώσαμε μας επιτρέπουν να μελετήσουμε μια συγκεκριμένη κατηγορία συλλογιστικών σχημάτων όπως αυτά που είδαμε πιο πάνω. Τα σχήματα συλλογισμών της μορφής:

– *Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί*[1]
– *Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος*

– *Ο Σωκράτης είναι θνητός*

και γενικότερα οι συλλογισμοί που μελετήθηκαν από τον Αριστοτέλη, δεν μπορούν να μελετηθούν στο πλαίσιο της Προτασιακής Λογικής. Η φράση για παράδειγμα,

$$\textit{Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί,} \qquad (1)$$

δεν μπορεί να κωδικοποιηθεί στην Προτασιακή Λογική, ούτε και η άρνησή της:

$$\textit{Υπάρχουν άνθρωποι αθάνατοι} \qquad (2)$$

[1]Στη Λογική η ιδιότητα, ενέργεια, πάθος κτλ. που αποδίδεται στο υποκείμενο της κρίσης, και που απορρέει αναγκαία από τη φύση του, λέγεται 'κατηγορούμενο'. Εδώ το κατηγορούμενο είναι η ιδιότητα 'θνητός'. Η ονομασία 'κατηγορηματική λογική' προέρχεται ακριβώς από το γεγονός αυτό.

Ας προσπαθήσουμε για παράδειγμα να γράψουμε μια πρόταση με σύμβολα που να εκφράζουν το περιεχόμενο της αποφαντικής φράσης

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.

Η πιο πάνω πρόταση αποτελείται από την καθολική ποσόδειξη 'όλοι' από το υποκείμενο 'άνθρωποι' και από το κατηγόρημα 'θνητός'. Η ουσία της Κατηγορηματικής Λογικής, συνίσταται ακριβώς στην δυνατότητά της να εκφράζει 'ποσοδείξεις' και 'κατηγορήματα'. Ας δούμε πρώτα τα κατηγορήματα. Ο ακόλουθος τύπος εκφράζει ότι το 'υποκείμενο' x έχει την ιδιότητα (κατηγόρημα) 'άνθρωπος':

Ο x είναι άνθρωπος

με τον τρόπο που είδαμε στην εισαγωγή δηλαδή φτιάχνοντας ελλειπτικές εκφράσεις:

$$\begin{array}{c} \textit{Ο ξ είναι άνθρωπος} \\ \textit{Άνθρωπος είναι ο ξ} \\ \mathrm{A}(\xi) \end{array} \tag{3}$$

Με ανάλογο τρόπο ο συμβολισμός $\Theta(x)$ συμφωνούμε να είναι το περιεχόμενο της φράσης

$$\textit{Ο x είναι θνητός} \tag{4}$$

Αν λοιπόν η γλώσσα μας διαθέτει κατηγορηματικά σύμβολα, όπως το $\Theta(x)$ τότε μπορούμε να κωδικοποιούμε 'κατηγορήματα' στη γλώσσα μας.

Εφοδιασμένοι τώρα με αυτόν το συμβολισμό επιστρέφουμε στο στόχο μας που δεν είναι άλλος από τη εύρεση μιας συμβολικής γραφής για την (1), και συγκεκριμένα για το υπόλοιπο μέρος που είναι ο ποσοδείκτης 'Όλοι'.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε αριθμήσει τους όλους ανθρώπους. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ένα από τα σύμβολα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, \ldots \alpha_\omega$ αντιστοιχεί σε ένα και μοναδικό άνθρωπο, είναι ας πούμε το όνομα που εμείς του δώσαμε, από τον πρώτο α_1, μέχρι τον τελευταίο α_ω.

Εξετάζουμε τώρα έναν ένα τους ανθρώπους [2] και για κάθε έναν που διαπιστώνουμε ότι είναι θνητός γράφουμε κάτω το γεγονός αυτό στη συμβολική γλώσσα που έχουμε κατασκευάσει. Εξετάζοντας για παράδειγμα τον α_nθα γράψουμε $\Theta(\alpha_n)$ αν έχει την ιδιότητα του θνητού. Αν ο επόμενος ο $n+1$ έχει επίσης την ιδιότητα του θνητού θα γράφουμε $\Theta(\alpha_{n+1})$ και επειδή και οι

[2]Υποθέτουμε βεβαίως ότι ο αριθμός των ανθρώπων είναι πεπερασμένος. Στην περίπτωση ενός απείρου συνόλου η διαδικασία παρουσιάζει προβλήματα!

δύο άνθρωποι που εξετάσαμε είχαν την ιδιότητα του θνητού θα γράφουμε $\Theta(n) \wedge \Theta(n+1)$ κ.τ.λ.

Στο τέλος της φανταστικής αυτής διαδικασίας θα έχουμε γράψει μια τεραστία σύνθετη πρόταση την:

$$\Theta(a_1) \wedge \Theta(a_2) \wedge \Theta(a_3) \wedge \ldots \wedge \Theta(a_k) \wedge \ldots \wedge \Theta(a_\omega) \tag{4}$$

Ακολουθώντας τον τρόπο που γράφουμε τα μεγάλα αθροίσματα μπορούμε να γράψουμε

$$\bigwedge_{i=1}^{w} J(a_i) \tag{5}$$

Η (4), και η (5) που είναι ένας περιληπτικός τρόπος γραφής τη (4), λέει ότι όλα τα αντικείμενα α είναι θνητά.

Αντί να γράφουμε τώρα κάθε φορά την (5) εισάγουμε ένα νέο σύμβολο το ∀... το οποίο εκφωνείται *για κάθε* και με τη βοήθειά του γράφουμε πιο κομψά τη (5) ως εξής:

$$(\forall \alpha)\Theta(\alpha) \quad ή \quad (\forall x)\Theta(x) \tag{6}$$

Όμως αυτά τα α συμβολίζουν ανθρώπους. Η (4) λοιπόν λέει ότι και η (1). Με μια λίγο πιο διαφορετική διατύπωση λέει ότι αν έχουμε ένα οποιοδήποτε αντικείμενο x αν αυτό ικανοποιεί το κατηγόρημα $A(x)$, αν δηλαδή ο x είναι άνθρωπος, τότε ικανοποιεί και τη $\Theta(x)$. Αυτό με τη βοήθεια του συμβολισμού που της (6) γράφεται:

$$(\forall x)[A(x) \to \Theta(x)] \tag{7}$$

η οποία εκφράζει ότι ακριβώς και η (1).

5.2 Η γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό, καθώς και στα επόμενα, σκοπεύουμε να εξετάσουμε και να αναλύσουμε από λογική σκοπιά τη μαθηματική γλώσσα, όπως αυτή εκφέρεται στη συνηθισμένη, καθημερινή μαθηματική πρακτική. Η μέθοδός μας θα παραμείνει μαθηματική, όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια. Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τον τρόπο που εκφραζόμαστε στα μαθηματικά με τρόπο τόσο συγκεκριμένο και καλά ορισμένο, ώστε η ίδια η συνηθισμένη μαθηματική έκφραση να μπορεί να γίνει αντικείμενο μαθηματικής μελέτης. Η μαθηματική γλώσσα θα προσπαθηθεί να προσδιοριστεί τόσο τυπικά που ακόμα κι ένας υπολογιστής να μπορεί να αναγνωρίσει κάποια ακολουθία συμβόλων ως καλά σχηματισμένη φράση της μαθηματικής γλώσσας. Ολα εκείνα τα μέσα που μπορεί να έχει η γλώσσα στην οποία εκφραζόμαστε για κάποιο μαθηματικό αντικείμενο θέλουμε τώρα να τα κωδικοποιήσουμε σε μία γενική μορφή που να επιτρέπει μία μελέτη από ενιαία σκοπιά των διαφορετικών μαθηματικών αντικειμένων και την αναγνώριση κάποιων κοινών γνωρισμάτων τους. Τα πλεονεκτήματα μίας τέτοιας προσέγγισης μπορεί να αρχίσουν να φαίνονται στο τελευταίο κεφάλαιο του παρόντος βιβλίου. Μπορούμε εδώ να πούμε ότι χωρίζονται σε δύο είδη: Από τη μία πλευρά μπορούμε να έχουμε μία εντελώς μαθηματική διαπραγμάτευση ερωτημάτων όπως του τί συνιστά απόδειξη στα μαθηματικά, τί συνιστά μαθηματική αλήθεια, τί είναι αξιωματικό σύστημα κλπ. Από την άλλη πλευρά, από μία τέτοια αφηρημένη προσέγγιση, όπως αυτή που υιοθετούμε εδώ, προκύπτουν ενδιαφέροντα γενικά αποτελέσματα που όταν εξ- ειδικευτούν σε συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές δίνουν είτε μαθηματικές αλήθειες που δεν είχαν γίνει νωρίτερα αντιληπτές, είτε νέες γενικές αποδείξεις γνωστών μαθηματικών θεωρημάτων.

Συνήθως στα μαθηματικά μιλάμε, κάθε φορά, για ένα συγκεκριμένο πράγμα. Αυτό μπορεί να γίνεται στα πλαίσια μελέτης ενός συγκεκριμένου μαθηματικού αντικειμένου θεωρητικού χαρακτήρα, ας πούμε της γεωμετρίας του επιπέδου ή της θεωρίας των πραγματικών αριθμών ή της θεωρίας συνόλων ή της θεωρίας των φυσικών αριθμών (αριθμητικής) ή, διαφορετικά, μελετώντας κάποιο φαινόμενο από μαθηματική σκοπιά, για παράδειγμα τα στοιχεία μίας βάσης δεδομένων και διάφορες συσχετίσεις τους. Σε κάθε περίπτωση υπάρχουν κάποιες οντότητες τις οποίες μελετάμε (σημεία ή ευθείες του επιπέδου, πραγματικοί αριθμοί, σύνολα, πελάτες μίας εταιρείας κλπ) και στις οποίες θέλουμε να αναφερθούμε με έναν γενικό τρόπο, εξετάζοντας συσχετίσεις που μπορεί να τις αφορούν, εκτελώντας πράξεις που εφαρμόζονται ανάμεσα σε τυχαίες τέτοιες οντότητες, κάθε φορά. Ο τρόπος που έχει επικρατήσει στα μαθηματικά να αναφερόμαστε σε γενικές οντότητες είναι μέσω των μεταβλητών. Κάθε φορά λοιπόν που μιλάμε για ένα μαθηματικό αντικείμενο συνήθως εκφραζόμαστε μέσω των μεταβλητών, οι οποίες δηλώνουν τις οντότητες που μας ενδιαφέρουν. Βολεύει να έχουμε ένα απεριόριστο σύνολο τέτοιων, ώστε κάθε φορά που χρειαζόμαστε ένα νέο όνομα για κάποια γενική οντότητα που μελετάμε να υπάρχει κάποιο διαθέσιμο. Ο γενικός τρόπος έκφρασης στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας έχει και κάποια ακόμα χαρακτηριστικά γνωρίσματα: Είναι συνηθισμένο να μιλάμε για πράξεις που ορίζονται μεταξύ οποιωνδήποτε οντοτήτων (πχ. πρόσθεση μεταξύ πραγματικών αριθμών) και σχέσεις που τις αφορούν (πχ. ανισότητα μεταξύ φυσικών αριθμών, ένα σύνολο να ανήκει σε ένα άλλο). Επίσης συνηθίζεται να αναφερόμαστε με ξεχωριστό τρόπο σε συγκεκριμένες οντότητες, οι οποίες παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στη θεωρία που μελετάμε. Για παράδειγμα, μεταξύ των πραγματικών αριθμών, ιδιαίτερη θέση μπορεί να κατέχει το 0, εξ αιτίας του γεγονότος ότι είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, ή αντίστοιχα το 1, για ανάλογους λόγους.

Μας ενδιαφέρει, περαιτέρω, να αναλύσουμε τις εκφράσεις που συνήθως εκφέρουμε όταν μελετάμε ένα μαθηματικό αντικείμενο. Ας ανακαλέσουμε εδώ ποια μορφή έχουν συνήθως οι εκφράσεις αυτές: Συχνά αναφερόμαστε σε συσχετίσεις οντοτήτων. Λέμε, για παράδειγμα, ο αριθμός x είναι θετικός (δηλαδή ≥ 0), ή ότι ο αριθμός x διαιρεί το αν αριθμό y, ή ότι η ποσότητα $x^2 - 1$ παίρνει αρνητικές τιμές, ή ότι το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο y, ή ότι το σύνολο x περιέχει ως υποσύνολο το σύνολο y, ή ότι η ευθεία x που προκύπτει ως τομή των επιπέδων ϵ και δ είναι παράλληλη στην ευθεία y κλπ. Συχνά συνδυάζουμε τέτοιες εκφράσεις με τη βοήθεια λογικών συνδέσμων. Λέμε, για παράδειγμα, ότι αν ο αριθμός x είναι μικρότερος του 1, τότε η ποσότητα x^2-1 παίρνει αρνητικές τιμές, ή ότι αν ο αριθμός p είναι πρώτος και διαιρεί ένα γινόμενο αριθμών $x.y$, τότε είτε θα διαιρεί τον x είτε θα διαιρεί τον y, κλπ. Ακόμα, συχνά αναφερόμαστε στην ύπαρξη μίας οντότητας με κάποια ιδιότητα ή στο γεγονός ότι κάτι ισχύει για όλες τις οντότητες. Λέμε, για παράδειγμα, ότι υπάρχει κάποιο σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο, ή ότι για όλα τα x η ποσότητα $x^2 + 1$ είναι πάντοτε θετική. Θα κωδικοποιήσουμε λοιπόν σε μία γενική μορφή όχι μόνο τα εκφραστικά μέσα που συνήθως χρησιμοποιούμε όταν μιλάμε για τα μαθηματικά αλλά και τη μορφή που έχουν οι εκφράσεις της γλώσσας όταν μιλάμε για τα μαθηματικά. Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, ανάλογα με το αντικείμενο που μας απασχολεί, χρησιμοποιούμε διαφορετικά εκφραστικά μέσα. Αν μας ενδιαφέρει η γεωμετρία του χώρου δεν έχει νόημα να διαθέτουμε στα εκφραστικά μας μέσα τη σχέση της διαιρετότητας ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς. Αναφερόμαστε λοιπόν κάθε φορά σε **μία** γλώσσα για κάποιο αντικείμενο. Μία γλώσσα που έχει τα εκφραστικάμέσα που προσπαθήσαμε να περιγράψουμε παραπάνω λέμε ότι είναι μία γλώσσα της **λογικής των κατηγορημάτων** (= ιδιοτήτων, σχέσεων) Συνοψίζουμε λοιπόν:

5.2.1 Ορισμός. Μια γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων $\mathcal{L}$, περιλαμβάνει τα ακόλουθα στοιχεία:

(I) Τα λογικά σύμβολα

- **(i) Μεταβλητές:** $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$ (αριθμήσιμο πλήθος).
- **(ii) Λογικοί σύνδεσμοι:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **(iii) Ποσοδείκτες:** $\forall$ (καθολικός), $\exists$ (υπαρξιακός).
- **(iv) Ισότητα:** $=$
- **(v) Βοηθητικά σύμβολα:** παρενθέσεις (,) και σημεία στίξης όπως το κόμμα , κ.λ.π.

(Τα λογικά σύμβολα μιας γλώσσας της λογικής των κατηγορημάτων παραμένουν τα ίδια ανεξάρτητα απότο αντικείμενο στο οποίο αναφερόμαστε.)

(II) Μη - λογικά σύμβολα.

- **(i) Σχεσιακά σύμβολα** $\{R_i; i \in I\}$
- **(ii) Σύμβολα συναρτήσεων:** $\{f_j; j \in J\}$
- **(iii) Σύμβολα σταθερών:** $\{c_k : k \in K\}$

(Τα μη λογικά σύμβολα αναφέρονται σε κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο.)

Παρατήσεις: 1. Όλα τα πιο πάνω σύμβολα υποτίθεται ότι είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Κάποια από τα παραπάνω σύνολα μη - λογικών συμβόλων μπορεί να είναι το κενά σύνολα. Θεωρούμε επίσης ότι το κάθε σχεσιακό και το κάθε συναρτησιακό σύμβολο έρχονται εφοδιασμένα με την πληροφορία του αριθμού των ορισμάτων στα οποία εφαρμόζονται (αν δηλαδή είναι μονομελή, διμελή, τριμελή, κλπ). Αποφεύγουμε να εμφανίζουμε αυτήν την πληροφορία πάνω στο σύμβολο για να μη γίνονται πιο δυσχρηστα ως σύμβολα.
2. Συχνά αντί για τα σύμβολα $x_1, x_2, \ldots$ κλπ, θα χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε τις μεταβλητές τα συνηθισμένα x, y, z, u, $w, \ldots$, κλπ.
3. Επειδή τα λογικά σύμβολα είναι κοινά για κάθε γλώσσα, αυτό που διακρίνει μια γλώσσα είναι τα μη - λογικά σύμβολα. Υπό αυτήν την έννοια αποτελούν και την **χαρακτηριστική** της γλώσσας. Λέμε ακόμα ότι αποτε-

λούν τον **οπλισμό** ή **τύπο ομοιότητας** της γλώσσας.

Θα κτίσουμε σταδιακά τις εκφράσεις της γλώσσας, όπως αυτές εκφέρονται στη μαθηματική πρακτική. Οπως διευκρινίσαμε νωρίτερα στα μαθηματικά μιλάμε για οντότητες που είτε δίνονται γενικά ως μεταβλητές (π.χ ο αριθμός x), ως συγκεκριμένα στοιχεία συνόλων (π.χ ο αριθμός 1) ή ως συνδυασμοί μεταξύ τους μέσω πράξεων (π.χ ο αριθμός $x^2 + y^2 + 1$). Αυτή τη γενική έννοια οντότητας, στην οποία συνήθως αναφερόμαστε, συλλαμβάνει ο επόμενος ορισμός.

5.2.2 Ορισμός. Το σύνολο $\mathrm{Term}(\mathcal{L})$ των **όρων** της $\mathcal{L}$ είναι το ελάχιστο σύνολο που παράγεται από την εφαρμογή των ακόλουθων κανόνων:

(i) Οι μεταβλητές και τα σύμβολα σταθερών είναι όροι, δηλαδή, $x_i \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}), i = 1, 2, \ldots$ και $c_k \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$, για κάθε $k \in K$.

(ii) Αν $t_1, \ldots t_n \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$, και f είναι συναρτησιακό σύμβολο που δέχεται n ορίσματα τότε,
$$f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}).$$

Προχωράμε στην περιγραφή των εκφράσεων που μπορούμε να εκφέρουμε για τις μαθηματικές οντότητες. Οπως και στον προηγούμενο ορισμό, κτίζουμε σταδιακά αυτές τις εκφράσεις περιγράφοντας ολοένα και πιό πολύπλοκες τέτοιες.

5.2.3 Ορισμός. Το σύνολο των τύπων Form($\mathcal{L}$) της $\mathcal{L}$ είναι το ελάχιστο σύνολο που παράγεται από την εφαρμογή των ακόλουθων κανόνων:

(i) Ατομικοί ή Στοιχειώδεις Τύποι. Αν R είναι σχεσιακό σύμβολο που επιδέχεται n ορίσματα και $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$ τότε,

$$R(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$$

και,

$$t_1, t_2 \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}) \ \text{τότε} t_1 = t_2 \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$$

(ii) Σύνθετοι Τύποι.

(α) Αν φ, $\psi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, τότε $(\varphi)\Box(\psi) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ όπου $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(β) Αν $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ τότε $\neg(\varphi) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$

(γ) Αν για κάθε μεταβλητή x, ο φ είναι τύπος της $\mathcal{L}$ τότε και οι σχηματισμοί,

$$\forall x(\varphi) \quad \text{και} \quad \exists x(\varphi) \quad \text{είναι τύποι της } \mathcal{L}$$

Παραδείγματα: Ολα τα παρακάτω είναι παραδείγματα τύπων σε μία κατάλληλη γλώσσα, όπως προκύπτει από την περιγραφή που κάναμε (μάλιστα οι τέσσερεις πρώτοι είναι ατομικοί τύποι):

$$R(x,x), \quad x_1 = x_2, \quad x_1^2 + x_1^2 + 1 \leq 0, \quad x_1 + x_2 + 1 = x_2^2 + x_3^2,$$

$$R(x,x) \wedge R(y,y), \quad R(x_1,x_2) \vee (x_1 = x_2), \quad (x = x) \rightarrow (0 = 1),$$

$$(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z), \quad (x \in y) \vee (y \in x), \quad \exists x(x = x), \quad \exists z(x \in y),$$

$$\neg(x = x) \rightarrow \forall x(z \in y), \quad \forall x(x.x \geq 0), \quad \forall x \exists y(y.y = x),$$

$$\exists x \forall y(\neg(u = w)), \quad (x|y \vee \exists p(\neg(p|x) \wedge \neg(p|y)), \quad x = x \wedge \forall x(x = x),$$

$$\forall x(x = 0 \vee \exists y(x.y = 1)), \quad \forall x(\exists y(x.y = 1) \vee \exists z((1 - x).z = 1))$$

(όπου R, $|$ είναι κάποια σχεσιακά σύμβολα που παρέχει η εκάστοτε γλώσσα.)
Αντίθετα ακολουθίες συμβόλων όπως οι

$$x(x.y = 1), \quad 1)(x \leq 0), \quad (1 = 0) \to R, \quad (x \wedge (y \leq z)) \to (x \leq 0), \quad \forall 0(0 \leq x)$$

δεν αποτελούν παραδείγματα τύπων, αφού για μιά σειρά λόγων δεν εμπίπτουν στον παραπάνω ορισμό. Για τέτοιου είδους εκφράσεις λέμε ότι **δεν** αποτελούν **καλά σχηματισμένους τύπους**.

Παρατήρηση: Ο παραπάνω είναι ένας **επαγωγικός ορισμός** της έννοιας του τύπου, ανάλογος αυτού που είδαμε για την έννοια της πρότασης στα πλαίσια της λογικής των προτάσεων. Κατά αντιστοιχία με την προτασιακή λογική, όταν θέλουμε να αποδείξουμε έναν ισχυρισμό που να αφορά σε όλους τους τύπους μπορούμε να επιχειρηματολογούμε επαγωγικά: Να δείχνουμε, δηλαδή, ότι ο ισχυρισμός αληθεύει προκειμένου για τους ατομικούς τύπους και στη συνέχεια, δεχόμενοι ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για τύπους φ και ψ, να δείχνουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για τους τύπους $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$.

5.3 Ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών

Ο ορισμός των τύπων που υιοθετήσαμε είναι αναγκαίος για να μιλήσουμε για τις εκφράσεις της καθημερινής μαθηματικής πρακτικής με αρκετή γενικότητα. Ομως, όπως δείχνουν πολλά από τα παραδείγματα στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, ο ορισμός αυτός αφήνει περιθώριο στο να συμπεριλάβουμε στον ορισμό του τύπου περιπτώσεις όπως οι $\exists z(x \in y)$, $\neg(x = x) \to \forall x(z \in y)$, ή ο $\forall x(0 = 1)$, που δε βγάζουν και τόσο μαθηματικό νόημα. Η ουσία του προβλήματος έγκειται στο ότι διάφοροι ποσοδείκτες εμφανίζονται και αναφέρονται σε μεταβλητές που δεν παίζουν ρόλο στη φράση που ακολουθεί, ενώ αντίθετα στη φράση που ακολουθεί τον ποσοδείκτη χρησιμοποιούνται μεταβλητές στις οποίες δεν αναφέρονται οι ποσοδείκτες της έκφρασης. Το πρώτο ελάττωμα πουδιαπιστώνουμε δεν είναι τόσο σημαντικό. Στο παράδειγμα $\forall x(0 = 1)$ αναγνωρίζουμε όλοι μία ψευδή έκφραση, όσο κι αν είναι ασυνήθιστη για την “καθομιλουμένη” μαθηματική γλώσσα. Στο παράδειγμα $\neg(x = x) \to \forall x(z \in y)$ έχουμε μεγαλύτερο πρόβλημα γιατί δεν έχουμε αίσθηση αν μία τέτοια δήλωση πρέπει να την αντιλαμβανόμαστε ως αλήθεια ή ως ψέμα, ανεξάρτητα του αντικειμένου στο οποίο αναφέρονται. Παρακάτω αντιμετωπίζουμε αυτά το προβλήματα. Σκοπός μας είναι να απαλείψουμε από το αντικείμενο της μελέτης μας εκείνες τις δηλώσεις που δεν αναγνωρίζουμε ως αληθείς ή ψευδείς, αναφορικά με κάποιο μαθηματικό πεδίο.

Για να διατυπώσουμε με ακρίβεια την κεντρική έννοια που θα μας απασχολήσει εδώ χρειαζόμαστε να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε "υποτύπος ενός τύπου". Αυτό προκύπτει από τον επαγωγικό ορισμό των τύπων: Υποτύποι ενός πολυπλοκώτερου τύπου είναι οι απλούστεροι τύποι που μετέχουν στην κατασκευή του πιο πολύπλοκου. Ετσι, για παράδειγμα, υποτύποι του $\varphi \wedge \psi$ είναι οι φ, ψ καθώς και οι υποτύποι αυτών. Υποτύποι του $\exists x\varphi$ είναι ο φ και οι υποτύποι του φ, κλπ. Αντί να δώσουμε αναλυτικό ορισμό, ας δούμε αναλυτικά ένα παράδειγμα: Υποτύποι του

$$\forall x \exists y((R(x,y) \wedge S(z,y)) \rightarrow \exists z R(x,z))$$

(όπου R, S είναι δύο διμελή σχεσιακά σύμβολα) είναι οι

$$\exists y((R(x,y) \wedge S(z,y)) \rightarrow \exists z R(x,z)),$$

$$(R(x,y) \wedge S(z,y)) \rightarrow \exists z R(x,z), \quad \exists z R(x,z),$$

$$R(x,z), \quad R(x,y) \wedge S(z,y), \quad R(x,y), \quad S(z,y).$$

5.3.1 Ορισμός. Η εμβέλεια (scope) ενός ποσοδείκτη εντός ενός τύπου φ είναι ο υποτύπος ψ που ξεκινά μετά τη μεταβλητή που ακολουθεί τον ποσοδείκτη, αρχίζει με αριστερή παρένθεση και τελειώνει με την αντίστοιχη δεξιά παρένθεση.

Για παράδειγμα στον τύπο $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ η εμβέλεια του $\forall x$ είναι ο τύπος $\phi \wedge \psi$, ενώ στον τύπο $\forall x(\phi) \wedge \psi$ η εμβέλεια του $\forall x$ είναι ο υποτύπος ϕ. Στον τύπο

$$R(x,y,z) \wedge \exists u(((S(x,y) \vee R(x,y,u)) \rightarrow \forall z(S(x,z) \vee \exists u R(x,z,u)))$$

η εμβέλεια του πρώτου $\exists u$ είναι ο υποτύπος

$$((S(x,y) \vee R(x,y,u)) \rightarrow \forall z(S(x,z) \vee \exists u R(x,z,u)),$$

η εμβέλεια του δεύτερου $\exists u$ είναι ο υποτύπος $R(x,z,u)$, ενώ η εμβέλεια του $\forall z$ είναι ο υποτύπος

$$S(x,z) \vee \exists u R(x,z,u).$$

5.3.2 Ορισμός. Η εμφάνιση μιας μεταβλητής x στον τύπο ϕ θα λέγεται **δεσμευμένη** ή φραγμένη αν εμφανίζεται στους ποσοδείκτες $\forall x$, $\exists x$ ή βρίσκεται στην εμβέλεια των ποσοδεικτών $\forall x$, $\exists x$ εντός του τύπου φ. Σε αντίθετη περίπτωση μια εμφάνιση της μεταβλητής x στον τύπο φ λέγεται **ελεύθερη**. Ενα τύπος λέγεται **πρόταση** αν δεν περιέχει καθόλου ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών. Οι έννοιες της δεσμευμένης και της ελεύθερης μεταβλητής μπορούν να οριστούν αυστηρά με επαγωγικό τρόπο.

Παρατήρηση: Οι έννοια της ελεύθερης μεταβλητής μπορεί να οριστεί και με επαγωγικό τρόπο: Ολες οι εμφανίσεις μεταβλητών σε έναν ατομικό τύπο είναι ελέυθερες. Οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών στους τύπους $\neg\varphi$ είναι οι ίδιες με αυτές στον φ, ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών στον τύπο $\varphi \wedge \psi$ είναι η ένωση των ελεύθερων εμφανίσεων μεταβλητών στους τύπους φ και ψ, το ίδιο και με τους τύπους $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$. Τέλος οι ελεύθερες εμφανίσεις στους $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ είναι οι ίδιες με αυτές στον φ εκτός από την x.
Παράδειγμα: Η εμφάνιση της μεταβλητής x είναι ελεύθερη στους τύπους: $x = c$, $(x = c) \to \forall x(x = c)$ ενώ στους τύπους

$$\forall x\, \forall y(R(x,y) \to R(y,x)), \qquad \forall x\, \exists y\, (y = f(x))$$

είναι δεσμευμένη. Στον τύπο

$$\forall x(\exists y R(x,y,z) \vee \forall u S(u,x)) \to R(x,x,u)$$

ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x είναι εκείνες στον υποτύπο $R(x,x,u)$ (και οι άλλες είναι δεσμευμένες), η y δεν έχει ελεύθερη εμφάνιση, η z έχει μόνο ελεύθερη εμφάνιση ενώ η u έχει ελεύθερη την εμφάνιση στον υποτύπο $R(x,x,u)$ και δεσμευμένη στον $S(u,x)$.

5.4 Παραδείγματα γλωσσών στα μαθηματικά

Ερχόμαστε στο πιό κρίσιμο κομμάτι αυτού του κεφαλαίου. Θέλουμε να δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα τυπικών γλωσσών. Θέλουμε δηλαδή να επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε διάφορα συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα, να δούμε τί είδους εκφράσεις εκφέρουμε συνήθως στα πλαίσια της μελέτης τους και, στο τέλος, να δούμε πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε εντελώς τυπικές γλώσσες, στα πλαίσια των οποίων εκφραζόμαστε. Αυτές, αφενός θα έχουν τα μέσα για να εκφρέρουμε τις συνηθισμένες εκφράσεις της μαθηματικής πρακτικής, αφεταίρου θα έχουν τα χαρακτηριστικά που θέσαμε στα πλαίσια της παραπάνω συζήτησης. Το λεπτό σημείο σε κάθε παράδειγμα που θα θεωρήσουμε είναι το να προσδιορίσουμε ακριβώς τα διαθέσιμα εκφραστικά μέσα. Θέλουμε κάθε φορά να είναι αρκετά πλούσια ώστε να μπορούμε να εκφράζουμε συνηθισμένες ιδιότητες, προτάσεις κλπ. Από την άλλη πλευρά, θέλουμε να είμαστε αρκετά οικονομικοί ως προς τα εκφραστικά μας μέσα ώστε να μην έχουμε μέσα που είναι άχρηστα ως προς αυτό που θέλουμε να πούμε. Επιπλέον όσο πιο οικονομικοί είμαστε στην τυπική έκφραση τόσο πιο πολλές γενικές αρχές εφαρμόζονται στην ειδική περιοχή που μελετάμε (αυτό μπορεί να γίνει κάπως καλλίτερα κατανοητό στο τελευταίο κεφάλαιο).

Η γλώσσα των πραγματικών αριθμών

Εδώ θα επικεντρώσουμε λίγο την προσοχή μας στη γλώσσα, στην οποία εκφράζουμε τη βασική θεωρία των πραγματικών αριθμών, όπως τη διδασκόμαστε στο Λύκειο. Θέλουμε να εκφράσουμε τα βασικά αλγεβρικά χαρακτηριστικά των πραγματικών αριθμών, τις βασικές πράξεις και τις βασικές ανισότητες ανάμεσά τους. Αυτές με τις σειρά τους μας επιτρέπουν να εκφράσουμε μία σειρά από έννοιες της ανάλυσης, όπως το όριο και τη συνέχεια μίας συνάρτησης. Παρολαυτά δεν είναι καθαυτή η ανάλυση που είναι εδώ στο επίκεντρο. Αυτό δημιουργεί μία διαφορά στο ποιές είναι οι βασικές πράξεις και σχέσεις ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς, τις οποίες θέλουμε να τυποποιήσουμε. Ετσι λοιπόν θεωρούμε ως βασικά εκφραστικά μέσα τα εξής:

- Συναρτησιακά σύμβολα: Δύο διμελή συναρτησιακά σύμβολα $+$, $.$ (τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού) κι ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο $-$ (την πράξη του αντιθέτου).

- Σχεσιακά σύμβολα: Ενα διμελές σχεσιακό σύμβολο $\leq$, τη σχέση της ανισότητας.

- Σύμβολα σταθερών: Δύο σύμβολα σταθερών, τα 0 και 1.

Αν στο επίκεντρο της μελέτης μας ήταν πιό βαθειά θέματα της ανάλυσης μπορεί, ενδεχομένως, να θέλαμε να έχουμε διαθέσιμα κι άλλα συναρτησιακά σύμβολα, όπως ας πούμε σύμβολα για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις (μονομελή, που θα περιγράφουν την απεικόνιση $x \mapsto \text{συν}(x)$) ή για την εκθετική συνάρτηση ($x \mapsto e^x$). Ισως, επίσης, να θέλαμε κι άλλα σύμβολα σταθερών, όπως τα π και e.

Ποιές βασικές αλήθειες γύρω από τους πραγματικούς αριθμούς θα μπορούσε να εκφράσει κανείς με αυτά τα σύμβολα; Ας δούμε μερικές:

$\forall x \forall y \forall z\ ((x+y)+z = x+(y+z))$, $\forall x \forall y \forall z\ ((x.y).z = x.(y.z))$

$\forall x \forall y\ (x+y = y+x)$, $\forall x \forall y\ (x.y = y.x)$

$\forall x\ (x+0 = x)$, $\forall x\ (x.1 = x)$

$\forall x\ (x+(-x) = 0)$

$\forall x \forall y \forall z\ (x.(y+z) = x.y + x.z)$

$\forall x\ (x = 0\ \vee\ \exists y\ (x.y = 1))$

$\forall x (x \leq x)$, $\forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$

$\forall x \forall y \forall z\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

$\forall x \forall y\ (x \leq y \vee y \leq x)$

$\forall x \forall y\ (x \leq y \rightarrow \exists z (x \leq z \wedge z \leq y))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x \leq y \rightarrow (x+z \leq y+z))$

$\forall x \forall y \forall z\ ((x \leq y \wedge 0 \leq z) \rightarrow (x.z \leq y.z))$

Ολοι οι παραπάνω τύποι είναι προτάσεις που, αν θεωρήσουμε ότι μιλάμε για τους πραγματικούς αριθμούς, τις θεωρούμε αληθείς. Αναφέρουμε μόνο μερικές τέτοιες, ενδεικτικά. Προκειμένου να είχαμε έναν κατάλογο αξιωμάτων από τα οποία θα έπονταν όλες οι αλήθειες για τους πραγματικούς αριθμούς, που εκφράζονται με προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής στη συγκεκριμμένη γλώσσα, θα έπρεπε να προσθέσουμε κι άλλες προτάσεις, π.χ

$\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \neg(x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1)$.

Η γλώσσα της ευκλείδιας γεωμετρίας του επιπέδου

Μπορούμε να εκφράσουμε σε μία κατάλληλη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής τις συνηθισμένες προτάσεις της ευκλείδιας γεωμετρίας του επιπέδου. Μπορεί να φαίνεται ότι οι έννοιες που χρησιμοποιεί κανείς όταν μελετάει τη γεωμετρία του επιπέδου είναι πάρα πολλές κι ότι έτσι θα χρειαστούμε πάρα πολλά σύμβολα και είναι ίσως αδύνατο να εκφράσει με προτάσεις, του είδους για το οποίο μιλήσαμε παραπάνω, το περιεχόμενο της ευκλείδιας γεωμετρίας. Ομως οι περισσότερες έννοιες της γεωμετρίας είναι "παράγωγες". Βασίζονται σε άλλες, προγενέστερες και απλούστερες, όπως αυτές του σημείου και της ευθείας. Ο Ευκλείδης διατύπωσε μία σειρά από αξιώματα για τη γεωμετρία που εκφράζονται με τη βοήθεια τέτοιων βασικών εννοιών (ώστε οι λοιπές γεωμετρικές αλήθειες να έπονται ως συνέπειες αυτών των αξιωμάτων). Ενα ζήτημα από τη σκοπιά που εξετάζουμε τα πράγματα είναι ότι οι αρχικές αυτές έννοιες είναι δύο ειδών (όταν μιλάμε για τη γεωμετρία του επιπέδου): σημεία και επίπεδα. Ενας τρόπος με τον οποίο αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί είναι να εισάγουμε μονομελή σχεσιακά σύμβολα σ, ϵπου λένε ότι μια οντότητα είναι σημείο ή, αντίστοιχα, ευθεία. Επίσης μπορούμε να έχουμε ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο $\in$ που περιγράφει το ότι η μία οντότητα ανήκει στην άλλη. Ετσι, για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε το ότι από ένα σημείο διέρχεται μία ευθεία ως

$$\forall x\, (\sigma(x) \to \exists y\, (\epsilon(y) \land x \in y))$$

Η γλώσσα της αριθμητικής

Ενα από τα συστήματα που είναι πολύ βασικό για την ανάπτυξη των μαθηματικών είναι αυτό των φυσικών αριθμών και των βασικών πράξεων ανάμεσά τους. Λόγω της σπουδαιότητάς του προσπαθήθηκε σχετικά νωρίς, αναφορικά με την εξέλιξη των ιδεών στη συμβολική αντιμετώπιση της λογικής, να εντοπισθούν οι θεμελιώδεις αρχές (δηλαδή τα αξιώματα) που διέπουν την αντίληψή μας για τους φυσικούς αριθμούς. Ως βασικά εκφραστικά μέσα θεωρήθηκαν η σταθερά 0 (ο πρώτος στη σειρά φυσικός αριθμός) και η μονομελής πράξη s που αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό τον επόμενό του. Οι θεμελιώδεις λοιπόν παραδοχές μας για τους φυσικούς αριθμούς εκφράζονται ως εξής:

$\forall x\, \neg(s(x) = 0)$, δηλαδή το 0 δεν είναι επόμενος κανενός αριθμού,

$\forall x \forall y\, (s(x) = s(y) \to x = y)$, δηλαδή αν δύο αριθμοί έχουν ίσους επόμενους είναι ίσοι.

Η τρίτη θεμελιώδης παραδοχή έχει να κάνει με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Λέει ότι, για οποιονδήποτε τύπο φ με μία ελεύθερη μεταβλητή

$$(\varphi(0) \land\ \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(s(x)))) \to \forall x \varphi(x),$$

δηλαδή πως αν ο τύπος (ιδιότητα) ικανοποιείται από το 0 και όποτε ικανοποιείται από κάποιον φυσικό αριθμό, ικανοποιείται και από τον επόμενό του, τότε ο τύπος ικανοποιείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς. Εδώ αν θέλαμε να εκφράσουμε την πλήρη ισχύ αυτής της παραδοχής σε συμβολική γλώσσα, θα έπρεπε να ξεκινήσουμε την παραπάνω έκφραση προτάσσοντας το $\forall\varphi$. Ομως κάτι τέτοιο, έχουμε πει, δεν είναι επιτρεπτό στα πλαίσια της λογικής των κατηγορημάτων. Πραγματικά, μπορεί κανείς να δείξει, χρησιμοποιώντας πιο προχωρημένες μεθόδους μαθηματικής λογικής από αυτές που εξετάζουμε εδώ, ότι η έννοια του φυσικού αριθμού δε μπορεί να εκφραστεί με αξιώματα της κατηγορηματικής λογικής και με τα εκφραστικά μέσα που περιγράψαμε πιο πάνω. Οι τρεις αυτές θεμελιώδεις παραδοχές για τους φυσικούς αριθμούς λέγονται αξιώματα του Peano και τέθηκαν το 1888.

Η γλώσσα της θεωρίας συνόλων

Ενα άλλο παράδειγμα θεμελιώδους μαθηματικής έννοιας που περιγράφεται αξιωματικά είναι αυτή του συνόλου. Οταν λέμε ότι περιγράφεται αξιωματικά εννοούμε ότι η έννοια δεν ορίζεται με βάση κάποιες προηγούμενες αλλά ότι ως σύνολο θεωρούμε οτιδήποτε τα αξιώματα δηλώνουν ότι υπάρχει ως τέτοιο ή μπορεί να κατασκευαστεί από προϋπάρχοντα. Εξ αιτίας του γεγονότος ότι οι έννοιες που αποτελούν τον κορμό της μαθηματικής δραστηριότητας εκφράζονται με τη βοήθεια της έννοιας του συνόλου ή ανάγονται σε αυτήν, από πολύ πρώιμο στάδιο της ανάπτυξης της μαθηματικής λογικής διατυπώθηκαν τα αξιώματα που διέπουν την έννοια του συνόλου (κυρίως από τον Zermelo το 1908). Για τη διατύπωση αυτών των θεμελιωδών αρχών αρκεί μία γλώσσα που περιέχει ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο $\in$ που εκφράζει ότι ένα σύνολο ανήκει σε κάποιο άλλο. (Ξανά, ο κατάλογος δεν είναι πλήρης. Παραλείπουμε εκείνα τα αξιώματα που το περιεχόμενό τους είναι πιό δυσνόητο.)

$\exists x \forall y\ \neg(y \in x$, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο που δεν έχει κανένα άλλο σύνολο ως στοιχείο του (το αξίωμα του κενού συνόλου).

$\forall x \forall y\ (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$, δηλαδή, αν δύο σύνολα έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε είναι ίσα (το αξίωμα της έκτασης).

$\forall x \forall y \exists z \forall u\ (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$, δηλαδή, για κάθε δύο σύνολα, υπάρχει κάποιο τρίτο που κάποιο σύνολο είναι στοιχείο του αν και μόνο αν είναι ίσο με κάποιο από τα δύο πρώτα (αξίωμα του μη-διατεταγμένου ζεύγους)

$\forall x \exists y \forall u\ (u \in y \leftrightarrow \exists z\ (z \in x \wedge u \in z))$, δηλαδή, για κάθε σύνολο, υπάρχει ένα άλλο, ώστε κάτι ανήκει σε αυτό το άλλο αν ανήκει σε κάτι που είναι στοιχείο του πρώτου συνόλου (αξίωμα της ένωσης).

$\forall x \exists y \forall z\ (\forall u\ (u \in z \to u \in x) \leftrightarrow z \in y)$, δηλαδή, για κάθε σύνολο, υπάρχει ένα άλλο ώστε κάτι να ανήκει σε αυτό το άλλο αν και μόνο αν είναι υποσύνολο του πρώτου (αξίωμα του δυναμοσυνόλου).

$\forall x \exists y \forall z\ (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$, όπου φ είναι ένας οποιοσδήποτε τύπος της γλώσσας (αυτό προσδιορίζει μία οικογένεια αξιωμάτων, από ένα για κάθε τέτοιο δυνατό τύπο της γλώσσας). Λέει ότι, για κάθε σύνολο μπορούμε να φτιάξουμε ένα άλλο σύνολο που περιέχει ως στοιχεία ακριβώς εκείνα τα στοιχεία του πρώτου που ικανοποιούν τον τύπο φ (σχήμα αξιωμάτων κατασκευής υποσυνόλων).

$\exists x\ (\emptyset \in x \wedge \forall y\ (y \in x \leftrightarrow \{y\} \in x))$, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο που το κενό σύνολο ανήκει σε αυτό και, οτιδήποτε ανήκει σ' αυτό το σύνολο αν και μόνο αν το μονοσύνολο που περιέχει αυτό το κάτι ως στοιχείο, ανήκει κι αυτό στο σύνολο. Επομένως, λέει ότι μπορούμε να φτιάξουμε το σύνολο $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, ...\}$ (αξίωμα του απείρου). Εδώ φαίνεται να χρησιμοποιούμε νέα σύμβολα, πέραν του $\in$ που προσδιορίσαμε αρχικά. Δεν είναι όμως έτσι τα πράγματα. Το να λέμε $\emptyset \in x$ είναι συντομογραφία του τύπου

$$\exists u\ (\forall z\ \neg(z \in u) \wedge u \in x).$$

Ομοίως η έκφραση $\{y\} \in x$ είναι συντομογραφία (δείτε τις ασκήσεις).

Η γλώσσα της θεωρίας των ομάδων

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε περιπτώσεις γλωσσών, καθώς και προτάσεων που διατυπώνονται σε αυτές, που αποσκοπούσαν στο να περιγράψουν τη συμπεριφορά μίας συλλογής οντοτήτων που προσδιορίζει ένα μοναδικό μαθηματικό αντικείμενο (π.χ τη συλλογή των πραγματικών αριθμών, τη συλλογή των σημείων και των ευθειών του επιπέδου, τη συλλογή όλων των συνόλων). Τώρα θα γράψουμε προτάσεις στην κατηγορηματική λογική που προσδιορίζουν την έννοια της ομάδας. Θα γράψουμε δηλαδή προτάσεις που αναφέρονται στο πώς συμπεριφέρονται τα στοιχεία μίας ομάδας, όχι η συλλογή όλων των ομάδων. Ευθύς εξ' αρχής, επομένως, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μία πληθώρα παραδειγμάτων (δομών), στα στοιχεία των οποίων αναφέρονται οι παρακάτω προτάσεις. Ως συνήθως υιοθετούμε τα σύμβολα . (διμελές συναρτησιακό), $(-)^{-1}$ (μονομελές συναρτησιακό - η πράξη του "αντιστρόφου") και e (σύμβολο σταθεράς - το ουδέτερο στοιχείο). Τα αξιώματα λοιπόν της ομάδας είναι

$\forall x \forall y \forall z\ (x.(y.z) = (x.y).z)$,
$\forall x(x.e = x)$, $\forall x(e.x = x)$
$\forall x(x.x^{-1} = e)$, $\forall x(x^{-1}.x = e)$

Η γλώσσα της θεωρίας των δακτυλίων

Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για τη γλώσσα της θεωρίας των δακτυλίων. Εδώ έχουμε δύο διμελή συναρτησιακά σύμβολα + και ., ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο $-(\ )$ και δύο σύμβολα σταθερών, τα 0 και 1. Οι προτάσεις που περιγράφουν την έννοια του δακτυλίου είναι

$\forall x \forall y \forall z\ (x + (y + z) = (x + y) + z)$ $\forall x \forall y\ (x + y = y + x)$
$\forall x (x + 0 = x)$, $\forall x (x + (-x) = 0)$
$\forall x \forall y \forall z\ (x.(y.z) = (x.y).z)$,
$\forall x (x.1 = x)$, $\forall x (1.x = x)$
$\forall x \forall y \forall z\ (x.(y + z) = x.y + x.z)$, $\forall x \forall y \forall z\ ((y + z).x = y.x + z.x)$.

5.5 Ασκήσεις

1. Γράψτε σε μία γλώσσα που περιέχει τα σύμβολα +, ., 0, 1 (τα οποία καταλαβαίνουμε με τη συνηθισμένη τους σημασία) τύπους συνώνυμους με τις παρακάτω φράσεις:

(i) Κάθε άρτιος αριθμός είναι το άθροισμα δύο πρώτων

(ii) Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών x, y είναι ο z.

Είναι πρόταση κάποιος από τους τύπους που γράψατε;
Λύση:
(i) Για κάθε x, αν ο x άρτιος υπάρχουν πρώτοι αριθμοί y, z ώστε $x = y + z$
$\forall x(\text{άρτιος}(x) \longrightarrow \exists y \exists z(\text{πρώτος}(y) \wedge \text{πρώτος}(z) \wedge x = y + z))$
όπου:
άρτιος(x): $\exists r(x = 2r)$
πρώτος(y): $\forall t(\exists k(tk = y) \longrightarrow (t = 1) \vee (t = y))$
πρώτος(z): $\forall t(\exists k(tk = z) \longrightarrow (t = 1) \vee (t = z))$
(ii) ο z διαιρεί τον x και ο z διαιρεί τον y και αν υπάρχει k ώστε ο k να διαιρεί τον x και ο k να διαιρεί τον y τότε ο k διαιρεί τον z.
$\exists r(zr = x) \wedge \exists t(zt = y) \wedge \forall k(\exists r'(kr' = x) \wedge \exists t'(kt' = y)) \longrightarrow \exists m(km = z)$

2. Γράψτε στη γλώσσα της γεωμετρίας που αναπτύξαμε παραπάνω τις εκφράσεις:
(i) Δύο ευθείες παράλληλες προς μία τρίτη είναι παράλληλες και μεταξύ τους
(ii) Από ένα σημείο έξω από μία ευθεία φέρεται μία μοναδική ευθεία παράλληλη προς αυτήν.

3. Σε μία γλώσσα που περιέχει ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο $R(x, y)$, το οποίο διαβάζουμε ως "ο x αγαπάει τον y", γράψτε τις εκφράσεις:

α. Ολοι αλληλοαγαπούνται.

β. Υπάρχει κάποιος που τον αγαπούν όλοι.

γ. Υπάρχει κάποιος που αγαπάει μόνο τον εαυτό του.

Υποθέτουμε περαιτέρω ότι έχουμε στη γλώσσα ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f που διαβάζεται "ο γιός του" κι ένα σύμβολο σταθεράς c που διαβάζεται "Θανάσης". Γράψτε σε αυτή τη γλώσσα τις φράσεις:

α. Αν κάποιος αγαπάει τον Θανάση τότε τους αγαπάει όλους.

β. Ολοι αγαπούν τον γιό του Θανάση.

γ. Οποιος δεν αγαπάει τον Θανάση δεν αγαπάει ούτε τον γιό του.

δ. Υπάρχουν κάποιοι που είτε αγαπούν τον Θανάση είτε δεν αγαπούν κάνεναν που αγαπάει τον γιό του Θανάση.

ε. Αν κάποιος δεν αγαπάει τον γιό του τότε δεν είναι ο Θανάσης.

3. Σε μία γλώσσα που περιέχει ένα μονομελές σχεσιακό σύμβολο $S(x)$, το οποίο διαβάζουμε ως "ο x είναι ερωτευμένος", ένα άλλο μονομελές σχεσιακό σύμβολο $L(x)$, το οποίο διαβάζουμε ως "ο x είναι αφηρημένος", και ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο $K(x, y)$, το οποίο διαβάζουμε ως "ο x αγαπάει τον y", γράψτε τις εκφράσεις:

α. Ολοι οι ερωτευμένοι είναι αφηρημένοι αλλά δεν είναι όλοι οι αφηρημένοι ερωτευμένοι.

β. Οποιος είναι αφηρημένος και τους αγαπάει όλους είναι ερωτευμένος.

γ. Αν κάποιος αγαπάει μόνο τον εαυτό του, τότε δεν είναι ερωτευμένος.

δ. Αν δύο άνθρωποι αλληλοαγαπιούνται και είναι και αφηρημένοι, τότε είναι και οι δύο ερωτευμένοι.

Υποθέτουμε περαιτέρω ότι έχουμε στη γλώσσα ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f που διαβάζεται "ο γιός του" κι ένα σύμβολο σταθεράς c που διαβάζεται "Θανάσης".

4. Σε μία γλώσσα που περιέχει ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο $\leq$ εκφράστε με προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής τις ιδιότητες:

α. Η $\leq$ είναι σχέση διάταξης, δηλαδή ανακλαστική, μεταβατική και συμμετρική.

β. Η $\leq$ είναι πυκνή, δηλαδή μεταξύ δύο στοιχείων μπορούμε να παρεμβάλλουμε ένα τρίτο, που να είναι μεγαλύτερο του πρώτου και μικρότερο του δεύτερου.

γ. Η $\leq$ είναι γραμμική, δηλαδή κάθε δύο στοιχεία είναι συγκρίσιμα (ή το πρώτο είναι μικρότερο του δεύτερου ή το δεύτερο μικρότερο του πρώτου).

Γράψτε έναν τύπο δύο ελεύθερων μεταβλητών που να εκφράζει ότι ένα στοιχείο είναι αυστηρά μικρότερο κάποιου άλλου.

5. Γράψτε έναν τύπο με δύο ελεύθερες μεταβλητές στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων, της οποίας η έκφραση $\{y\} \in x$ να είναι συντομογραφία (δηλαδή να εκφράζει το ότι το μονοσύνολο με στοιχείο το y είναι στοιχείο του x.
Λύση: Ενας τρόπος να εκφράσουμε το ζητούμενο είναι να πούμε ότι αν κάτι περιέχει ως μοναδικό στοιχείο το y, δηλαδή

$$y \in z \wedge \forall u\, (u \in z \rightarrow u = y),$$

τότε αυτό το κάτι είναι στοιχείο του x, δηλαδή

$$\forall z\, ((y \in z \wedge \forall u\, (u \in z \rightarrow u = y)) \rightarrow z \in x).$$

7. Γράψτε στη γλώσσα της θεωρίας δακτυλίων (που περιέχει επομένως τα σύμβολα $+$, $.$, 0, 1) τους όρους που διαβάζονται “n-οστή δύναμη του x” και “n φορές το 1” (n είναι κάποιος φυσικός αριθμός), και στη συνέχεια γράψτε τις προτάσεις:

(i) Αν n φορές το 1 κάνει 0 τότε, για κάθε x, n φορές το x κάνει 0

(ii) Αν n φορές το 1 κάνει 0 τότε, n-οστή δύναμη ενός αθροίσματος κάνει το άθροισμα των n-οστών δυνάμεων.

Κεφάλαιο 6

ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ Ή ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΩΝ

6.1 Ορισμός της αλήθειας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο προσπαθήσαμε να αναδείξουμε τα κοινά γνωρίσματα που έχουν οι γλώσσες στις οποίες εκφραζόμαστε στα πλαίσια της συνηθισμένης μαθηματικής δραστηριότητας. Η έμφαση δόθηκε στο να αναλύσουμε αυτά τα κοινά γνωρίσματα από τη σκοπιά της σύνταξης της γλώσσας. Μας ενδιέφεραν πράγματα που είχαν να κάνουν με τον τρόπο γραφής των τύπων, το σωστό σχηματισμό τους, την ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητών κλπ, πράγματα που δεν έχουν να κάνουν με το αντικείμενο στο οποίο οι τύποι αυτοί αναφέρονται, με τις αλήθειες (ή τα ψεύδη) που προσπαθούν να εκφράσουν. Εδώ θα αποπειραθούμε να αποκαταστήσουμε την επαφή με το εκάστοτε αντικείμενο του (μαθηματικού) ενδιαφέροντός μας. Θα προσπαθήσουμε δηλαδή στους αποστεομένους τύπους της γλώσσας να δώσουμε νόημα και να εξετάσουμε κατά πόσο εκφράζουν πράγματα που είναι αληθή για ένα πεδίο αναφοράς.

Κάποιες τυπικές εκφράσεις στα πλαίσια μίας γλώσσας με συγκεκριμένα μη - λογικά σύμβολα αποκτούν νόημα αν θεωρήσουμε ότι αναφέρονται στα στοιχεία ενός συγκεκριμένου συνόλου, όπου τα δεδομένα μη - λογικά σύμβολα αποκτούν κάποια έννοια και δηλώνουν πράξεις ή σχέσεις, που γνωρίζουμε ότι ορίζονται σε αυτό το σύνολο. Παραδείγματος χάρη, η έκφραση

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))),$$

αν σκεφτόμαστε το σύμβολο f ως μια αλγεβρική πράξη, ας πούμε την πρόσθεση, μπορεί να πάρει τη σημασία "για κάθε τρείς αριθμούς x, y, z, το άθροισμα $(x + y) + z$ ισούται με το άθροισμα $x + (y + z)$", κάτι που αναγνωρίζουμε ως μία αλήθεια είτε προκειμένου για την πρόσθεση των φυσικών αριθμών, είτε για αυτήν των μιγαδικών αριθμών, είτε για μια σειρά άλλων "δομών" που έχουν μια προσεταιριστική πράξη. Το ίδιο θα ίσχυε και για μία έκφραση όπως η

$$\forall x\, \forall y\, ((f(x,c) = x)),$$

αν σκεφτόμαστε το σύμβολο f με τον ίδιο τρόπο και το σύμβολο c ως το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση οποιουδήποτε από τα παραπάνω σύνολα.

Αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό κατ' αρχήν έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι μεταβλητές δηλώνουν στοιχεία του ενός ή του άλλου συνόλου, κατά περίπτωση. Οι μεταβλητές λοιπόν πρέπει να αναφέρονται σε **ένα** συγκεκριμένο σύνολο κάθε φορά. Εν συνεχεία, όπως προκύπτει από τα παραδείγματα, τα συναρτησιακά σύνολα θα θέλαμε να δηλώνουν πράξεις ανάμεσα σε στοιχεία αυτού του συνόλου, τα σχεσιακά σύμβολα να δηλώνουν σχέσεις πάλι πάνω στο ίδιο σύνολο και τα σύμβολα σταθεράς να δηλώνουν διακεκριμμένα στοιχεία αυτού του συνόλου.

Εστω λοιπόν, γενικώτερα, $\mathcal{L}$ μια γλώσσα με χαρακτηριστική

$$(\{R_1, R_2, ...\}, \{f_1, f_2, ...\}, \{c_1, c_2, ...\}),$$

όπου τα στοιχεία των τριών συνόλων δηλώνουν, αντίστοιχα, τα σχεσιακά, τα συναρτησιακά και τα σύμβολα σταθερών της γλώσσας.

6.1.1 Ορισμός. Λέμε ότι η συλλογή

$$\mathcal{A} = (A, \{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, ...\}, \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ...\}, \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, ...\})$$

είναι μία **δομή** για τη γλώσσα $\mathcal{L}$ με φορέα το σύνολο A αν

- Οι $\tilde{R}_i \subseteq A \times ... \times A$ είναι σχέσεις, τόσων μεταβλητών όσα είναι και τα ορίσματα στα οποία εφαρμόζεται το σύμβολο R_i (θυμηθείτε ότι αυτή είναι μία πληροφορία που φέρει μαζί του το σύμβολο κι ότι δεν εμφανίζεται στη γραφή του μόνο για να μη βαρύνουμε το συμβολισμό).
- Οι $\tilde{f}_j$ είναι συναρτήσεις $A \times ... \times A \longrightarrow A$, τόσων μεταβλητών όσα είναι και τα ορίσματα στα οποία εφαρμόζεται το σύμβολο f_j
- Τα $\tilde{c}_k$ είναι διακεκριμμένα στοιχεία του συνόλου A.

Η συνολική απεικόνιση, $R_i \mapsto \tilde{R}_i$, $f_j \mapsto \tilde{f}_j$ και $c_k \mapsto \tilde{c}_k$ λέγεται μια **$\mathcal{A}$-ερμηνεία** της $\mathcal{L}$.

Παρατήρηση: Η έννοια της δομής και της ερμηνείας μίας γλώσσας, όπως αποτυπώνονται στον παραπάνω ορισμό έχουν έναν πολύ γενικό χαρακτήρα. Μπορεί δηλαδή η τυπική γλώσσα να προορίζεται να μιλήσει για κάποιο αντικείμενο αλλά να βρίσκουμε δομές γι αυτήν τη γλώσσα σε πολύ διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών από αυτές που μπορέι να έχουμε κατά νου. Αν, για παράδειγμα, έχουμε μία γλώσσα με ένα μόνο διμελές σχεσιακό σύμβολο (κανένα άλλο μη - λογικό σύμβολο), το οποίο προορίζεται να παίξει το ρόλο της διάταξης ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς, τότε δομή γι αυτήν τη γλώσσα μπορεί να συνιστά το σύνολο των φυσικών αριθμών με τη σχέση της διαιρετότητας ανάμεσά τους. Καταλαβαίνουμε ότι αυτό που δημιουργεί την ουσιαστική διάκριση μεταξύ των δύο είναι το τί προτάσεις αληθεύουν στη μία ή την άλλη δομή (το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη διάταξή τους από τη μία πλευρά, οι φυσικοί αριθμοί με τη διαιρετότητα, από την άλλη).

Το ζητούμενο λοιπόν είναι να δώσουμε νόημα στις τυπικές εκφράσεις της γλώσσας, έτσι ώστε να μπορούμε με ξεκάθαρο τρόπο να εξηγήσουμε με ποιά έννοια, για παράδειγμα, η πρόταση

$$\forall x\, \forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$$

είναι αλήθεια αν $R(x, y)$ σημαίνει ότι "ο πραγματικός αριθμός x είναι μικρότερος ή ίσος από τον πραγματικό αριθμό y" αλλά δεν είναι αλήθεια αν σημαίνει ότι "ο φυσικός αριθμός x διαιρεί τον φυσικό αριθμό y". Αυτό πλέον έχει να κάνει με την απόδοση τιμής αλήθειας σε εκφράσεις της γλώσσας, ανάλογα με το αν αντιστοιχούν σε "πραγματικά" ή όχι γεγονότα μέσα στο πεδίο στο οποίο αναφερόμαστε, δεδομένου του τρόπου με τον οποίο έχουμε ερμηνεύσει τα σύμβολα της γλώσσας. Καλούμαστε επομένως να δώσουμε έναν ακριβή ορισμό του τί σημαίνει πως η τυπική εκφραση φ ισχύει μέσα σε ένα πεδίο αναφοράς ή όχι. Αυτός ο ορισμός πρέπει να εφαρμόζεται σε όλες τις καλά σχηματισμένες εκφράσεις της γλώσσας με την οποία εκφραζόμαστε, δηλαδή σε όλους τους τύπους της γλώσσας. Υπάρχει όμως μία τεχνικού χαρακτήρα δυσκολία στι να δώσουμε έναν τέτοιο ορισμό. Η δυσκολία αυτή έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι τύποι μπορεί να έχουν ελεύθερες μεταβλητές. Μολονότι στο επίπεδο της συνηθισμένης πρακτικής αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να δώσουμε τιμές αλήθειας στις προτάσεις της γλώσσας, ο ορισμός είναι δύσκολο να δωθεί μόνο σχετικά με τις προτάσεις αφού αυτό που χτίσαμε βήμα - βήμα στην προηγούμενη ενότητα είναι οι τύποι, μεταξύ δε αυτών ξεχωρίσαμε τις προτάσεις. Η εφαρμογή ενός ποσοδείκτη μπορεί να μετατρέπει έναν τύπο με ελεύθερες μεταβλητή φ στην πρόταση $\forall x\varphi$ κι είναι αδύνατο να αναλύσουμε την αλήθεια αυτής της πρότασης με βάση την απλούστερη έκφραση φ αν δεν έχουμε έναν τρόπο να αναγνωρίζουμε την "αλήθεια" του τύπου φ. Λέμε "αλήθεια" (εντός εισαγωγικών) γιατί αναμένουμε πως αυτή δε μπορεί να έχει έναν εντελώς καθορισμένο χαρτακτήρα αν δεν ξέρουμε για ποιές τιμές των ελεύθερα εμφανιζόμενων μεταβλητών μιλάμε. Για παράδειγμα η έκφραση

$$\exists y\,(g(y, y) = x)$$

μπορεί να είναι αλήθεια αν αναφερόμαστε στους πραγματικούς αριθμούς, g δηλώνει τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών και $x = 2$, ενώ είναι ψέμα αν, υπό τις ίδιες προϋποθέσεις, είναι $x = -2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε μία ενδιάμεση έννοια "σχετικής αλήθειας" που θα καταλαβαίνουμε ως "ο τύπος φ αληθεύει για τη δομή $\mathcal{A}$ αν δώσουμε στις μεταβλητές τις τάδε τιμές". Αυτήν την τελευταία διαδικασία του να "δώσουμε στις μεταβλητές τις τάδε τιμές" μπορούμε, πολύ φυσιολογικά από μαθηματική άποψη, να την περιγράψουμε μέσω μίας συνάρτησης που θα έχει ως ορίσματα μεταβλητές και ως τιμές στοιχεία του συνόλου - φορέα της δομής $\mathcal{A}$,

$$v\colon \mathrm{Var} \to A$$

(Var είναι το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας, A είναι το σύνολο - φορέας της δομής $\mathcal{A}$). Θα ορίσουμε λοιπόν (βήμα - βήμα, όπως περιγράψαμε τους τύπους της γλώσσας) μία σχέση

$$\mathcal{A} \models_v \varphi,$$

που θα διαβάζουμε: η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τον τύπο φ αναφορικά με την αποτίμηση μεταβλητών v). Πριν φτάσουμε δε αυτόν τον ορισμό ας προσέξουμε το εξής: Κάποιες εκφράσεις της γλώσσας περιέχουν ενδεχομένως συνθετώτερους όρους, ας θεωρήσουμε, φερ' ειπείν την παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος

$$\exists y \, (g(y, y) = f(f(x, c), x)),$$

όπου g δηλώνει τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών και $x = 2$, όπως πριν, f δηλώνει την πρόσθεση δύο πραγματικών αριθμών και c δηλώνει το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, δηλαδή τον αριθμό 1. Τότε για να αποφανθούμε αν είναι αλήθεια η παραπάνω δήλωση δεν αρκεί να ξέρουμε τι τιμή θα πάρει η μεταβλητή x αλλά και όλη η έκφραση (δηλαδή ο όρος) $f(f(x, c), x)$. Καταλαβαίνουμε ότι ο όρος είναι ο $(x + 1) + x$ και παίρνει την τιμή $(2 + 1) + 2$ αν $x = 2$ (οπότε η δήλωση είναι αληθής) ενώ παίρνει την τιμή $((-1) + 1) + (-1) = -1$ αν $x = -1$ (οπότε η δήλωση δεν είναι αληθής). Γενικεύοντας, αν t είναι ένας τυχαίος όρος της γλώσσας και v είναι μία αποτίμηση μεταβλητών, μπορούμε να αποδίδουμε τιμές (=στοιχεία του συνόλου A) στον t, ανάλογα με την v. Επεκτείνουμε λοιπόν τη συνάρτηση v σε μία

$$\hat{v} \colon \mathrm{Term} \to A$$

(όπου Term είναι το σύνολο των όρων της γλώσσας). Αυτό γίνεται επαγωγικά ως εξής:

6.1.2 Ορισμός. **(i)** Αν ο όρος t συμπίπτει με μια μεταβλητή $x \in \mathrm{Var}$, τότε $\hat{v}(t) := v(x)$. Επίσης αν $t = c$ (c ένα σύμβολο σταθεράς της γλώσσας), τότε $\hat{v}(t) := \tilde{c}$ (θυμίζουμε ότι $\tilde{c}$ είναι η ερμηνεία του συμβόλου σταθεράς c στη δομή $\mathcal{A}$).

(ii) Αν $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ τότε $\hat{v}(t) = \tilde{f}(\hat{v}(t_1), \ldots \hat{v}(t_n))$ (θυμίζουμε ότι $\tilde{f}$ είναι η ερμηνεία του συναρτησιακού συμβόλου f στη δομή $\mathcal{A}$).

Εχοντας ορίσει την ερμηνεία των μη-λογικών και των λογικών συμβόλων καθώς επίσης και των όρων της γλώσσας, επανερχόμαστε στον επαγωγικό ορισμό της σχέσης

$$\mathcal{A} \models_v \varphi$$

Λέγοντας "επαγωγικό ορισμό" της σχέσης εννοούμε ότι θα την ορίσουμε πρώτα για την περίπτωση των απλούστερων δυνατών τύπων (δηλαδή των ατομικών τύπων), όπου έχουμε πολύ καλή ιδέα ως προς το τί πρέπει να σημαίνει η σχέση. Αν, ας πούμε, $R(t_1, t_2)$ δηλώνει τη συσχέτιση δύο όρων, οι όροι γίνονται αντιληπτοί (=ερμηνεύονται) ως πραγματικοί αριθμοί και το σχεσιακό σύμβολο ως ανισότητα, τότε ο τύπος ικανοποιείται, αν οι τιμή που παίρνει ο όρος t_1 είναι μικρότερη ή ίση από την τιμή που παίρνει ο t_2. Στη συνέχεια θα την ορίσουμε για συνθετότερους τύπους με τρόπο που αντανακλά την κοινή λογική. Για παράδειγμα, θα πούμε ότι μια σύζευξη τύπων ικανοποιείται (δηλαδή είναι ένας ισχυρισμός που αληθεύει αναφορικά με το πεδίο που εξετάζουμε) αν και τα δύο κομμάτια της σύζευξης ικανοποιούνται. Ο ορισμός αυτός έχει λοιπόν δύο χαρακτηριστικά: Πρώτον, έχει αναγωγικό χαρακτήρα (ανάγει την αλήθεια μίας συνθετότερης έκφρασης στην αλήθεια των συστατικών της κομματιών). Δεύτερον, η σύνθεση της αλήθειας των μερών μίας έκφρασης γίνεται με τρόπο ώστε να αντανακλάται η λειτουργία των συνδέσμων στην καθημερινή χρήση της γλώσσας, στην κοινή λογική (η αλήθεια δύο συστατικών μερών μίας έκφρασης συνδυάζεται με το "είτε" της καθομιλουμένης για να μας δώσει την αλήθεια της τυπικής διάζευξης των συστατικών μερών). Αυτή η απλή σύλληψη της αναγωγής της έννοιας της αλήθειας, στα πλαίσια μίας τυπικής γλώσσας, στην αλήθεια των συστατικών, έτσι ώστε να αντανακλάται η κοινή χρήση του "και", του "είτε", του "όχι", του "για κάθε" κλπ, οφείλεται στον Πολωνό φιλόσοφο και μαθηματικό A. Tarski και αποτέλεσε κομβικό σημείο στην ανάπτυξη της τυπικής - λογικής μεθόδου στην ανάλυση των μαθηματικών αλλά και άλλων από τις λεγόμενες "ακριβείς επιστήμες".

6.1.3 Ορισμός. **(i)** Αν ο τύπος φ είναι ατομικός, της μορφής $R(t_1, ..., t_m)$ τότε $\mathcal{A} \models_v R(t_1, ..., t_m)$ αν και μόνο αν η m-άδα $(\hat{v}(t_1), ..., \hat{v}(t_m))$ ανήκει στη σχέση $\tilde{R}$.

(ii) Αν ο τύπος φ είναι ο $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ τότε $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \wedge \varphi_2$ αν και μόνο αν

$$\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \quad \text{και} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_2$$

(iii) Αν ο τύπος φ είναι ο $\varphi_1 \vee \varphi_2$ τότε $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \vee \varphi_2$ αν και μόνο αν

$$\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \quad \text{είτε} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_2$$

(iv) Αν ο τύπος φ είναι ο $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ τότε $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ αν και μόνο αν

$$\text{αν} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_1 \quad \text{τότε} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_2$$

(v) Αν ο τύπος φ είναι ο $\neg\varphi_1$ τότε $\mathcal{A} \models_v \neg\varphi_1$ αν και μόνο αν

$$\text{δεν ισχύει ότι} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_1$$

(vi) Αν ο τύπος φ είναι ο $\exists x\varphi_1$ τότε $\mathcal{A} \models_v \exists x\varphi_1$ αν και μόνο αν

$$\text{υπάρχει} \quad v_1 \quad \text{ώστε} \quad \mathcal{A} \models_{v_1} \varphi_1,$$

όπου v_1 είναι μία αποτίμηση μεταβλητών, που δίνει σε όλες τις μεταβλητές, εκτός ίσως από την x, τις ίδιες τιμές με την v.

(vii) Αν ο τύπος φ είναι ο $\forall x\varphi_1$ τότε $\mathcal{A} \models_v \forall x\varphi_1$ αν και μόνο αν

$$\text{για κάθε} \quad v_1 \quad \mathcal{A} \models_{v_1} \varphi_1$$

όπου v_1 είναι μία αποτίμηση μεταβλητών, που δίνει σε όλες τις μεταβλητές, εκτός ίσως από την x, τις ίδιες τιμές με την v.

Παρατηρήσεις: 1. Χρειάζεται κάποιο σχόλιο για τα τελευταία δύο σημεία του ορισμού, που αναφέρονται στους ποσοδείκτες. Είναι κοινώς κατανοητό πως όταν λέμε ότι αληθεύει, προκειμένου για τους φυσικούς αριθμούς, η έκφραση $\forall x\, R(c, x)$ (όπου αντιλαμβανόμαστε το σύμβολο σταθεράς c ως τον αριθμό 1 και το σχεσιακό σύμβολο R ως "διαιρεί") , εννοούμε πως ότι τιμή κι αν δώσουμε στο x το 1 θα διαιρεί το x. Εδώ άλλες μεταβλητές δεν εμφανίζονται. Ελέγχουμε λοιπόν την αλήθεια της έκφρασης μόνο αναφορικά με το τι γίνεται αν δώσουμε όλες τις δυνατές τιμές στο x. Αν όμως εμφανίζονταν στην έκφραση $\forall x \psi$ άλλες 15 μεταβλητές (και μάλιστα ελεύθερα στον τύπο ψ) θα λέγαμε: ο τύπος $\forall x \psi$ αληθεύει (για δεδομένες τιμές των υπολοίπων 15 μεταβλητών) αν αληθεύει για κάθε δυνατή τιμή του x ο τύπος ψ (δεδομένων των τιμών των υπολοίπων 15 μεταβλητών». Η χρήση των αποτιμήσεων των μεταβλητών στις δύο αυτές τελευταίες περιπτώσεις του ορισμού έχει το πλεονέκτημα ότι μας αποδεσμεύει από το να νοιαζόμαστε για τις συγκεκριμένες τιμές των υπολοίπων μεταβλητών (πράγμα πολύπλοκο, ειδικά όταν οι λοιπές εμφανιζόμενες μεταβλητές είναι πολλές).

2. Η μεταβλητή x στους τύπους $\forall x \psi$ και $\exists x \psi$ μπορεί να εμφανίζεται ή να μην εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο ψ. Ο παραπάνω ορισμός μας εξασφαλίζει τη δυνατότητα να κάνουμε τον τυπικό έλεγχο της αλήθειας ενός τύπου και στις δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, είδαμε πώς λειτουργεί ο ορισμός στην παραπάνω παρατήρηση. Στη δεύτερη περίπτωση, αν ο τύπος ψ αναγνωρίζεται ως αληθής (π.χ ο τύπος $\forall z\, R(c,z)$, ερμηνευμένος όπως στην παρατήρηση 1), τότε αληθεύει και ο $\forall x\, \forall z\, R(c,z)$, αφού πράγματι, ότι τιμή κι αν πάρει η x ο τύπος $\forall z\, R(c,z)$ ικανοποιείται στους φυσικούς αριθμούς.

Θα δώσουμε τώρα ένα θεώρημα που μας επιτρέπει έναν πολύ πιο εύκολο χειρισμό του παραπάνω ορισμού. Στην ουσία διατυπώνει με επίσημο τρόπο αυτό που (ελπίζουμε) έγινε κατανοητό από όλη την προηγούμενη συζήτηση, ότι δηλαδή η τιμή αλήθειας ενός τύπου εξαρτάται μόνο από την αποτίμηση των μεταβλητών που εμφανίζονται ελεύθερα σε αυτόν. Η απόδειξη του αξίζει προσοχής, αφού είναι ενδεικτική του τρόπου που επιχειρηματολογούμε συνήθως, με επαγωγή ως προς την πολυπλοκότητα των τύπων, προκειμένου να αποδείξουμε ισχυρισμούς που αναφέρονται σε τυχαίους τύπους.

6.1.4 Θεώρημα. *Εστω ότι φ είναι ένας τύπος στη γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων και v, v' είναι δύο αποτιμήσεις μεταβλητών σε μία ερμηνεία $\mathcal{A}$, οι οποίες συμφωνούν σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του φ. Τότε $\mathcal{A} \models_v \varphi$ αν και μόνο αν $\mathcal{A} \models_{v'} \varphi$*

Απόδ.:

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος των τύπων.

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν στην αρχή να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας για ατομικούς τύπους. Αυτοί έχουν τη μορφή $R(x_1, ..., x_n)$, όπου R είναι ένα σχεσιακό σύμβολο της γλώσσας. Γράφουμε $\tilde{R}$ για την ερμηνεία του σχεσιακού αυτού συμβόλου στη δομή $\mathcal{A}$. Τότε αν είναι $v(x_1) = a_1$, ..., $v(x_n) = a_n$, οπότε είναι και $v'(x_1) = a_1$, ..., $v'(x_n) = a_n$, αφού οι δύο αποτιμήσεις μεταβλητών συμφωνούν στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου, έχουμε, με βάση τον ορισμό της ικανοποιησιμότητας σε μία εμηνεία:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A} \models_v R(x_1, ..., x_n) & \text{αν και μόνο αν} & (a_1, ..., a_n) \in \tilde{R} \\ & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_{v'} R(x_1, ..., x_n) \end{array}$$

Προχωράμε στην περίπτωση που ο τύπος είναι της μορφής $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Δεχόμαστε ότι η υπόθεση ισχύει για τους τύπους φ_1, φ_2. Επομένως έχουμε

$$\begin{array}{rll} \mathcal{A} \models_v \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_v \varphi_1 \quad \text{και} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_2 \\ \text{(από την επαγωγική υπόθεση)} & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_{v'} \varphi_1 \quad \text{και} \quad \mathcal{A} \models_{v'} \varphi_2 \\ & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_{v'} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{array}$$

Ομοίως προχωράμε και στην περίπτωση των άλλων συνδέσμων, αν δηλαδή ο φ είναι της μορφής $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \to \varphi_2$, ή $\neg\psi$. Ενδεικτικά, για την τελευταία περίπτωση έχουμε:

$$\begin{array}{rll} \mathcal{A} \models_v \neg\psi & \text{αν και μόνο αν} & \text{δεν ισχύει ότι} \mathcal{A} \models_v \psi \\ \text{(από την επαγωγική υπόθεση)} & \text{αν και μόνο αν} & \text{δεν ισχύει ότι} \mathcal{A} \models_{v'} \psi \\ & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_{v'} \neg\psi \end{array}$$

Κλείνουμε με το λιγότερο τετριμμένο βήμα της απόδειξης, που έχει να κάνει με την περίπτωση των ποσοδεικτών, δηλαδή με την περίπτωση που ο φ είναι, ας πούμε, της μορφής $\exists x\psi$ (η περίπτωση του καθολικού ποσοδείκτη είναι ίδια). Εστω λοιπόν ότι έχουμε $\mathcal{A} \models_v \exists x\psi$. Αυτό σημαίνει, με βάση τον ορισμό της ικανοποιησιμότητας ως προς την αποτίμηση μεταβλητών v, ότι υπάρχει μία αποτίμηση μεταβλητών w, η οποία συμφωνεί με την v σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$ έτσι ώστε $\mathcal{A} \models_w \psi$. Οι ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$ είναι αυτές του ψ, εκτός ίσως από την x. Θα φτιάξουμε λοιπόν μία αποτίμηση μεταβλητών w' με τις εξής δύο ιδιότητες:

Αφ' ενός θα συμφωνεί με τη v' στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$, αφ' εταίρου δε θα συμφωνεί με την w στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου ψ. Ορίζουμε την αποτίμηση αυτή ως εξής:

$$w'(z) = \begin{cases} v'(z), & z \neq x \\ w(z), & z = x \end{cases} \tag{6.1}$$

Πράγματι η συνάρτηση αυτή έχει τις δύο ιδιότητες που θέλουμε. Γιατί, είπαμε ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$ είναι αυτές του ψ, εκτός ίσως από την x, είναι δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, διαφορετικές από την x. Σε μία τέτοια μεταβλητή z έχουμε $w'(z) = v'(z)$, από τον ορισμό. Ικανοποιείται λοιπόν η πρώτη ιδιότητα που θέλουμε. Προκειμένου για τις ελεύθερες μεταβλητές του ψ έχουμε ότι είναι είτε η x είτε κάποια από τις ελεύθερες μεταβλητές του $\exists x\psi$. Οταν $z = x$, πάλι από τον ορισμό, έχουμε $w'(z) = w(z)$. Διαφορετικά, η z είναι ελεύθερη μεταβλητή του $\exists x\psi$ και, από την υπόθεση της πρότασης που αποδεικνύουμε, έχουμε $v(z) = v'(z)$. Ομως σε μεταβλητές που είναι ελεύθερες στον $\exists x\psi$, συμφωνούν οι v και w. Εχουμε λοιπόν, σ' αυτήν την περίπτωση:

$$w'(z) = v'(z) = v(z) = w(z)$$

Προχωράμε λοιπόν το επιχείρημά μας ως εξής:

Επειδή η w' συμφωνεί με την w στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου ψ, από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε $\mathcal{A} \models_w \psi$ αν και μόνο αν $\mathcal{A} \models_{w'} \psi$. Επιπλέον, επειδή η w' συμφωνεί με τη v' στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$, ή σε όλες του ψ εκτός ίσως της x, έχουμε $\mathcal{A} \models_{v'} \exists x\psi$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mathcal{A} \models_v \exists x\psi$ έπεται $\mathcal{A} \models_{v'} \exists x\psi$. Το επιχείρημα μπορεί να αντιστραφεί (έχει συμμετρικό χαρακτήρα, δεν παίζει ρόλο αν ξεκινάμε με την v ή την v') και με τον ίδιο τρόπο να συμπεράνουμε και ότι $\mathcal{A} \models_{v'} \exists x\psi$ έπεται $\mathcal{A} \models_v \exists x\psi$. ⊣▮

6.1.5 Πόρισμα. *Εστω ότι σ είναι μία πρόταση σε μία γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων και $\mathcal{A}$ είναι μία δομή γι αυτήν τη γλώσσα. Αν υπάρχει αποτίμηση μεταβλητών v για την οποία $\mathcal{A} \models_v \sigma$ τότε θα ισχύει και $\mathcal{A} \models_{v'} \sigma$, για κάθε άλλη αποτίμηση μεταβλητών v'. Αν δεν ισχύει για κάποια v ότι $\mathcal{A} \models_v \sigma$, τότε δε θα ισχύει ούτε για οποιαδήποτε άλλη v'.*

Απόδ.: Οταν η σ είναι πρόταση τότε δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές (αν θέλετε, το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών της είναι το κενό). Επομένως κάθε δύο αποτιμήσεις μεταβλητών συμφωνούν στις ελεύθερες μεταβλητές της σ! (για κάθε μεταβλητή z, αν z ανήκει στο σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών της σ, τότε $v(z) = v'(z)$.) Αρα, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, για οποιεσδήποτε v, v' $\mathcal{A} \models_v \sigma$ αν και μόνο αν $\mathcal{A} \models_{v'} \sigma$. ⊣

Παρατηρήσεις: 1. Προκειμένου λοιπόν για μία πρόταση σ έχει νόημα να γράφουμε $\mathcal{A} \models \sigma$, αφού αυτό συμβαίνει ή δεν συμβαίνει ανεξάρτητα αποτίμησης μεταβλητών. Ετσι φτάνουμε με πολύ αυστηρό τρόπο σε μία κατάληξη που η εμπειρία μας με τα μαθηματικά μας έκανε να διαισθανόμαστε: ότι, δηλαδή, μια οποιαδήποτε **πρόταση** που αναφέρεται σε ένα πεδίο που μελετάμε είτε αληθεύει είτε όχι. Σε ένα άλλο πεδίο, η ίδια πρόταση (διατυπωμένη στην ίδια γλώσσα) θα αληθεύει ή όχι κι αυτό θα συμβαίνει ανεξάρτητα της συμπεριφοράς της στο προηγούμενο πεδίο αναφοράς. Χαρακτηριστικά, η πρόταση

$$\forall x \, \exists y \, (y.y = x)$$

που ισχυρίζεται πώς κάθε αριθμός έχει τετραγωνική ρίζα, δεν αληθεύει στους πραγματικούς αριθμούς (κι αυτό δεν έχει να κάνει με καμμία αποτίμηση μεταβλητών) ενώ αληθεύει στους μιγαδικούς αριθμούς.

2. Προκύπτει επίσης από το παραπάνω θεώρημα ότι αυτό που έχει σημασία προκειμένου για την ικανοποιησιμότητα ή όχι ενός τύπου σε μία δομή είναι οι τιμές που παίρνουν οι ελεύθερες μεταβλητές του. Ετσι λοιπόν έχει νόημα πλέον να γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi(x_1/a_1, ..., x_n/a_n)$, εννοώντας ότι η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τον τύπο φ αν δώσουμε στις ελεύθερες μεταβλητές του $x_1, ..., x_n$ τις τιμές $a_1, ..., a_n$, αντίστοιχα.

3. Είδαμε παραπάνω ότι μία αποτίμηση μεταβλητών επεκετείνεται μονοσήμαντα σε μία αποτίμηση όλων των όρων. Αν λοιπόν ένας όρος t μπορεί να αντικατασταθεί για μία μεταβλητή x σ' έναν τύπο αυτό σημαίνει (εξ ορισμού) ότι οι μεταβλητές που συμμετέχουν στη γραφή του όρου παραμένουν ελεύθερες στον τύπο μετά την αντικατάσταση. Αν λοιπόν είχαμε $\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi(x)$ θα έχουμε $\mathcal{A} \models_v \varphi(t)$, όπου $\varphi(t)$ δηλώνει τον τύπο που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε μία ελεύθερη εμφάνιση μίας μεταβλητής x από τον όρο t. Αυτό συμβαίνει ακριβώς γιατί, για όλα τα $a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$. Ειδικώτερα, για το $\hat{v}(t) = b$ έχουμε $\models \varphi(x/b)$. Αυτή η ιδιότητα γενικεύει το απλό και κατανοητό γεγονός ότι, αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x έχουμε $x.x + 1 \geq 0$, όποια έκφραση t (που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα μέσα που έχουμε διαθέσιμα) κι αν βάλουμε στη θέση του x θα εξακολουθήσουμε να έχουμε $t.t + 1 \geq 0$.

6.2 Ικανοποιήσιμες προτάσεις, ταυτολογίες

6.2.1 Ορισμός. Λέμε ότι η δομή της γλώσσας $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τον τύπο φ ως προς την αποτίμηση μεταβλητών v αν

$$\mathcal{A} \models_v \varphi$$

Λέμε ότι ο τύπος είναι **ικανοποιήσιμος** αν υπάρχει δομή της γλώσσας και αποτίμηση μεταβλητών v που να ικανοποιούν τον φ. Ενας τύπος φ μίας γλώσσας της κατηγορηματικής λογικής λέγεται **ταυτολογία** (ή καθολικά έγκυρος) αν ικανοποιείται σε κάθε δομή $\mathcal{A}$ της γλώσσας και αποτίμηση μεταβλητών v. Λέμε ότι ο τύπος φ είναι **αντίφαση** (ή αντιλογία) αν δεν ικανοποιείται σε καμμία δομή της γλώσσας. Τέλος, λέμε ότι οι τύποι φ και ψ είναι **λογικά ισοδύναμοι** αν, οποτεδήποτε ικανοποιείται ο ένας, ικανοποιείται και ο άλλος, δηλαδή

$$\mathcal{A} \models_v \varphi \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \mathcal{A} \models_v \psi$$

Παρατήρηση: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της ικανοποιησιμότητας για να διαπιστώσετε ότι οι τύποι

$$\neg(\forall x \varphi) \qquad \text{και} \qquad \exists x\, \neg\varphi$$

είναι λογικά ισοδύναμοι. Το ίδιο για τους τύπους

$$\neg(\exists x \varphi) \qquad \text{και} \qquad \forall x\, \neg\varphi$$

Εξετάζουμε εδώ την καθολική εγκυρότητα κάποιων τύπων. Κυρίως μας ενδιαφέρει να αναδείξουμε τη σημασία των περιορισμών που τίθενται ως προς τις εμφανίσεις μεταβλητών. Δίνουμε αντιπαραδείγματα για να τονίσουμε τί θα μπορούσε να πάει στραβά αν δεν τίθονταν αυτοί οι περιορισμοί.

6.2.2 Πρόταση. *Οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες*

1. $\forall x(x = x)$

2. $\forall x \forall y\ (x = y \to (\varphi \to \varphi'))$, *όπου η μεταβλητή x είναι οποιαδήποτε, η μεταβλητή x είναι αντικαταστάσιμη από την y στον τύπο φ και ο τύπος φ' προκύπτει από αντικατάσταση κάποιων ελεύθερων εμφανίσεων της x από την y στον τύπο φ.*

3. $\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$, *όπου η x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον φ.*

4. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$, *όπου ο τύπος φ δεν περιέχει ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x.*

Σημειώνουμε εδώ ότι «η μεταβλητή x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t σε έναν τύπο» σημαίνει πρακτικά ότι η μεταβλητή x δεν είναι στο «πεδίο δράσης» κάποιου ποσοδείκτη $\forall y$ ή $\exists y$ μέσα στον τύπο, όπου η μεταβλητή y εμφανίζεται στον όρο t. Με άλλα λόγια

Απόδ.: Αφήνουμε τα δύο πρώτα ως άσκηση. Το (3.) συζητείται στην τελευταία παρατήρηση της προηγούμενης ενότητας.

Τέλος εξετάζουμε το (4.): Εστω μία τυχαία δομή $\mathcal{A}$ για τη γλώσσα όπου εκφράζονται οι φ, ψ. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)$$

Αυτό σημαίνει ότι,

$$\text{για όλα τα } \ a \in |\mathcal{A}|, \ \ \mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)(x/a)$$

Ειδικώτερα ότι,

$$\text{για όλα τα } \ a \in |\mathcal{A}|, \ \ \text{αν } \ \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \ \ \text{τότε } \ \mathcal{A} \models \psi(x/a) \tag{$*$}$$

Θέλουμε να καταλήξουμε στο ότι

$$\mathcal{A} \models \varphi \to \forall x \psi$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν επιπλέον ότι $\mathcal{A} \models \varphi$. Από τη στιγμή που η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο φ έχουμε πως για οποιαδήποτε αποτίμηση μεταβλητών ο τύπος φ ικανοποιείται στη δομή $\mathcal{A}$ ανεξάρτητα του τί τιμή παίρνει η μεταβλητή x κατά την αποτίμηση. Εχουμε λοιπόν, ειδικώτερα, $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$.

Η παραδοχή $(*)$ τώρα μας λέει πως

$$\text{για όλα τα } a \in |\mathcal{A}|,\ \mathcal{A} \models \psi(x/a)$$

Δηλαδή ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x \psi,$$

όπως ήταν το ζητούμενο. ⊣

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας αντιπαραδείγματα που καταδεικνύουν την αναγκαιότητα των διαφόρων περιορισμών που τίθενται κατά την παρουσίαση των αξιωματικών σχημάτων. Ξεκινώντας λοιπόν από το τελευταίο, ας θεωρήσουμε μια περίπτωση όπου η μεταβλητή x εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο φ. Παίρνουμε, στη γλώσσα της θεωρίας των πραγματικών αριθμών (με συναρτησιακά σύμβολα $\{+, .\}$, σχεσιακό σύμβολο $\leq$ και σύμβολα σταθεράς $\{0, 1\}$)

$$\varphi:\ 0 \leq x \qquad \psi:\ \exists y(y.y = x)$$

Εχουμε λοιπόν τον τύπο

$$\forall x(0 \leq x \to \exists y(y.y = x)) \to (0 \leq x \to \forall x \exists y(y.y = x)),$$

ο οποίος θέλουμε να είναι καθολικά έγκυρος.

Δίνοντας στα σύμβολα τη συνηθισμένη ερμηνεία τους στους πραγματικούς αριθμούς θα θέλαμε και για τη δομή των πραγματικών αριθμών (που συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$) να είναι

$$\mathbb{R} \models \forall x(0 \leq x \to \exists y(y.y = x)) \to (0 \leq x \to \forall x \exists y(y.y = x))$$

Η υπόθεση της συνεπαγωγής ικανοποιείται στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή

$$\mathbb{R} \models \forall x(0 \leq x \to \exists y(y.y = x)),$$

άρα θα έπρεπε να είναι και

$$\mathbb{R} \models (0 \leq x \to \forall x \exists y(y.y = x))$$

Για κάποια λοιπόν αποτίμηση που δίνει στο x θετική τιμή θα έπρεπε να είναι

$$\mathbb{R} \models \forall x \exists y (y.y = x)),$$

πράγμα που, φυσικά, δεν ισχύει.

Ομοίως, στην περίπτωση του σχήματος (3.), αν παίρναμε στην ίδια γλώσσα τον τύπο

$$\varphi : \exists y (y.x + 1 \leq 0)$$

και ζητούσαμε το σχήμα (3.) να είναι καθολικά έγκυρο χωρίς περιορισμούς θα έπρεπε να έχουμε, για την συνηθισμένη ερμηνεία της γλώσσας των πραγματικών αριθμών,

$$\mathbb{R} \models \forall x \exists y\ (y.x + 1 \leq 0) \to \exists y\ (y.y + 1 \leq 0)$$

Δεδομένου όμως ότι πράγματι είναι

$$\mathbb{R} \models \forall x \exists y\ (y.x + 1 \leq 0)$$

θα έπρεπε και

$$\mathbb{R} \models \exists y\ (y.y + 1 \leq 0),$$

πράγμα που φυσικά δεν συμβαίνει.

6.2.3 Πρόταση. *Οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες (και είναι γνωστοί ως* ***νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών****)*

(i) $\forall x(\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\exists x \varphi(x) \to \psi)$*, όταν η μεταβλητή* x *δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο* ψ

(ii) $\exists x(\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\forall x \varphi(x) \to \psi)$*, όταν η μεταβλητή* x *δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο* ψ

Απόδ.: Ασχολούμαστε με το (i). Το δεύτερο είναι πανομοιότυπο. Εστω μία τυχαία δομή $\mathcal{A}$ για τη γλώσσα όπου εκφράζονται οι φ, ψ κι ας υποθέσουμε ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi(x) \to \psi)$$

ενώ ταυτόχρονα έχουμε κι ότι

$$\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x)$$

Το πρώτο σημαίνει ότι,

$$\text{για όλα τα } a \in |\mathcal{A}|, \text{ αν } \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \text{ τότε } \mathcal{A} \models \psi$$

ενώ το δεύτερο ότι

$$\text{υπάρχει } a \in |\mathcal{A}|, \text{ ώστε } \mathcal{A} \models \varphi(x/a).$$

Επεται ότι $\mathcal{A} \models \psi$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x) \to \psi$ κι ας θεωρήσουμε ότι το $a \in |\mathcal{A}|$ είναι τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$. Τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x)$$

κι άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{A} \models \psi$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\text{αν } \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \text{ τότε } \mathcal{A} \models \psi$$

Αν το $a \in |\mathcal{A}|$ είναι τέτοιο ώστε δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$, τότε από την ψευδή υπόθεση $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\text{αν } \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \text{ τότε } \mathcal{A} \models \psi$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}|, \text{ αν } \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \text{ τότε } \mathcal{A} \models \psi \qquad \dashv$$

Παρατήρηση: 1. Εχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να δούμε το ρόλο που παίζει ο περιορισμός για τη μεταβλητή x στα παραπάνω: Αν πάρουμε για φ τον τύπο $x \geq 0$ και για ψ τον τύπο $\exists y\ (y.y = x)$, τότε ισχύει στους πραγματικούς αριθμούς $\forall x\ (x \geq 0 \to\ \exists y\ (y.y = x)$ καθώς επίσης και $\exists x\ (x \geq 0)$. Ομως δεν αληθεύει γενικά ότι $\mathbb{R} \models \exists y\ (y.y = x)$ $(*)$, αφού, λόγω της ελεύθερης εμφάνισης της μεταβλητής x, το τελευταίο έχει την έννοια ότι συμβαίνει για κάθε δυνατή τιμή της x (δηλαδή για κάθε αποτίμηση μεταβλητών). Προφανώς, αν δώσουμε στο x αρνητικές τιμές η σχέση $*$) δεν ισχύει.

2. Κάποιοι άλλοι σχετικοί νόμοι αφήνονται για επεξεργασία στις ασκήσεις.

6.3 Συλλογιστικά σχήματα

Στο παρόν κεφάλαιο δείχνουμε μια σειρά από «συλλογιστικά σχήματα» της Κατηγορηματικής Λογικής. Δηλαδή, παρουσιάζουμε μία σειρά από αποδείξεις ταυτολογικών συνεπειών που έχουν τη μορφή $\varphi, \psi \models \chi$, όπου φ, ψ, χ είναι τύποι της Κατηγορηματικής Λογικής. Τα σχήματα αυτά παρουσιάζουν κατ' αρχήν κάποιο ιστορικό ενδιαφέρον ως απόπειρες καταγραφής των βασικών λογικών νόμων σε εποχές που προηγήθηκαν της συμβολικής αντιμετώπισης της λογικής. Κυρίως όμως, από τη σκοπιά μας, αποτελούν μια σειρά από ασκήσεις πάνω στο ζήτημα της σημασιολογίας της Κατηγορηματικής Λογικής και τον ορισμό της αλήθειας κατά Tarski. Τα καταγράφουμε ως μία σειρά προτάσεων:

6.3.1 Πρόταση. $\forall x(\varphi \to \psi),\ \ \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)\ \models\ \exists x(\sigma \wedge \neg\varphi)$

Απόδ.: Εστω ότι η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του συλλογιστικού σχήματος, δηλαδή

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \to \psi), \quad \mathcal{A} \models \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$$

Τότε,

$$\text{για όλα τα } a \in |\mathcal{A}|,\ \ \mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)(x/a) \quad (1)$$

Επίσης, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, ώστε $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \neg\psi)(x/a)$. Αυτό σημαίνει ειδικώτερα ότι υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, ώστε, αφ' ενός

$$\mathcal{A} \models \sigma(x/a)\ \ (2),$$

αφ' εταίρου

$$\mathcal{A} \models \neg\psi(x/a)\ \ (3).$$

Από την άλλη πλευρά η (1) σημαίνει ότι, για όλα τα $a \in |\mathcal{A}|$, αν $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$ τότε $\mathcal{A} \models \psi(x/a)$. Ομως, για το συγκεκριμένο $a \in |\mathcal{A}|$ της (3) δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \psi(x/a)$. Αρα, για αυτό το $a \in |\mathcal{A}|$ δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$. Αρα, για αυτό το $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x/a)$. Ταυτόχρονα όμως, λόγω της (2), έχουμε, για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$, ότι $\mathcal{A} \models \sigma(x/a)$. Αρα, για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \neg\varphi)(x/a)$. Επομένως $\mathcal{A} \models \exists x(\sigma \wedge \neg\varphi)$ ⊣▮

6.3.2 Πρόταση. $\forall x(\varphi \to \psi),\ \ \exists x(\varphi \wedge \sigma)\ \models\ \exists x(\sigma \wedge \psi)$

Απόδ.: Εστω ότι η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του συλλογιστικού σχήματος, δηλαδή

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \to \psi), \quad \mathcal{A} \models \exists x(\varphi \wedge \sigma)$$

Τότε,
για όλα τα $a \in |\mathcal{A}|$, έχουμε $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)(x/a)$ (1)
Επίσης, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, ώστε $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \sigma)(x/a)$. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε:

$$\mathcal{A} \models \varphi(x/a) \ \ (2)$$

$$\mathcal{A} \models \sigma(x/a) \ \ (3)$$

Λόγω όμως του ότι ικανοποιείται η (1) για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$, άρα και για το συγκεκριμένο $a \in |\mathcal{A}|$ για το οποίο ικανοποιείται η (2) έχουμε οτι αναγκαστικά θα πρέπει, για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$, να έχουμε

$$\mathcal{A} \models \psi(x/a) \ \ (4)$$

Επομένως απο τις σχέσεις (3),(4) για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$ έχουμε $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \psi)(x/a)$.
Αρα $\mathcal{A} \models \exists x(\sigma \wedge \psi)$ ⊣▮

6.3.3 Πρόταση. $\neg\exists x(\varphi \wedge \psi), \ \exists x(\varphi \wedge \sigma) \ \models \ \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$

Απόδ.: Εστω ότι η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του συλλογιστικού σχήματος, δηλαδή

$$\mathcal{A} \models \neg\exists x(\varphi \wedge \psi), \quad \mathcal{A} \models \exists x(\varphi \wedge \sigma)$$

Ομως $\neg\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, οπότε η πρώτη υπόθεση γίνεται:

$$\mathcal{A} \models \forall x(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

Αρα, για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$: $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x/a)$ (1) είτε $\mathcal{A} \models \neg\psi(x/a)$ (2)
Επίσης, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, ώστε $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \sigma)(x/a)$. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε:

$$\mathcal{A} \models \varphi(x/a) \ \ (3)$$

$$\mathcal{A} \models \sigma(x/a) \ \ (4)$$

Η σχέση (1) δεν είναι δυνατον να ικανοποιείται γιατί τότε, λόγω της (3), θα έχουμε οτι στη δομή $\mathcal{A}$ θα ικανοποιείται η φ και η άρνηση της $\neg\varphi$, πράγμα άτοπο.
Οπότε απο τις σχέσεις (2),(4), για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$, έχουμε $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \neg\psi)(x/a)$.
Αρα $\mathcal{A} \models \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$ ⊣▮

6.4 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ταυτολογίες και εξηγείστε γιατί δεν ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές:

(i)$(\forall x\varphi \vee \forall\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$,

(ii) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$

(Υπόδειξη: Ως αντιπαράδειγμα για την αντίστροφη συνεπαγωγή, στο πρώτο, πάρτε $\varphi:\ x \leq 0$, $\psi:\ 0 \leq x$ και ερμηνέψτε στους πραγματικούς αριθμούς. Στο δεύτερο, πάρτε για φ έναν τύπο που να λέει "ο x είναι άρτιος" και για ψ έναν τύπο που να λέει "ο x είναι περιττός" και ερμηνέψτε τους στους φυσικούς αριθμούς.)

2. Για την καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε μια δομή που να την ικανοποιεί και μία που να μην την ικανοποιεί:

(i)$\forall x\forall y\ (R(x,y) \to \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)))$,

(ii) $\forall x\forall y(R(x,y) \to \exists z(R(x,z) \vee R(z,y)))$,

(iii) $\forall x\forall y(R(x,y) \vee R(y,x))$,

(iv) $\forall x\forall y(R(x,x) \to (R(x,y) \vee R(y,x)))$,

(v) $\forall x\forall y\forall z(R(x,x) \to (R(x,z) \vee R(z,y)))$,

όπου R είναι ένα τυχαίο διμελές σχεσιακό σύμβολο. Μπορεί να ερμηνευτεί ως οποιαδήποτε σχέση, σε οποιοδήποτε σύνολο.

(Υπόδειξη: Σκεφτείτε σχέσεις μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων που ήδη γνωρίζετε, όπως διάταξη, διαιρετότητα, παραλληλία, συνευθειακότητα κλπ. Προσδιορίστε με ακρίβεια το σύνολο στο οποίο κάνετε την ερμηνεία, δηλαδή το σύνολο - φορέα της δομής. Προσπαθήστε να διατυπώσετε με λόγια τι λέει η κάθε πρόταση για τα στοιχεία του συνόλου, όπου κάνετε την ερμηνεία. Αντί να αποδείξετε με βάση τους ορισμούς ότι μία πρόταση ικανοποιείται στη δομή που επιλέξατε, διαβάστε τί λέει για τα στοιχεία του συνόλου - φορέα και αναγνωρίστε μία γνωστή αλήθεια γι' αυτό. Π.χ μπορεί μία πρόταση να λέει για τη διάταξη ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς ότι αν ένας αριθμός είναι μικρότερος ενός δεύτερου και ο δεύτερος ενός τρίτου, τότε και ο πρώτος είναι μικρότερος του τρίτου.)

3. Για την καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε μια δομή που να την ικανοποιεί και μία που να μην την ικανοποιεί:

(i)$\forall x \forall y\ (R(x, x, y)) \wedge R(x, y, y))$,

(ii) $\forall x \forall y \forall z (R(x, y, z) \rightarrow \exists w (R(x, w, y) \vee R(y, w, z)))$,

(iii) $\forall x \forall y \forall z\ (R(x, y, z) \rightarrow \exists u R(x, u, y) \wedge \exists w R(y, w, z))$,

(R είναι ένα τυχαίο τριμελές σχεσιακό σύμβολο.)

4. Βρείτε μια δομή που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τους τύπους:

(i) $(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge S(x, y))$ και

(ii) $(\forall x)(\neg P(x, x))$

Λύση: Παίρνουμε ως σύνολο φορέα της δομής μας αυτό των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Ερμηνεύουμε το σύμβολο P ως τη σχέση $>$ (αυστηρά μεγαλύτερο απο) και το σύμβολο S ως τη σχέση $|$ (διαιρεί, δηλ. $|(x, y)$ αν και μόνο αν υπάρχει z ώστε $x.z = y$)).
Παίρνουμε την δομή $\mathcal{M} =< \mathbb{N}, >, \cdot, 0, 1 >$, τότε οι δύο τύποι γίνονται:

$$(\forall x)(\exists y)(y > x \wedge x|y),$$

που εκφράζει για τους φυσικούς αριθμούς το γνωστό γεγονός ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει ένα μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του και

$$(\forall x)(\neg(x > x)),$$

που εκφράζει δηλαδή για τους φυσικούς αριθμούς ότι κανένας αριθμός δεν είναι μεγαλύτερος του εαυτού του.

5. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ταυτολογίες:

(i)$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$,

(ii) $(\exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$

6. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ταυτολογίες και δώστε αντιπαραδείγματα που να εξηγούν γιατί είναι αναγκαίοι οι περιορισμοί ως προς τις ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών.

(i)$\forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\psi)$, όταν η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο φ

(ii) $\exists x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi(x) \to \exists x\psi)$, όταν η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο ψ

7. Χρησιμοποιείστε την παρατήρηση μετά τον Ορισμό 3.2.1 για να βρείτε μία πρόταση λογικά ισοδύναμη με την

$$\exists x\ (\varphi(x) \to \forall y\varphi(y)),$$

που θα ξεκινάει με καθολικό ποσοδείκτη και δεν θα περιέχει το σύμβολο της συνεπαγωγής. Δείξτε ότι είναι ταυτολογία αυτή η πρόταση. (Υπόδειξη: Προσπαθήστε να εξετάσετε αν υπάρχει ερμηνεία που να επαληθεύει την άρνηση της παραπάνω πρότασης.)

8. Εστω ότι S είναι ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο. Δείξτε ότι είναι ταυτολογία η πρόταση

$$\neg\exists y\forall x\ (S(y,x) \leftrightarrow \neg S(x,x).$$

Προσπαθείστε και εδώ να βρείτε μία πρόταση λογικά ισοδύναμη με τη δοθείσα, ακολουθώντας την οδηγία της παραπάνω άσκησης.

9. Δείξτε, με τη βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος, ότι δεν είναι ταυτολογία η πρόταση

$$\forall x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\forall x\varphi$$

Ισχύει κάποια από τις συνεπαγωγές;

10. Γράψτε μία πρόταση που για να την ικανοποιεί μία δομή πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο (Υπόδειξη: Προσπαθήστε να δείτε αν αληθεύει σε μία τυχαία δομή η πρόταση $\exists x(x = x)$.) Στη συνέχεια γράψτε μία πρόταση που για να την ικανοποιεί μία δομή πρέπει να έχει ακριβώς ένα στοιχείο. (Υπόδειξη: Προσπαθήστε να δείτε τί σημαίνει ότι αληθεύει σε μία δομή η πρόταση $\forall x\forall y(x = y)$.)

11. Γράψτε μία πρόταση που για να την ικανοποιεί μία δομή πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Στη συνέχεια γράψτε μία πρόταση που για να την ικανοποιεί μία δομή πρέπει να έχει ακριβώς δύο στοιχεία.

12. Εστω ότι Γ και Δ είναι δύο σύνολα προτάσεων σε μία γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής. Θέτουμε

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \sigma, \ \text{ για όλες τις } \ \sigma \in \Gamma\}$$

(δηλαδή Mod(Γ) είναι το σύνολο των δομών που ικανοποιούν όλες τις προτάσεις του συνόλου Γ.) Δείξτε ότι,

$$\text{αν} \quad \Gamma \subseteq \Delta, \quad \text{τότε} \quad \mathrm{Mod}(\Gamma) \supseteq \mathrm{Mod}(\Delta).$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι, για τυχαία σύνολα προτάσεων Γ, Δ σε μία γλώσσα,

$$\mathrm{Mod}(\Gamma \cup \Delta) = \mathrm{Mod}(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}(\Delta).$$

Βιβλιογραφία

[1] Z. Adamowicz and P. Zbierski, *Logic of Mathematics: A Modern Course of Classical Logic*, wiley, 1997.

[2] D. W. Barnes and J. M. Mack, *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic.* Graduate Text in Math, # 22, Springer 1975

[3] Jon Barwise (Ed.). *Handbook of Mathematical Logic* North-Holland, Amsterdam, 1977.

[4] J.L. Bell, and M.Machover, *A course in Mathematical Logic*. North Holland, 1977.

[5] J. Bridge, *Beginning model theory: the completeness theorem and some consequences*, Oxford 1977.

[6] S. Burris, *Logic for Mathematics and Computer Science*, Prentice-Hall, 1998.

[7] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*. Springer 1981.

[8] C. C. Chang and H. J. Keisler : *Model theory*. North Holland,3rd Ed. (1990).

[9] R. Cori and D. Lascar, *Mathematical Logic: A Course with Exercises* Part I, II, Oxford, 2000.

[10] J.N. Crosley et All, *What is Mathematical Logic?* Oxford, 1972.

[11] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge 1990.

[12] H. Delong, *A profile of Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1970.

[13] K. Devlin. *The Joy of Sets.* Springer, Heidelberg, 1984.

[14] Κώστας Α. Δρόσος *Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη: Τομ. 1ος Μαθηματικές Περιηγήσεις.* Πάτρα 1999.

[15] H. D. Ebbinghauss, J. Flumm, and W. Thomas, *Mathematical Logic*, 3nd edition, Springer, 1984

[16] Enderton, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1997

[17] M. Fitting, *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*, Springer, 1996.

[18] Jean H. Gallier, *Logic for Computer Science* Wiley, 1987.

[19] Hamilton, A. G., *Numbers, Sets, and Axioms.* Cambridge Univ. Press 1982.

[20] A. G. Hamilton, *Logic for Mathematicians*, Cambridge University Press; Revised editiom (January 1989)

[21] P. Halmos and S. Givant, *Logic as Algebra*, The Math. Assoc. of America, 1998.

[22] Johnstone, P., *Notes on Logic and Set Theory.* Cambridge 1987.

[23] Κ. Κάλφα, *Αξιωματική Θεωρία Συνόλων*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1990

[24] S. Kleene, *Mathematical Logic*, Wiley, 1968.

[25] E. J. Lemmon, *Beginning Logic.* Van Nostrand Reinhold (UK) Co. Ltd. 1965.

[26] H. R. Lewis, Χρήστος Παπαδημητρίου, *Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού.* Τεχν. Επιμελ. Ελλάδας, 1992.

[27] Γιώργος Μπτακίδης, *Από τη Λογική στο Λογικό Προγραμματισμό και την Προλογ*, Εκδόσεις Καρδαμίτσα, 1992.

[28] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, 1964.

[29] Μοσχοβάκης, Γιάννης, *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, Εκδ. Νεφέλη Αθήνα 1993 (Αγγλική έκδοση Springer verlag).

[30] A. Nerode and R. Shore, *Logic for Applications*, Spinger, 1997.

[31] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, PWN-Polish Scientific Publishers, 1963.

[32] Jean Rubin, *Mathematical Logic:Applications and Theory* Saunders, 1990.

[33] J. R. Schoenfield, *Mathematical Logic*, Addison Wesley, 1967.

[34] R. M. Smullyan, *First-order Logic*, Spinger, 1968.

[35] Αθ. Τζουβάρας, *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*, Θεσσαλονίκη, 1987.

[36] D. Van Dalen, *Logic and Structure* 3rd Edition, Springer, 1980.

[37] D. van Dalen, H. C. Doets and H. de Swart, *Sets: Naive, Axiomatic and Applied.* Pergamon Press 1978

[38] Χ. Χαρτώνας, Βασική Λογική, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2000.