Μάθημα 3

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Περιγραφή με Αναγωγή

Αντίθετα με την περιγραφή στον χώρο κατάστασης, όπου η βασική δομή είναι η κατάσταση, στην περιγραφή με αναγωγή η βασική δομή είναι η περιγραφή του προβλήματος

Βασική ιδέα: Δοσμένης μιας αρχικής περιγραφής του προβλήματος, μπορούμε να εφαρμόσουμε μία σειρά από τελεστές, οι οποίοι ανάγουν την αρχική περιγραφή σε επιμέρους υποπροβλήματα, τα οποία είναι άμεσα επιλύσιμα

Έννοιες που εμπλέκονται:

- **Αρχική και Τελική Περιγραφή**
- **Τελεστές Αναγωγής**
- **Ορισμός προβλήματος**

Περιγραφή με Αναγωγή

- **Αρχική και Τελική Περιγραφή του Προβλήματος**: Σε αντίθεση με την αρχική και τελική κατάσταση στον χώρο κατάστασης, εδώ υπάρχουν οι έννοιες της αρχικής και τελικής περιγραφής του προβλήματος

  - *Αρχική περιγραφή*: εκφράζει με συγκεκριμένο τρόπο τα δεδομένα του προβλήματος
  - *Τελική περιγραφή*: εκφράζει με συγκεκριμένο τρόπο τα ζητούμενα του προβλήματος

- **Τελεστής Αναγωγής**: Ανάγει το πρόβλημα σε επιμέρους υποπροβλήματα. Για να λυθεί το αρχικό πρόβλημα πρέπει να επιλύσουμε αυτά τα επιμέρους προβλήματα. Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί Τελεστές Αναγωγής για κάθε πρόβλημα

- **Ορισμός Προβλήματος**: P=(ID, GD, TR, PP)
  ID: Αρχική Περιγραφή
  GD: Σύνολο Τελικών Περιγραφών
  TR: Σύνολο Τελεστών Αναγωγής
  PP: Σύνολο Υποβροβλημάτων

Περιγραφή με Αναγωγή

Πρόβλημα: Δεδομένου ότι το 0 και το 1 με $0<1$ (προφανώς) είναι ακέραιοι και ότι το άθροισμα δύο ακεραίων είναι ακέραιος, να αποδειχθεί ότι το πλήθος των ακεραίων είναι άπειρο

Αρχική Περιγραφή (Δεδομένα): το $\nu=0$ και το $\nu=1$ είναι ακέραιοι
Τελική Περιγραφή (Ζητούμενα): το πλήθος των ακεραίων είναι άπειρο
Τελεστής Αναγωγής: Το άθροισμα (+)

Λύση/Απόδειξη
Πρόβλημα (Βήμα) 1). *Αποδεικνύω για $\nu=2$*: $\nu=2=1+1$. Δηλαδή ο αριθμός $\nu=2$ δίνεται ως άθροισμα δύο ακεραίων (1+1) και άρα με βάση τα δεδομένα του προβλήματος είναι ακέραιος και είναι $1<2$
Πρόβλημα (Βήμα) 2). *Δέχομαι ότι ο αριθμός ν είναι ακέραιος με $\nu-1<\nu$*
Πρόβλημα (Βήμα) 3). Αποδεικνύω για $\nu+1$: αριθμός $\nu+1$ είναι το άθροισμα του αριθμού ν και του 1. Όι δύο τελευταίοι είναι ακέραιοι, και άρα με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, και ο αριθμός $\nu+1$ είναι ακέραιος με $\nu<\nu+1$. Επειδή το τελευταίο βήμα μπορεί να εφαρμοσθεί επ' αόριστο, προκύπτει ότι μπορώ να παράγω άπειρους ακέραιους αριθμούς

Προτασιακή Λογική

Σύνταξη

- ***Ατομικές Προτάσεις***: αποτελούνται από ένα μεμονωμένο σύμβολο. Κάθε σύμβολο αντιπροσωπεύει μία ατομική πρόταση, η οποία μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής.
  Τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι κεφαλαία γράμματα, π.χ. P, Q, R, A, B, κ.λ.π.

- ***Σύνθετες Προτάσεις:*** Αποτελούνται από δύο ή περισσότερες Ατομικές Προτάσεις που συνδέονται μεταξύ τους με ειδικούς τελεστές που ονομάζονται Λογικά Συνδετικά ή <u>*Λογικές Πράξεις*</u>
  (Παρατήρηση: Όταν γράφουμε/διατυπώνουμε Σύνθετες Προτάσεις πρέπει να βάζουμε παρενθέσεις ή να έχουμε υπόψη την σειρά εκτέλεσης των Λογικών Πράξεων

Προτασιακή Λογική

Σύνταξη

Λογικές Πράξεις:

- $\wedge$: Σύζευξη (ΚΑΙ), τα μέλη της ονομάζονται συζευκτέοι
- $\vee$: Διάζευξη (Ή), τα μέλη της ονομάζονται διαζευκτέοι
- $\neg$: Άρνηση (ΌΧΙ), μπορεί να αναφέρεται σε ατομική αλλά και σε σύνθετη πρόταση
- $\rightarrow$: Συνεπαγωγή, έχει δύο μέρη την υπόθεση και το συμπέρασμα (***<u>Αν-Τότε κανόνας</u>***). Τόσο η υπόθεση όσο και το συμπέρασμα είναι απλές ή σύνθετες προτάσεις
- $\leftrightarrow$: Ισοδυναμία, είναι αμφίδρομη συνεπαγωγή

Σειρά εκτέλεσης από την πιο δυνατή στην πιο αδύνατη

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

Προτασιακή Λογική

Σημασιολογία

Η σημασιολογία (semantics) καθορίζει τους κανόνες για τον προσδιορισμό της αλήθειας ή του ψεύδους μιας πρότασης, σε σχέση με ένα συγκεκριμένο μοντέλο

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ/ΨΕΥΔΟΥΣ
M1={P=Αληθής, Q=Αληθής}	$P \wedge Q$ Αληθής $P \vee Q$ Αληθής
M1={P=Αληθής, Q=Ψευδής}	$P \wedge Q$ Ψευδής $P \vee Q$ Αληθής
M1={P=Ψευδής, Q=Αληθής}	$P \wedge Q$ Ψευδής $P \vee Q$ Αληθής
M1={P=Ψευδής, Q=Ψευδής}	$P \wedge Q$ Ψευδής $P \vee Q$ Ψευδής

Για 2 ατομικές προτάσεις έχουμε 2 2=4 μοντέλα, για 3 ατομικές προτάσεις έχουμε 2 2 2 =8 μοντέλα, κοκ

Προτασιακή Λογική

Σημασιολογία

Συμπέρασμα

- Η σημασιολογία της προτασιακής λογικής καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η τιμή αληθείας οποιασδήποτε πρότασης με βάση το δεδομένο μοντέλο.

- Πρώτα καθορίζουμε πως υπολογίζεται η αλήθεια/ψεύδος των ατομικών προτάσεων και μετά υπολογίζεται η αλήθεια/ψεύδος των σύνθετων προτάσεων

Προτασιακή Λογική

Πίνακες Αληθείας: Περιγράφουν την αλήθεια/ψεύδος ατομικών ή σύνθετων προτάσεων με βάση τα αντίστοιχα μοντέλα

P	Q	$\neg$ P	$\neg$ Q	P $\wedge$ Q	P $\vee$ Q	P $\rightarrow$ Q	P $\leftrightarrow$ Q
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Έλεγχος της συνεπαγωγής

P: “Επιδιώκω την ειρήνη” Q: “Αποφεύγω τον πόλεμο”

Αν P τότε Q (Αληθής)

Αν P τότε ΌΧΙ(Q) (Ψευδής)

Αν ΌΧΙ(P) τότε Q (Αληθής)

Αν ΌΧΙ(P) τότε ΌΧΙ(Q) (Αληθής)

Προτασιακή Λογική: Ιδιότητες

Τρεις Βασικές Ιδιότητες της Προτασιακής Λογικής

- Λογική Ισοδυναμία
- Λογική Εγκυρότητα
- Λογική Ικανοποιησιμότητα

Α. Λογική Ισοδυναμία

Δύο προτάσεις α και β είναι λογικά ισοδύναμες όταν έχουν τον ίδιο πίνακα αληθείας και το συμβολίζουμε ως $\alpha \rightleftharpoons \beta$

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\beta \wedge \alpha$	$\alpha \vee \beta$	$\beta \vee \alpha$	$\alpha \to \beta$	$\neg\beta \to \neg\alpha$	$\neg\alpha \vee \beta$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

$$\alpha \wedge \beta \rightleftharpoons \beta \wedge \alpha$$

$$\alpha \vee \beta \rightleftharpoons \beta \vee \alpha$$

$$\alpha \to \beta \rightleftharpoons \neg\beta \to \neg\alpha$$

$$\neg\beta \to \neg\alpha \rightleftharpoons \neg\alpha \vee \beta$$

$$\alpha \to \beta \rightleftharpoons \neg\alpha \vee \beta$$

Προτασιακή Λογική: Ιδιότητες

B. Λογική Εγκυρότητα

Μία πρόταση είναι έγκυρη όταν είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα. Δηλαδή όταν στον πίνακα αληθείας είναι πάντα αληθής

α	$\neg\alpha$	$\alpha \lor (\neg \alpha)$
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α

Μία έγκυρη πρόταση ονομάζεται <u>ταυτότητα</u>

Προτασιακή Λογική: Ιδιότητες

Γ. Λογική Ικανοποιησιμότητα

Μία πρόταση είναι ικανοποιήσιμη όταν είναι αληθής σε τουλάχιστον ένα μοντέλο του πίνακα αληθείας

α	$\neg\alpha$	$\alpha \vee (\neg \alpha)$	$\alpha \wedge (\neg \alpha)$
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ

Ικανοποιήσιμη

Μη Ικανοποιήσιμη

Προτασιακή Λογική

Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπεράσματος (Συμπερασμός)

Συμπερασμός είναι η λογική συλλογιστική με την οποία εξάγουμε συμπέρασμα από μία ή περισσότερες προτάσεις. Βασίζεται στα παρακάτω:

- Λογική Ισοδυναμία
- Λογική Εγκυρότητα
- Λογική Ικανοποιησιμότητα

Τα αναλύσαμε προηγουμένως

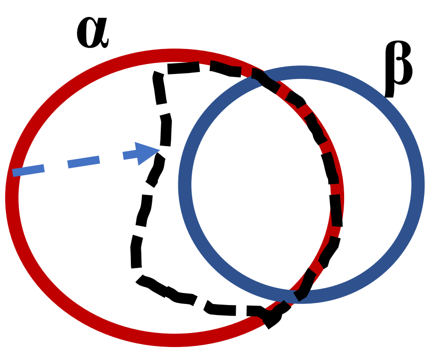
- Στην έννοια της Λογικής Κάλυψης
- Στην έννοια της Λογικής Απόδειξης

Προτασιακή Λογική
Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπεράσματος (Συμπερασμός)

- **Λογική Κάλυψη**
  - Αν **α** και **β** είναι δύο (ατομικές ή σύνθετες) προτάσεις τότε η λογική κάλυψη συμβολίζεται ως **α** $\mapsto$ **β** και σημαίνει ότι η πρόταση **α** καλύπτει την πρόταση **β**, ή πιο συγκεκριμένα η αλήθεια της **α** καλύπτει την αλήθεια της **β**
  - **α** $\mapsto$ **β**: υποδηλώνει ότι αν σε ένα μοντέλο η **α** είναι αληθής τότε και η **β** είναι αληθής, δηλ. η αλήθεια της **β** περιέχεται στην αλήθεια της **α**

	α	β	α ∨ β
Μοντέλο 1 (M1)	A	A	A
Μοντέλο 2 (M2)	A	Ψ	A
Μοντέλο 3 (M3)	Ψ	A	A
Μοντέλο 4 (M4)	Ψ	Ψ	Ψ

Μοντέλο (M)



	α	β	¬α	α → β
Μοντέλο 1 (M1)	A	A	Ψ	A
Μοντέλο 2 (M2)	A	Ψ	Ψ	Ψ
Μοντέλο 3 (M3)	Ψ	A	A	A
Μοντέλο 4 (M4)	Ψ	Ψ	A	A

Προτασιακή Λογική

Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπεράσματος (Συμπερασμός)

- **Λογική Απόδειξη**
  - Απόδειξη είναι μία σειρά από βήματα, καθένα από τα οποία εφαρμόζεται σε προηγούμενα βήματα και καθορίζει έναν μηχανισμό λογικής ερμηνείας των βημάτων αυτών δημιουργώντας, έτσι, μία νέα πρόταση με απώτερο σκοπό την παραγωγή της παραγωγή της απόδειξης ή την κατάληξη σε άτοπο
  - Το γεγονός ότι μία πρόταση P μπορεί να αποδειχθεί από μία προηγούμενη πρόταση S ονομάζεται Λογική Απόδειξη και συμβολίζεται ως: $S \triangleright P$

α	β	¬α	¬α ∨ β
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Παρατήρηση

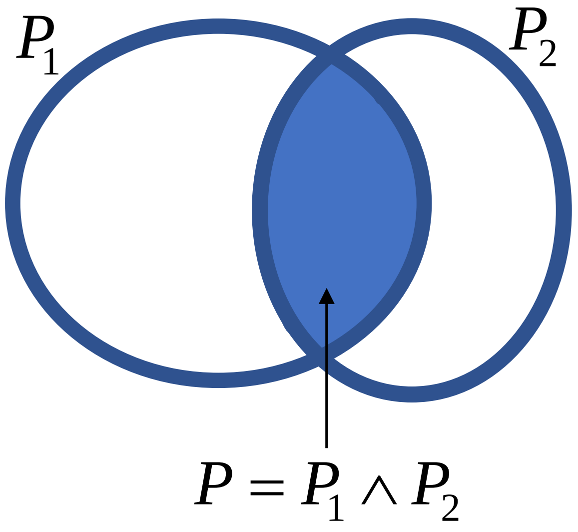
Η χρήση της Λογικής Απόδειξης για την εξασφαλίζει ότι οι νέες προτάσεις που δημιουργούνται σε κάθε βήμα συνεπάγονται λογικά από τις προηγούμενες και άρα είναι λογικά συμπεράσματα αυτών

Προτασιακή Λογική

Μηχανισμοί Εξαγωγής Συμπεράσματος

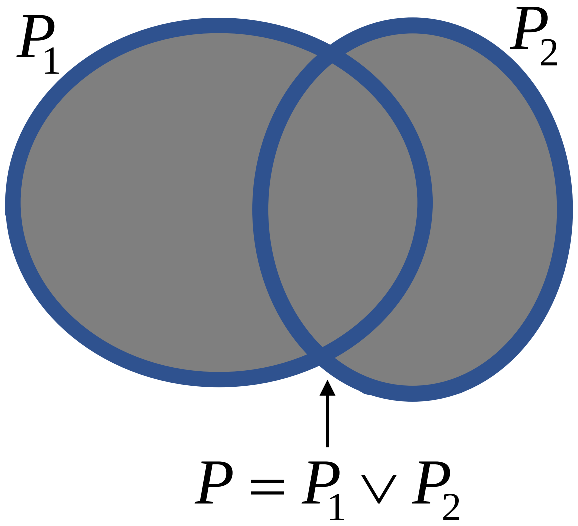
1. **Εισαγωγή Σύζευξης**: $P_1,\ P_2,\ ....,P_n \triangleright P_1 \wedge P_2 \wedge .... \wedge P_n = P$

   όπου το P είναι η τομή των $P_1,\ P_2,....,P_n$



2. **Εισαγωγή Διάζευξης**: $P_1,\ P_2,\ ....,P_n \triangleright P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n = P$

   όπου το P είναι η ένωση των $P_1,\ P_2,....,P_n$



Προτασιακή Λογική

Μηχανισμοί Εξαγωγής Συμπεράσματος

3. Απαλοιφή Διπλής Άρνησης: $\neg\neg P \vartriangleright P$

4. Αρχή της Ανάλυσης: $P \vee Q,\ \neg Q \vee R \vartriangleright P \vee R$

5. Τρόπος του Θέτειν (Modus Ponens): $P,\ P \to Q \vartriangleright Q$

Προτασιακή Λογική

Μηχανισμοί Εξαγωγής Συμπεράσματος

Modus Ponens

- Ο πιο γνωστός και πλέον χρησιμοποιήσιμος Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπεράσματος
- $P,\, P \to Q \triangleright Q$: Αν ισχύει η πρόταση P και η $P \to Q$ τότε συμπεραίνω την Q
- Η πιο καλή οπτικοποίηση του μηχανισμού είναι η παρακάτω:

Κανόνας Αν-Τότε:	$P \to Q$
Γεγονός που ισχύει:	P
(Συμπέρασμα) Ισχύει το γεγονός:	Q

Παράδειγμα

P: Ο Νίκος είναι προγραμματιστής

Q: Η εργασία του Νίκου έχει σχέση με υπολογιστές

$P \to Q$: **Αν** ο Νίκος είναι προγραμματιστής **τότε** η δουλειά του Νίκου έχει σχέση με υπολογιστές

Συμπερασματικά

Ένας Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπεράσματος αποτελεί μία διαδικασία με βάση την οποία εξάγονται (αποδεικνύονται) τα ζητούμενα ενός προβλήματος με την χρήση προτασιακής λογικής. Ο πιο γνωστός είναι ο Modus Ponens

Καλό Απόγευμα